УДК 531.36 534:1

 А.П. Маркеев

РЕЗОНАНС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Изучаются нелинейные колебания близкой к интегрируемой 2π-периодической по t гамильтоновой системы с одной степенью свободы в малой конечной окрестности ее положения равновесия. Функция Гамильтона аналитична, линеаризованная система устойчива, ее характеристические показатели $\pm i\nu$ чисто мнимые, причем 3ν – целое число. В такой системе положение равновесия, вообще говоря, неустойчиво и существуют шесть траекторий, асимптотически приближающихся к нему при $t \to \pm\infty$ [1,2].

Показано, что для большинства начальных условий движение в окрестности положения равновесия условно-периодично. Установлено существование устойчивых 6π-периодических движений, близких к неустойчивому положению равновесия. Показано, что, несмотря на неустойчивость, траектории, начинающиеся достаточно близко к равновесию, всегда остаются на конечном расстоянии от него. Получена оценка величины этого расстояния. Обсуждается стохастичность движения вблизи асимптотических к равновесию траекторий.

1. Постановка задачи. Изучается движение гамильтоновой системы с одной степенью свободы, имеющей функцию Гамильтона вида

$$H = H^{(0)}(x,y) + \varepsilon H^{(1)}(x,y,t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(x,y,t) + \ldots \tag{1.1}$$

где x и y – координата и импульс, ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), H аналитична относительно ε, непрерывна и 2π-периодична по t. Начало координат $x = y = 0$ – положение равновесия системы, H аналитична относительно x, y в некоторой его окрестности. Предполагается также, что помимо ε, H зависит еще одного или нескольких параметров.

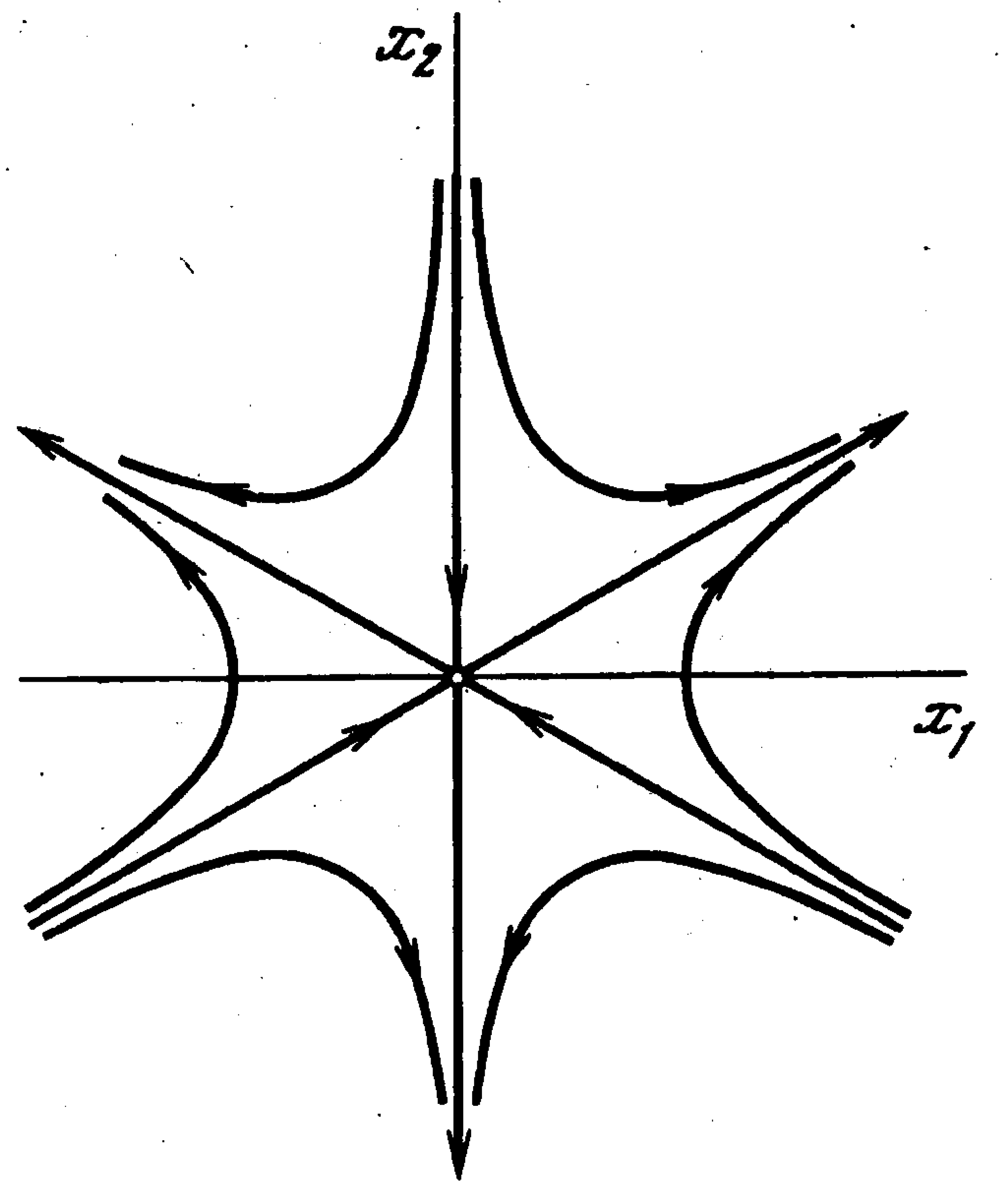
Пусть линеаризованная по x, y система устойчива по Ляпунову, а ее характеристические показатели $\pm i\nu$ чисто мнимые (ν – вещественное число, не равное нулю). Будем считать, что число 3ν целое, т.е. имеет место резонанс третьего порядка. Тогда в общем случае линейная устойчивость положения равновесия разрушается сколь угодно малыми нелинейными членами в уравнениях движения [1].

Неустойчивость гамильтоновых систем при резонансе тесно связана с существованием траекторий, асимптотических при $t \to \pm\infty$ к невозмущенному движению [3]. Было показано [2], что при резонансе третьего порядка в системе с одной степенью свободы существует шесть асимптотических траекторий, три из них стремятся к невозмущенному движению при $t \to +\infty$ и три – при $t \to -\infty$.

