УДК 531.36

© 1994 г. В.В. Козлов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Рассматривается задача о существовании и аналитических свойствах асимптотических решений уравнений динамики, стремящихся к положениям равновесий при $t \to -\infty$. В случае, когда равновесие – невырожденная критическая точка потенциальной энергии, эта задача решена Ляпуновым [1]. Ниже рассматривается ситуация, когда отсутствие минимума потенциальной энергии нельзя определить по квадратичной форме разложения потенциальной энергии в ряд Тейлора. Показано, что асимптотические решения можно найти в виде ряда по обратным степеням времени, содержащим логарифмы. Если эти ряды расходятся, то они являются асимптотическими разложениями для рассматриваемых решений. Рассмотрена задача о влиянии гироскопических сил на существование асимптотических движений в системах с вырожденной потенциальной энергией. Получен аналог теоремы Кельвина о невозможности стабилизации равновесия посредством гироскопических и диссипативных сил.

1. Постановка задачи. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – обобщенные координаты,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j$$

– кинетическая энергия системы (при всех значениях x она положительно определена по скорости $\dot{x}$),

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j \geqslant 0 \tag{1.1}$$

– диссипативная функция Релея, $V(x)$ – потенциальная энергия. Функции T, Φ, V считаются бесконечно дифференцируемыми.

Движения $t \to x(t)$ рассматриваемой механической системы с диссипацией определяются как решения дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \tag{1.2}$$

Предположим, что $dV(0) = 0$. Тогда $x = 0$ – положение равновесия. Без ущерба для общности можно считать, что $V(0) = 0$.

Если потенциальная энергия V не имеет в точке $x = 0$ локального минимума, то при некоторых дополнительных предположениях общего характера равновесие $x = 0$ будет неустойчивым (см., например, [2]). Более того, неустойчивость равновесия часто можно вывести из существования асимптотических решений уравнений (1.2): $x(t) \to 0$, когда $t \to -\infty$. Цель работы – исследовать условия существования таких движений и их аналитические свойства (например, асимптотические представления решений при $t \to -\infty$).

Пусть

$$V = V_m + V_{m+1} + \ldots \tag{1.3}$$

– ряд Маклорена потенциальной энергии V (не обязательно сходящийся). Здесь V_s означает однородную форму от x степени s. Так как $V(0) = 0$ и $dV(0) = 0$, то $m \geqslant 2$. При $m = 2$ вопрос об асимптотических решениях и их аналитической структуре решается с помощью первого метода Ляпунова [1]: если V_2 не имеет минимума в точке $x = 0$, то уравнения (1.2) имеют решение

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)e^{\lambda kt}, \quad \lambda = \text{const} > 0 \tag{1.4}$$

которое стремится к нулю при $t \to -\infty$. В (1.4) $a_k(\cdot)$ – полиномиальные вектор-функции времени. В аналитическом случае ряды Ляпунова (1.4) сходятся. Если функции T, Φ, V лишь бесконечно дифференцируемы по x в окрестности точки $x = 0$, то ряды (1.4), как правило, расходятся. Однако по теореме А.Н. Кузнецова [3], каждому ряду (1.4), формально удовлетворяющему уравнениям движения (1.2), отвечает решение $x(t)$, такое, что 1) $x(t) \to 0$ при $t \to -\infty$, 2) ряд (1.4) является асимптотическим рядом для решения $x(\cdot)$ при $t \to -\infty$.

Будем рассматривать в основном случай, когда в разложении (1.3) $m \geqslant 3$.

2. Асимптотические движения. Пусть $u = (u_1, ..., u_n)$ – n-мерный вектор. Положим

$$\|u\|_* = \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(0)u_i u_j\right)^{1/2}$$

Если диссипация полная, то $\|\cdot\|_*$ – норма в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 1. Предположим, что функция Релея (1.1) положительно определена и форма V_m ($m \geqslant 3$) не имеет в точке $x = 0$ минимума. Тогда уравнения (1.2) допускают асимптотическое (при $t \to -\infty$) решение со следующим асимптотическим рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(-t)^{k\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{m-2} \tag{2.1}$$

где a_k, $k \geqslant 2$ – полиномиальные вектор-функции от $\ln(-t)$; $a_1 = \lambda e_*$, $\lambda = \text{const} > 0$, e_* – точка эллипсоида $\|x\|_* = 1$, в которой ограничение формы V_m достигает минимума.

Следствие 1. В предположениях теоремы 1 уравнения (1.2) имеют асимптотическое решение $x(\cdot)$ такое, что

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|_*} = e_* \tag{2.2}$$

Следствие 2. Если диссипация полная и первая нетривиальная форма ряда Маклорена потенциальной энергии не имеет минимума, то равновесие неустойчиво.

Это заключение о неустойчивости формально не вытекает из известных результатов.

Укажем схему доказательства теоремы 1. Сначала рассмотрим "упрощенное" уравнение

$$Bx^{\cdot} = -\partial V_m/\partial x, \quad B = \|b_{ij}(0)\| \tag{2.3}$$

В предположениях теоремы оно имеет решение вида

$$a_1/(-t)^{\mu} \tag{2.4}$$

где $a_1 = \lambda e_*$, λ – некоторая положительная постоянная. При подстановке решения (2.4) в левую и правую часть уравнения (2.3) получим функцию времени, убывающую при $t \to -\