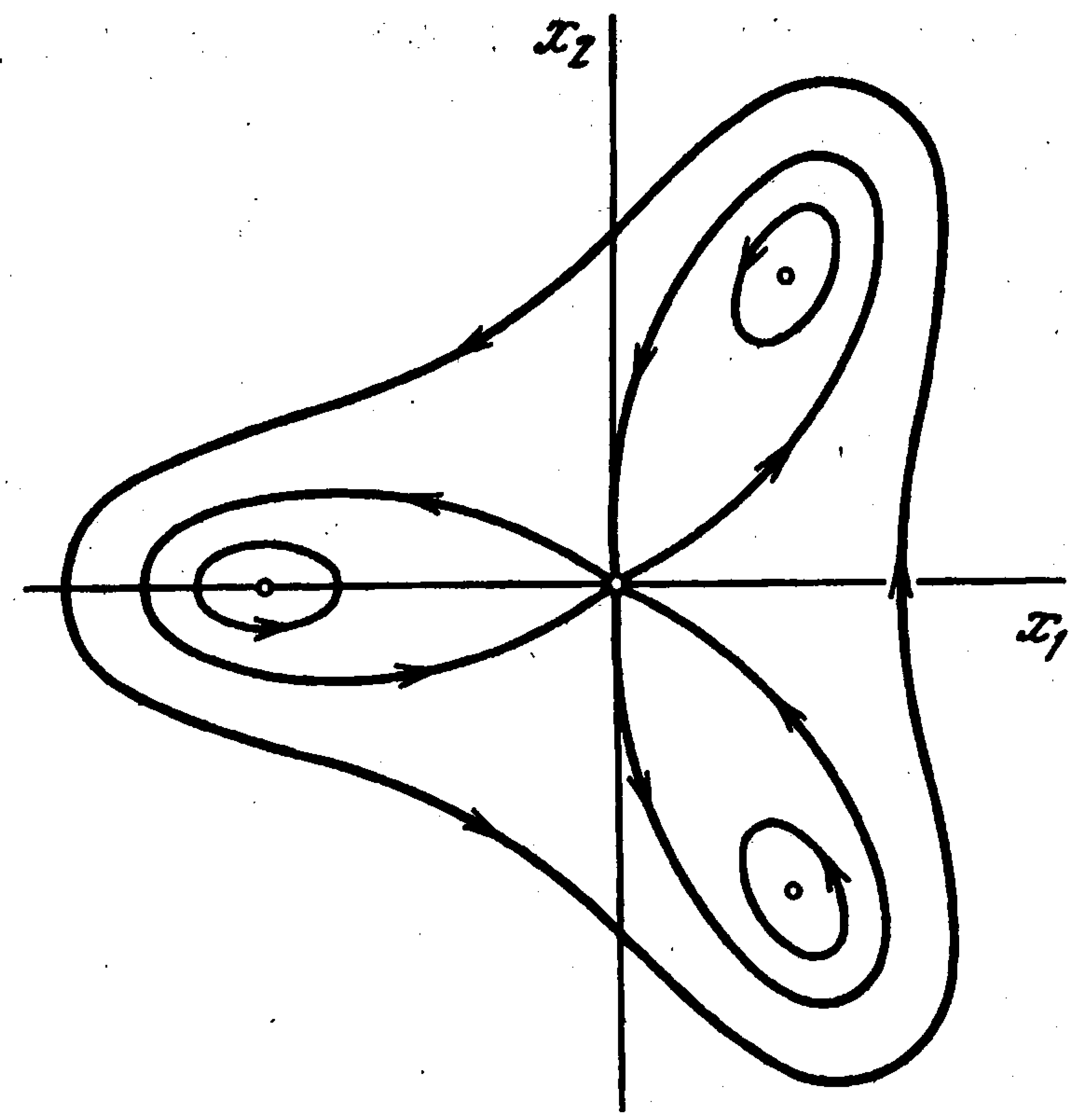
Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left[x(x^2 - 3y^2)\cos t - y(y^2 - 3x^2)\sin t\right] - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 \tag{1.2}$$

В ней имеется резонанс $3\nu = 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

После перехода во вращающуюся систему координат x_1, x_2:

$$x = \cos\frac{t}{3}x_1 - \sin\frac{t}{3}x_2,\quad y = \sin\frac{t}{3}x_1 + \cos\frac{t}{3}x_2$$

и введения канонически сопряженных полярных координат θ, ρ по формулам

$$x_1 = \sqrt{2\rho}\cos\theta,\quad x_2 = \sqrt{2\rho}\sin\theta \tag{1.3}$$

рассматриваемой системе отвечает функция Гамильтона

$$H = \rho^2 + \rho^{3/2}\cos 3\theta \tag{1.4}$$

Если в (1.2) пренебречь слагаемыми четвертой степени относительно x, y, то вместо (1.4) получим $H = \rho^{3/2}\cos 3\theta$. Системе с таким гамильтонианом в координатах x_1, x_2 отвечает фазовый портрет, показанный на фиг. 1. Асимптотическим к началу координат траекториям соответствуют постоянные значения угла θ: $\theta = \pi/6 + n\pi/3$ ($n = 1,2, \ldots, 6$). При этом

$$\rho(t) = 4\rho(0)\left[2 - (-1)^n 3\rho^{1/2}(0)t\right]^{-2}$$

При нечетных n траектории являются асимптотическими к точке $x_1 = x_2 = 0$ при $t \to +\infty$, а при четных – при $t \to -\infty$. Начало координат неустойчиво. Если начальные значения θ отличны от $\pi/2$, $7\pi/6$ и $11\pi/6$, то для сколь угодно малых начальных значений $\pi(0) \neq 0$ траектория с возрастанием t уходит сколь угодно далеко от начала координат.

При учете слагаемых четвертой степени в (1.2) система имеет фазовый портрет, изображенный на фиг. 2. В достаточно малой окрестности начала координат по-прежнему существует шесть асимптотических траекторий. Но в конечной окрестности эти траектории являются не просто асимптотическими, а гомоклинными двоякоасимптотическими ([4], с. 335): траектории стремятся к началу координат как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Наличие слагаемых четвертой степени в (1.2) приводит к тому, что шесть асимптотических траекторий фиг. 1 сливаются попарно в три двоякоасимптотические гомоклинные траектории фиг. 2, а движение происходит в ограниченной окрестности начала координат.

В связи с рассмотренным примером возникает ряд вопросов о поведении гамильтоновой системы при резонансе третьего порядка. Например, будут ли траектории системы при всех t оставаться в ограниченной окрестности начала координат, если к гамильтониану (1.2) добавить малые периодические по t члены, каким при этом будет характер нелинейных колебаний в конечной малой (но не бесконечно малой) окрестности начала координат.

Рассмотрению этих и некоторых других вопросов для систем с гамильтонианом (1.1) посвящена данная работа.

2. Предварительное преобразование гамильтониана. Функции $H^{(i)}$, входящие в разложение (1.1), представимы рядами

$$H^{(i)} = \sum_{k=2}^{\infty} H_k^{(i)}(x,y,t) \tag{2.1}$$

где $H_k^{(i)}$ – форма степени k относительно x, y.

Переменные x, y могут быть выбраны так, чтобы совокупность форм второй степени в (1.1) имела нормальную форму $\nu(x^2+y^2)/2$. Нужный выбор переменных x, y можно сделать при помощи линейной, канонической 2π-периодической по t замены переменных [1]. При достаточно малых ε эта замена переменных будет аналитической по ε. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что x, y выбраны так, что в разложении функции $H^{(0)}$ в ряд (2.1) нет форм третьей и пятой степеней, а форма четвертой степени – функция только от суммы x^2+y^2. Такой выбор переменных можно сделать, применив нелинейное нормализующее преобразование, построенное методом Депри–Хори [5] или классическим способом Биркгофа [6].

Если x, y выбраны, как сказано выше, то после канонического преобразования $x_* = \varepsilon^{-1}x$, $y_* = \varepsilon^{-1}y$ функция Гамильтона (1.1) запишется в виде

$$H = \nu(x_*^2+y_*^2)/2+\varepsilon^2\left[H_3^{(1)}(x_*,y_*,t)+c(x_*^2+y_*^2)^2/4\right]+$$
$$+\varepsilon^3\left[H_3^{(2)}(x_*,y_*,t)+H_4^{(1)}(x_*,y_*,t)\right]+O(\varepsilon^4) \tag{2.2}$$

Здесь c – постоянная, определяемая в процессе нелинейной нормализации $H^{(0)}$. Считаем, что $c \neq 0$, а также полагаем, что средние значения функций $H_3^{(1)}$, $H_3^{(2)}$, $H_4^{(1)}$ по явно входящему времени равны нулю. Если бы это было не так, то эти средние могли бы быть включены в $H^{(0)}$, что привело бы только к изменению постоянной c в (2.2) на величину порядка ε.

Пусть $3\nu = N$. При помощи нелинейной по ξ, η 2π-периодической по t канонической замены переменных $x_*, y_* \to \xi, \eta$ типа преобразования Биркгофа упростим форму третьей степени $H_3^{(1)}$ в (2.2). После этой замены члены порядка ε^3 в гамильтониане (2.2) останутся без изменения, а функция Гамильтона запишется [1] в виде

$$H = \nu(\xi^2+\eta^2)/2+\varepsilon^2\left[c(\xi^2+\eta^2)^2/4+(\kappa_1\sin Nt+\kappa_2\cos Nt)(\eta^3-3\eta\xi^2)+\right.$$
$$\left.+(\kappa_1\cos Nt-\kappa_2\sin Nt)(\xi^3-3\xi\eta^2)\right]+\varepsilon^3\left[H_3^{(2)}(\xi,\eta,t)+H_4^{(1)}(\xi,\eta,t)\right]+O(\varepsilon^4) \tag{2.3}$$

где κ_1, κ_2 – постоянные. Считаем, что $\kappa_1^2+\kappa_2^2 \neq 0$.

Теперь вместо ξ, η введем новые канонически сопряженные переменные φ, r при помощи канонического преобразования

$$\xi = \sqrt{2r}\sin[\varphi+(Nt-\varphi_0)/3], \quad \eta = \sqrt{2r}\cos[\varphi+(Nt-\varphi_0)/3]$$
$$\sin\varphi_0 = \kappa_1(\kappa_1^2+\kappa_2^2)^{-1/2}, \quad \cos\varphi_0 = \kappa_2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)^{-1/2} \tag{2.4}$$

Новый гамильтониан имеет вид

$$F=\varepsilon^2(cr^2+\kappa r^{3/2}\cos 3\varphi)+\varepsilon^3\left[F_3(\varphi,r,t)+F_4(\varphi,r,t)\right]+O(\varepsilon^4) \qquad (2.5)$$

где $\kappa=2[2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)]^{1/2}$, F_3 и F_4 – функции $H_3^{(2)}$ и $H_4^{(1)}$ из (2.3), в которых сделана замена (2.4), эти функции 6π-периодичны по t.

Для удобства последующего анализа сделаем еще одно каноническое преобразование

$$r=\kappa^2 c^{-2}\rho,\ \ \varphi=s(\theta-\pi/6)+\pi/6\ \ (s=\operatorname{sign}c) \qquad (2.6)$$

и введем новую независимую переменную $\tau=\varepsilon^2\kappa^2|c|^{-1}t$. В новых переменных уравнения движения имеют вид

$$d\theta/d\tau=\partial\gamma/\partial\rho,\ \ d\rho/d\tau=-\partial\gamma/\partial\theta \qquad (2.7)$$

$$\gamma=\gamma_0(\theta,\rho)+\varepsilon\gamma_1(\theta,\rho,\tau)+O(\varepsilon^2) \qquad (2.8)$$

$$\gamma_0=\rho^2+\rho^{3/2}\cos 3\theta,\ \ \gamma_1=c^3\kappa^{-4}(F_3+F_4) \qquad (2.9)$$

где F_3 и F_4 – функции из (2.5), в которых сделана замена по формулам (2.6). Функцию γ_1 можно записать в виде

$$\gamma_1=\rho^{3/2}\left(\alpha_1^{(3)}\cos\theta+\beta_1^{(3)}\sin\theta+\alpha_3^{(3)}\cos 3\theta+\beta_3^{(3)}\sin 3\theta\right)+$$

$$+\rho^2\left(\alpha_0^{(4)}+\alpha_2^{(4)}\cos 2\theta+\beta_2^{(4)}\sin 2\theta+\alpha_4^{(4)}\cos 4\theta+\beta_4^{(4)}\sin 4\theta\right)$$

$$\alpha_j^{(m)}={\sum_{k=-\infty}^{+\infty}}' a_k^{(j,m)}\exp(3/2\, ik\lambda\tau),\ \ \beta_j^{(m)}={\sum_{k=-\infty}^{+\infty}}' b_k^{(j,m)}\exp(3/2\, ik\lambda\tau) \qquad (2.10)$$

где $a_k^{(j,m)}$, $b_k^{(j,m)}$ – постоянные коэффициенты Фурье, а

$$\lambda=(2/9)|c|\kappa^{-2}\varepsilon^{-2} \qquad (2.11)$$

Штрих у знака суммы в (2.10) означает, что при суммировании $k\neq 0$.

3. Движение невозмущенной системы. Если в (2.7) положить $\varepsilon=0$, то получим уравнения движения "невозмущенной" системы

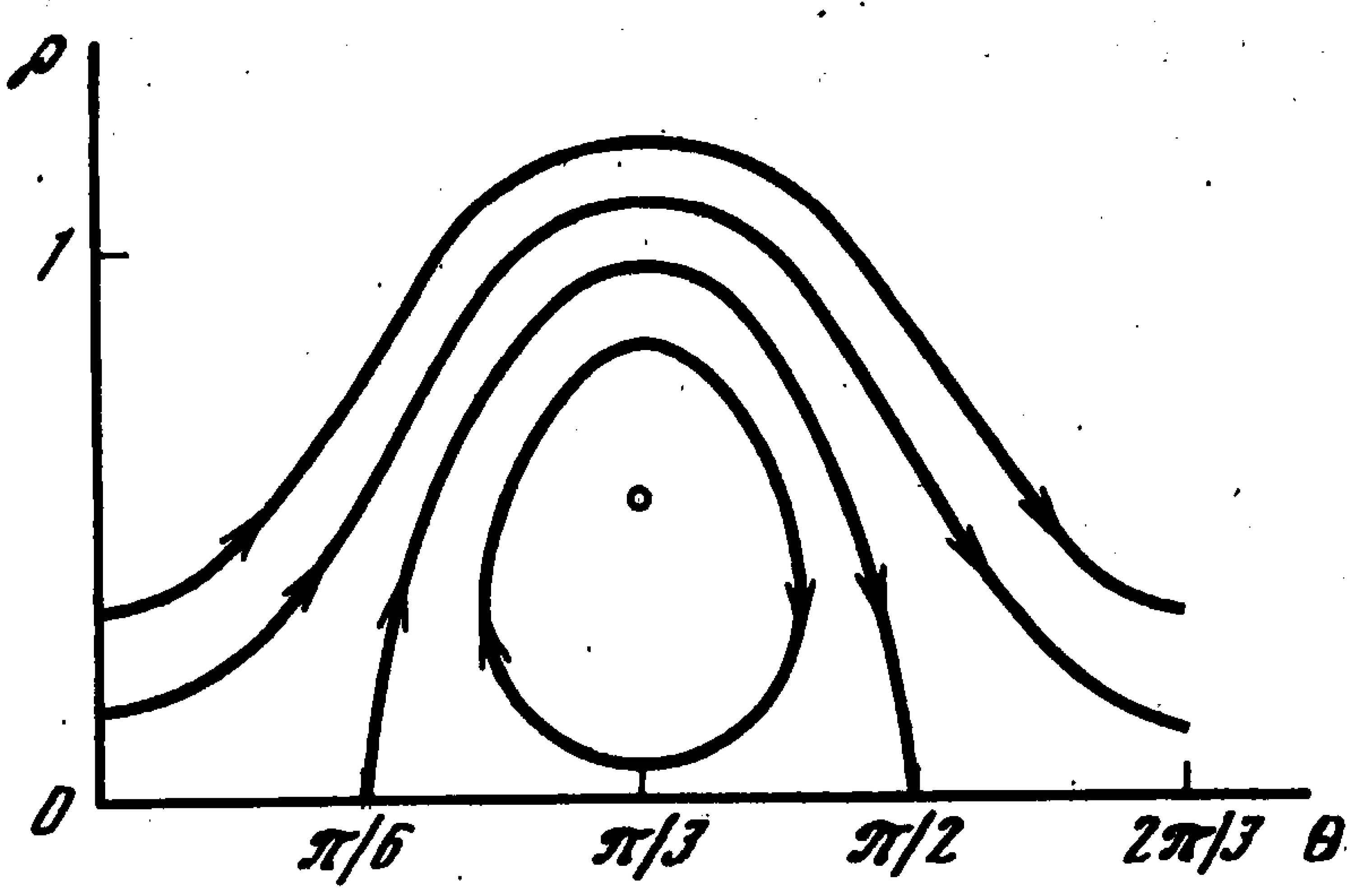
$$d\theta/d\tau=2\rho+3/2\,\rho^{1/2}\cos 3\theta,\ \ d\rho/d\tau=3\rho^{3/2}\sin 3\theta \qquad (3.1)$$

которым отвечает функция Гамильтона γ_0 из (2.9).

Невозмущенная система имеет первый интеграл

$$\rho^2+\rho^{3/2}\cos 3\theta=h\ \ (h=\text{const}) \qquad (3.2)$$

Фазовый портрет системы (3.1) имеет период $2\pi/3$ по θ, он изображен на фиг. 3. В плоскости x_1, x_2, где x_1 и x_2 определены равенствами (1.3), фазовый портрет имеет вид фиг. 2. При $h<-27/256$ движение невозможно. Значение $h=-27/256$ отвечает положениям равновесия $\rho_*=9/16$: $\theta_*=(2l-1)\pi/3$ ($l=1,2,3$). При $-27/256<h<0$ (область колебаний) величины ρ,θ периодически изменяются в окрестности их равновесных значений ρ_*,θ_*. При этом $\rho_2\leqslant\rho\leqslant\rho_1$, где $\rho_1,\rho_2(0<\rho_2<9/16<\rho_1<1)$ – вещественные корни уравнения $\rho^2-\rho^{3/2}=h$. В области колебаний уравнения (3.1)



Фиг. 3

интегрируются в эллиптических функциях. Если ввести обозначения

$$2\alpha = 1-\rho_1-\rho_2,\ \ f=-3\alpha(\rho_1+\rho_2)-2h,\ \ \beta^2=f-(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)$$

$$g=\beta^2(\rho_1-\rho_2)^2,\ \ \mu=(f^2+g)^{1/4},\ \ 2k^2=1-f/\mu^2 \tag{3.3}$$

$$\delta=\left\{[(\alpha-\rho_2)^2+\beta^2]/[(\alpha-\rho_1)^2+\beta^2]\right\}^{1/2}$$

и принять, что при $\tau = 0$ величина ρ равна своему минимальному значению ρ_2, то

$$\rho(\tau)=\frac{\rho_1\delta+\rho_2-(\rho_1\delta-\rho_2)\mathrm{cn}(3\mu\tau)}{1+\delta+(1-\delta)\mathrm{cn}(3\mu\tau)} \tag{3.4}$$

а $\theta(\tau)$ можно найти из (3.2). В (3.4) cn – эллиптический косинус, модуль k эллиптических функций определен в (3.3).

Частота колебаний ω_1 задается равенством

$$\omega_1 = 3\pi\mu/(2K(k)) \tag{3.5}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. В пределе при $h \to -27/256$ получим частоту $\omega_1 = 9\sqrt{3}/8$ малых линейных колебаний в окрестности равновесия ρ_*, θ_*. При $h \to 0$ имеем $\omega_1 \to 0$, причем

$$\omega_1=-ah^{1/3}+O\left(|h|^{2/3}\right),\ \ a=3^{5/4}\pi/\{2K[(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4]\}=3{,}94 \tag{3.6}$$

При $h > 0$ (область вращений) $\rho(\tau)$ по-прежнему задается формулами (3.3), (3.4), только теперь ρ_2 – вещественный корень уравнения $\rho^2 + \rho^{3/2} = h$. Угол θ монотонно возрастает с ростом τ и изменяется на 2π за "время" $6\pi/\omega_1$. Средняя частота ω_2 при вращениях задается равенством

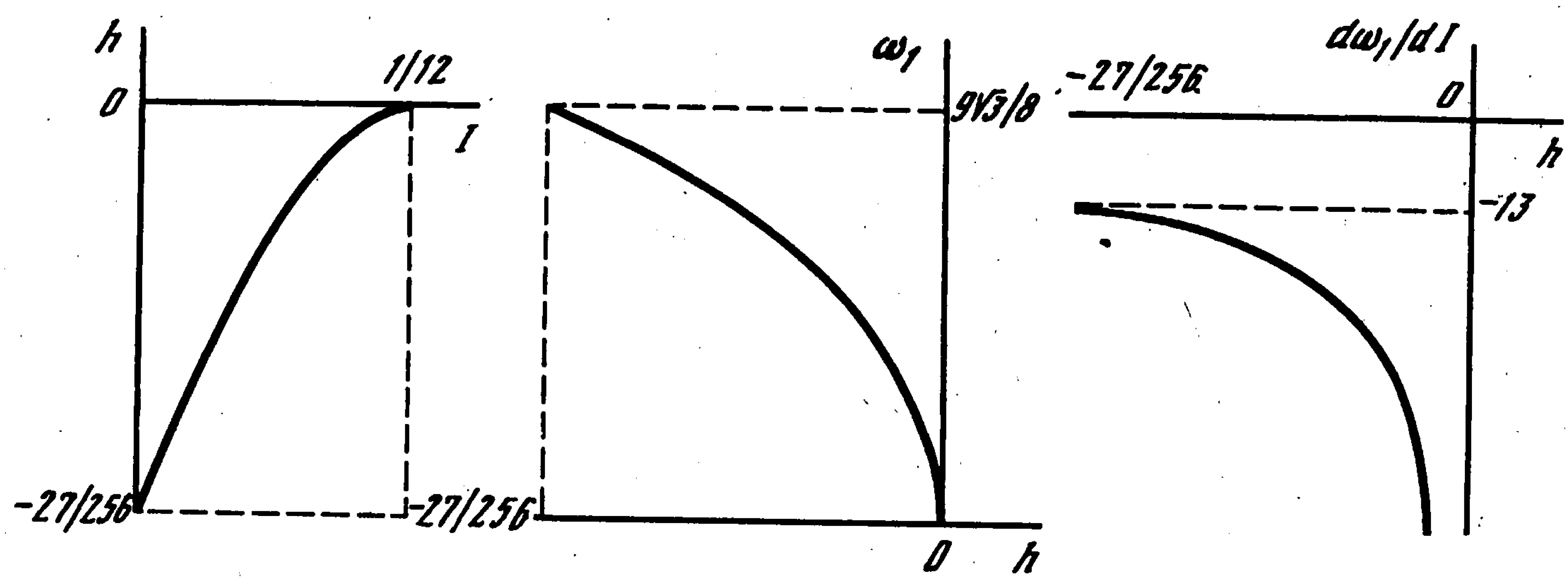
$$\omega_2 = \pi\mu/(2K(k)) \tag{3.7}$$

При $h \to 0$ получим $\omega_2 \to 0$, и имеет место равенство

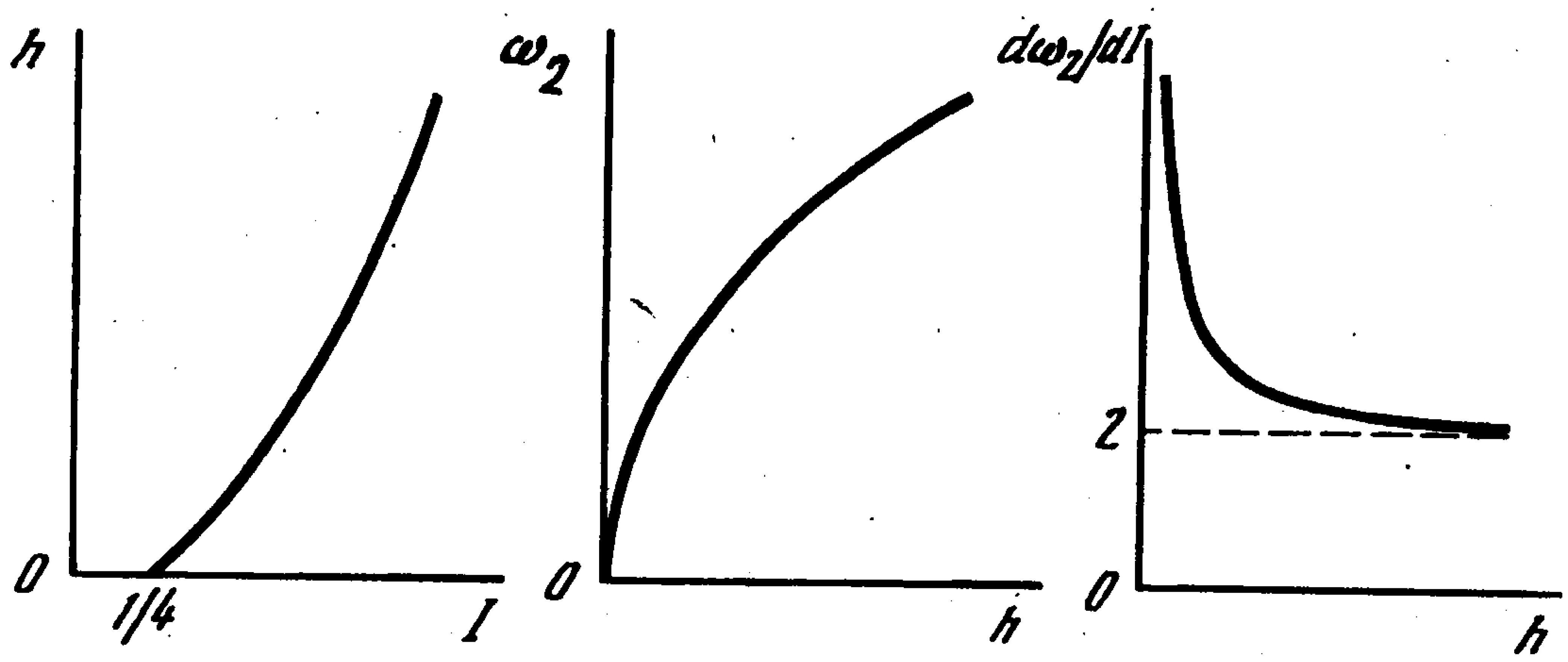
$$\omega_2 = ah^{1/3}/3+O(h^{2/3}) \tag{3.8}$$

где a – постоянная из (3.6). При $h \gg 1$ имеем $\omega_2 = 2h^{1/2} + O(h^{-1/2})$.

Если $h = 0$, то либо система находится в состоянии равновесия $\rho_* = 0$, либо ее траектории являются двоякоасимптотическими к этому равновесию. Максимальное значение величины ρ на этих траекториях равно единице. Пусть ρ принимает это



Фиг. 4



Фиг. 5

значение, когда $\tau = 0$. Тогда на двоякоасимптотических траекториях

$$\rho = 4/(4+9\tau^2),\quad \theta = [(2l-1)\pi + \mathrm{arctg}(3\tau/2)]/3 \quad (l = 1,2,3) \tag{3.9}$$

Траектории (3.9) являются сепаратрисами, разделяющими на фиг. 2 и 3 области колебательных и вращательных движений. В дальнейшем каждую из сепаратрис будем обозначать S_0.

В областях колебаний и вращений невозмущенной задачи с гамильтонианом γ_0 можно ввести переменные действие–угол I, w. В области колебаний действие $I(h)$ определяется интегралом

$$I = (2\pi)^{-1}\oint \rho d\theta \tag{3.10}$$

где ρ – функция θ и h, определяемая из (3.2), интеграл вычисляется вдоль замкнутой фазовой кривой фиг. 3, окружающей положение равновесия ρ_*, θ_*. Функция, обратная (3.10), дает выражение невозмущенного гамильтониана через переменную действие: $\gamma_0 = h(I)$.

В предельных случаях $h = -27/256$ (равновесие) и $h = 0$ (сепаратриса) I равняется 0 и 1/12 соответственно. На фиг. 4 представлен график функции $h(I)$, а также графики величин $\omega_1 = dh/dI$ и $d\omega_1/dI$ как функций от h.

Вблизи сепаратрисы справедливы разложения

$$h(I) = -2^{1/2}a^{3/2}(1-12I)^{3/2}/108 + O((1-12I)^2)$$

$$d\omega_1/dI = -2^{1/2}a^{3/2}(1-12I)^{-1/2} + O(1) = a^2h^{-1/3}/3 + O(1)$$

В области вращений действие I определяется интегралом

$$I = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\rho d\theta$$

где $\rho = \rho(\theta, h)$ находится из (3.2). При $h \to 0$ имеем $I \to 1/4$, а при $h \gg 1$ имеем $I = h^{1/2} + O(h^{-1/2})$. Графики функций $h(I)$, $\omega_2 = dh/dI$ и $d\omega_2/dI$ приведены на фиг. 5. Вблизи сепаратрисы

$$h(I) = 2^{1/2} a^{3/2} (4I-1)^{3/2} / 108 + O((4I-1)^2)$$

$$d\omega_2 / dI = 2^{1/2} a^{3/2} (4I-1)^{-1/2} / 9 + O(1) = a^2 h^{-1/3} / 27 + O(1)$$

И в области колебаний, и в области вращений функция Гамильтона γ_0 невозмущенного движения невырожденна: производная d^2h/dI^2 отлична от нуля; она отрицательна в области колебаний и положительна в области вращений.

4. Возмущенное движение в области колебаний и вращений. Пусть теперь ε мало́, но отлично от нуля. При $\varepsilon \neq 0$ положения равновесия $\rho_* = 9/16$, $\theta_* = (2l-1)\pi/3$ ($l = 1,2,3$) переходят в 6π-периодическое (по исходной независимой переменной t) движение, аналитическое по ε. Это следует из теории Пуанкаре периодических движений квазилинейных систем [7], так как частота малых линейных колебаний невозмущенной системы (3.1) в окрестности равновесия ρ_*, θ_* равна $\varepsilon^2 9\sqrt{3}\kappa^2 / (8|c|)$ и при достаточно малых ε не может быть кратной частоте периодического возмущения, равной 1/3.

Вычисления показывают, что нормализованная в окрестности 6π-периодического движения функция Гамильтона (2.8) с точностью до членов второй степени I включительно имеет вид

$$\gamma = \Omega_1 I + \Omega_2 I^2$$

где $\Omega_1 = 9\sqrt{3}/8 + f_1(\varepsilon)$, $\Omega_2 = -13/2 + f_2(\varepsilon)$, функции $f_i(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Так как для $0 < \varepsilon \ll 1$ величина Ω_2 отлична от нуля, то при достаточно малых ε рассматриваемое периодическое движение устойчиво по Ляпунову [8, 9].

Возмущенное движение в окрестности сепаратрис (3.9) будет рассмотрено далее. Если же исключить малую окрестность сепаратрис, то в переменных действие–угол функция Гамильтона (2.8) будет аналитической, причем, как отмечалось выше, ее невозмущенная часть удовлетворяет условиям невырожденности как в области колебаний, так и в области вращений. Поэтому [10] из большинства фазовых траекторий, лежащих в этих областях, при малых ε рождаются условно-периодические движения.

В пространстве θ, ρ, t (или x_1, $x_2 t$) плоскости $t = \mathrm{const}$, отстоящие одна от другой на расстоянии, кратном 6π, можно отождествить. На поверхности "сечения" $t = 0$ упомянутые условно-периодические траектории при $\varepsilon = 0$ вырождаются в замкнутые фазовые кривые фиг. 3 (или фиг. 2). При значениях ε малых, но отличных от нуля, большинство из этих кривых не разрушается, а только мало (вместе с ε) деформируется. Согласно [11], мера Лебега разрушающихся при $\varepsilon \neq 0$ фазовых кривых экспоненциально мала, в рассматриваемой задаче она имеет порядок $\exp(-c_1\varepsilon^{-2})$ ($c_1 > 0$ – const).

5. О возмущении двоякоасимптотических траекторий. Гомоклинные двоякоасимптотические траектории – сепаратрисы (3.9) можно рассматривать как кривые, образованные двумя асимптотическими траекториями S_0^+ и S_0^-: для S_0^+ траектория асимптотически приближается к началу координат при $t \to +\infty$, а для S_0^- – при $t \to -\infty$. Траектории S_0^+ и S_0^- совпадают и образуют сепаратрису S_0 на фазовой плоскости невозмущенной системы (3.1).

При $\varepsilon \neq 0$ роль такой разделяющей кривой играет некоторая кривая S_ε. При $\varepsilon = 0$ она совпадает с S_0, а при $0 < \varepsilon \ll 1$ состоит, вообще говоря, из двух ветвей S_ε^+ и S_ε^-. Точка фазовой плоскости принадлежит $S_\varepsilon^+(S_\varepsilon^-)$, если траектория возмущенной системы, начинающаяся при $t = 0$ в этой точке, стремится к началу координат при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$). Несовпадение S_ε^+ и S_ε^- называют расщеплением сепаратрисы. На него обратил внимание еще Пуанкаре [12].

Рассмотрим 2π-периодическую по α функцию

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\gamma_0, \gamma_1)d\tau \tag{5.1}$$

где (γ_0, γ_1) – скобка Пуассона, вычисленная вдоль двоякоасимптотической траектории (3.9), причем, "время" τ, явно входящее в функцию γ_1, заменено на $\tau + 2\alpha/(3\lambda)$. Функция (5.1) зависит от параметра λ и числа l ($l = 1,2,3$), указывающего, какая именно из траекторий (3.9) рассматривается. Функции вида (5.1) используются в методе Мельникова [13], дающем степенную по ε оценку для величины расщепления сепаратрис. В наиболее простом случае, когда интеграл (5.1) не зависит от ε, при $J(\alpha) \not\equiv 0$ сепаратриса расщепляется, причем если уравнение $J(\alpha) = 0$ имеет простой корень, то кривые S_ε^+ и S_ε^- пересекаются бесконечное число раз. Такое поведение двоякоасимптотических траекторий приводит к хаотизации движения в возмущенной задаче. В случае, когда интеграл (5.1) зависит от ε, применение метода [13] может быть затруднено.

Вычисление и анализ интеграла (5.1) – довольно сложная задача. Она упрощается тем, что исследуется поведение возмущенной системы для малых ε, и, следовательно (см. (2.11)), для целей проводимого исследования достаточно знать поведение функции (5.1) при $\lambda \to +\infty$.

Учтя, что на траекториях (3.9) $\rho^{1/2} = -\cos 3\theta$, вычислим скобку Пуассона (γ_0, γ_1), а затем в (5.1) введем вместо переменной интегрирования τ переменную θ согласно второму из равенств (3.9). Тогда получим

$$J(\alpha) = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos^2 3\theta f(\theta)d\theta$$

$$\theta_1 = (4l-3)\pi/6, \quad \theta_2 = (4l-1)\pi/6$$

$$f(\theta) = -3\beta_3^{(3)} + (\alpha_2^{(4)} - 4\alpha_1^{(3)} + 2\alpha_4^{(4)})\sin 2\theta - (\beta_2^{(4)} + 4\beta_1^{(3)} - 2\beta_4^{(4)})\cos 2\theta +$$

$$+(2\alpha_4^{(4)} - 5\alpha_1^{(3)} + 5/2\,\alpha_2^{(4)})\sin 4\theta - (2\beta_4^{(4)} - 5\beta_1^{(3)} - 5/2\,\beta_2^{(4)})\cos 4\theta +$$

$$+6(\alpha_0^{(4)} - \alpha_3^{(3)})\sin 6\theta + 6\beta_3^{(3)}\cos 6\theta + 7/2\,\alpha_2^{(4)}\sin 8\theta -$$

$$-7/2\,\beta_2^{(4)}\cos 8\theta + 4\alpha_4^{(4)}\sin 10\theta - 4\beta_4^{(4)}\cos 10\theta$$

$$\alpha_j^{(m)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(j,m)}\exp(ik\alpha)\exp(ik\lambda\,\mathrm{tg}\,3\theta), \quad \beta_j^{(m)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(j,m)}\exp(ik\alpha)\exp(ik\lambda\,\mathrm{tg}\,3\theta)$$

Следовательно, вопрос о нахождении интеграла (5.1) сводится к вычислению интегралов вида

$$J_1^{(n,k)} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos^2 3\theta\sin 2n\theta\exp(ik\lambda\,\mathrm{tg}\,3\theta)d\theta, \quad J_2^{(n,k)} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos^2 3\theta\cos 2n\theta\exp(ik\lambda\,\mathrm{tg}\,3\theta)d\theta \tag{5.2}$$

для $n = 0,1,\ldots,5$ и целых k, отличных от нуля. После замены переменных $z = 3\theta - (2l-1)\pi$ для интегралов (5.2) получаются такие выражения:

$$J_1^{(n,k)} = i(uI^{(n,k)} - u^{-1}I^{(-n,k)})/3, \quad J_2^{(n,k)} = (uI^{(n,k)} + u^{-1}I^{(-n,k)})/3 \tag{5.3}$$

$$u = \exp[i2n(l-2)\pi/3]$$

$$I^{(n,k)} = \int_0^{\pi/2}\cos^2 z\cos(k\lambda\,\mathrm{tg}\,z - \frac{2}{3}nz)dz$$

Последний интеграл выражается через функцию Уиттекера [14]. При $\lambda \to +\infty$ для него справедливо такое представление:

$$I^{(n,k)} = \frac{\pi(2|k|\lambda)^r}{8\Gamma(1+r)}\exp(-|k|\lambda)(1+O(\lambda^{-1})) \qquad (5.4)$$

Здесь $r = sn/3+1$, $s = \operatorname{sign}k$, Γ – гамма-функция.

Пусть $q(q > 0)$ – наименьший из номеров гармоник, содержащихся в рядах Фурье (2.10). Тогда, используя (5.2)–(5.4), можно получить, что при $\lambda \to +\infty$

$$J(\alpha) = \chi \sin(q\alpha + \delta_1)\lambda^p \exp(-q\lambda)(1+O(\lambda^{-\delta_2})) \qquad (5.5)$$

где χ, δ_1, δ_2 – постоянные, причем χ не зависит от l, величина p равняется одному из четырех чисел: $5/3$, $6/3$, $7/3$, $8/3$, число $\delta_2 \geqslant 1/3$.

Величина $J(\alpha)$ экспоненциально мала при $\varepsilon \to 0$. Поэтому непосредственное применение метода [13] в рассматриваемой задаче было бы некорректным из-за отсутствия его обоснования для задач с экспоненциально малым расщеплением сепаратрис. Однако, по-видимому, справедливо предположить, что в случае общего положения расщепление сепаратрис имеет место, а в их окрестности возникает стохастическое движение. Ниже проводится математически не строгое обсуждение некоторых вопросов о возмущенном движении вблизи сепаратрис.

6. О движении в окрестности сепаратрис. Предварительно рассмотрим одно полезное преобразование в произвольной близкой к интегрируемой гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Запишем ее гамильтониан в виде (2.8). При $\varepsilon = 0$ общее решение дифференциальных уравнений (2.7) можно записать в виде

$$\rho = \rho(\tau + \sigma, h), \quad \theta = \theta(\tau + \sigma, h) \qquad (6.1)$$

где σ, h – произвольные постоянные, σ – значение "фазы" $\tau + \sigma$ при $\tau = 0$, а h – константа интеграла энергии $\gamma_0(\theta, \rho) = h$.

Можно показать, что если при $\varepsilon \neq 0$ равенства (6.1) рассматривать как замену переменных $\theta, \rho \to \sigma, h$, то эта замена является каноническим унивалентным преобразованием, причем в преобразованной системе σ и h играют роль координаты и импульса соответственно, а новым гамильтонианом будет функция $\gamma - \gamma_0 = \varepsilon\gamma_1 + \ldots$, в которой ρ и θ заменены на правые части равенств (6.1):

$$dh/d\tau = -\varepsilon\partial\gamma_1/\partial\sigma - \ldots, \quad d\sigma/d\tau = \varepsilon\partial\gamma_1/\partial h + \ldots \qquad (6.2)$$

Можно также показать, что члены первого порядка по ε в первом из уравнений (6.2) можно записать в виде $\varepsilon(\gamma_0, \gamma_1)$, где скобка Пуассона вычисляется при значениях ρ и θ из (6.1).

Для изучения возмущенного движения в окрестности сепаратрисы построим сепаратрисное отображение для системы с гамильтонианом (2.8). Сепаратрисное отображение является эффективным средством для получения условий возникновения стохастических движений и анализа их свойств. Оно нашло широкое применение во многих задачах механики и физики [15–19].

Сепаратрисное отображение получим, используя уравнения (6.2). Пусть h_0 и σ_0 – значения h и σ при $\tau = 0$, причем $|h_0| \ll 1$. Найдем приращение величин h и σ за один цикл движения, продолжительность которого равна периоду колебаний или трети "периода" вращений в малой окрестности сепаратрисы.

При достаточной близости к сепаратрисе в правой части первого из уравнений (6.2) можно положить $h = 0$ и приближенное выражение для приращения $h_1 - h_0$ величины h найти интегрированием в бесконечных пределах. Получаем

$$h_1 = h_0 + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(\gamma_0, \gamma_1)d\tau \qquad (6.3)$$

где скобка Пуассона вычисляется на сепаратрисе $\rho = \rho(\tau + \sigma_0, 0)$, $\theta = \theta(\tau + \sigma_0, 0)$. Сделав в (6.3) сдвиг $\tau \to \tau - \sigma_0$, получим

$$h_1 = h_0 + \varepsilon G(\sigma_0)$$

$$G(\sigma_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma_0(\theta,\rho), \gamma_1(\theta,\rho,\tau-\sigma_0))d\tau \tag{6.4}$$

где θ и ρ – функции из (3.9).

Из (3.6), (3.8) следует, что продолжительность одного цикла движения вблизи сепаратрисы равна $2\pi a^{-1}|h|^{-1/3}$. Поэтому

$$\sigma_1 = \sigma_0 + 2\pi a^{-1}|h|^{-1/3} + \varepsilon g(\sigma_0, h_0) \tag{6.5}$$

Последнее слагаемое в (6.5) может быть получено путем интегрирования в бесконечных пределах правой части второго уравнения из (6.2), аналогично тому, как это сделано при получении функции $G(\sigma_0)$ из (6.4). Но проще его получить из условия каноничности отображения σ_0, $h_0 \to \sigma_1$, h_1, задаваемого равенствами (6.4), (6.5). Действительно, приравняв нулю члены первой степени по ε в правой части условия каноничности

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_0}\frac{\partial h_1}{\partial h_0} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial h_0}\frac{\partial h_1}{\partial\sigma_0} = 1$$

сразу получаем, что

$$g = 2\pi a^{-1} G(\sigma_0) d|h_0|^{-1/3} / dh_0$$

Пренебрегая членами порядка ε^2, равенство (6.5) теперь можно записать в виде

$$\sigma_1 = \sigma_0 + 2\pi a^{-1}|h_1|^{-1/3} \tag{6.6}$$

Если еще сделать замену переменных $\sigma = -2\alpha/(3\lambda)$, то сепаратрисное отображение запишется в виде

$$h_1 = h_0 + \varepsilon J(\alpha_0), \ \ \alpha_1 = \alpha_0 - 3\pi a^{-1}|h_1|^{-1/3} \tag{6.7}$$

где J – интеграл (5.1), величины λ и a задаются равенствами (2.11) и (3.6).

Учитывая, что при $\lambda \gg 1$ для интеграла $J(\alpha)$ справедливо представление (5.5) и делая замену переменных $\beta = q\alpha + \delta_1$, получаем окончательно такое приближенное представление сепаратрисного отображения при $0 < \varepsilon \ll 1$:

$$h_1 = h_0 + \varepsilon\chi\lambda^p e^{-q\lambda}\sin\beta_0, \beta_1 = \beta_0 - 3\pi q a^{-1}\lambda|h_1|^{-1/3} \tag{6.8}$$

Значения β, отличающиеся на величину кратную 2π, считаем одинаковыми.

Рассмотрим неподвижные точки отображения (6.8). В неподвижных точках величина h принимает значения

$$h = h_* = \pm(3q\lambda/(2an))^3 \ \ (n = 1, 2, 3\ldots) \tag{6.9}$$

а β равняется $\beta^{(1)} = 0$ или $\beta^{(2)} = \pi$. Верхний знак в (6.9) соответствует вращениям, а нижний колебаниям.

Анализ показывает, что неподвижные точки h_*, $\beta^{(i)}$ устойчивы в линейном приближении, если выполняется неравенство

$$\left|1 - \varepsilon(-1)^i \frac{\pi\chi q}{2ah_*|h_*|^{1/3}}\lambda^{p+1}e^{-q\lambda}\right| < 1 \ \ (i = 1, 2)$$

При обратном знаке в этом неравенстве имеет место неустойчивость. В частности, если величина $|h_*|$ достаточно мала:

$$|h_*| < \left(\frac{\pi|\chi|q}{4a}\right)^{3/4} \varepsilon^{3/4}\lambda^{3(p+1)/4}e^{-3q\lambda/4} \tag{6.10}$$

то неустойчивы все неподвижные точки сепаратрисного отображения.

В возмущенной задаче при любых малых, но отличных от нуля значениях ε, возникают стохастические движения. В достаточной близости к сепаратрисе образуется стохастический слой [20]. Оценим его ширину, следуя методу Чирикова [15–17]. Для этого рассмотрим линеаризованное сепаратрисное отображение (6.8) в окрестности значений h_*, отвечающих его неподвижным точкам. Положив

$$h = h_* + \frac{ah_*|h_*|^{1/3}}{\pi q\lambda}P$$

и произведя линеаризацию (6.8) по P, получим отображение

$$P_1 = P_0 + K\sin\beta_0, \quad \beta_1 = \beta_0 + P_1 \tag{6.11}$$

где K – параметр стохастичности, определяемый по формуле

$$K = \varepsilon\frac{\pi\chi q}{ah_*|h_*|^{1/3}}\lambda^{p+1}e^{-q\lambda} \tag{6.12}$$

В теории стохастических движений отображение (6.11) называется стандартным [16].

Оценка ширины стохастического слоя может быть получена [15–17] из неравенства $|K| > 1$. Это неравенство при учете (6.12) можно записать в виде (6.10) при формальной замене $4a$ на a.

Такая приближенная оценка полуширины стохастического слоя может быть уточнена [16] на пути тщательного изучения свойств стандартного отображения (6.11), но при малых ε порядок величины полуширины слоя остается равным $\varepsilon^{-b}\exp(-c_2\varepsilon^{-2})$ ($b = 3(2p + 1)/4$, $c_2 = |c|q\kappa^{-2}/6$) и совпадает с порядком правой части упомянутого неравенства.

В заключение отметим, что, несмотря на неустойчивость положения равновесия $x = y = 0$ исходной системы с гамильтонианом (1.1), ее траектории, начинающиеся достаточно близко к началу координат, во все время движения остаются в ограниченной окрестности точки $x = y = 0$. Проведенное выше исследование показало, что для таких траекторий ρ не превосходит величину, близкую к единице. Поэтому в плоскости x, y траектория $x(t)$, $y(t)$ всегда остается внутри окружности радиуса $2^{1/2}\kappa|c|^{-1}(1+\psi_1(x(0),y(0))+\psi_2(\varepsilon))$, где $\psi_1 \to 0$ при $x^2(0) + y^2(0) \to 0$, а $\psi_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Автор благодарит А.И. Нейштадта за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257) и Международного научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
2. *Маркеев А.П., Щербина Г.А.* О движениях спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 3–10.
3. *Маркеев А.П.* Резонансы и асимптотические траектории в системах Гамильтона // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 207–212.

4. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
5. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
7. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
8. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
9. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
10. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
11. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
12. *Пуанкаре А.* О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 357–444.
13. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
15. *Чириков Б.В.* Нелинейный резонанс. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977. 81 с.
16. *Чириков Б.В.* Взаимодействие нелинейных резонансов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1978. 79 с.
17. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Reports. 1979. V. 52. № 5. P. 265–379.
18. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
19. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
20. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физ. наук. 1971. Т. 105. Вып. 1. С. 3–39.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1993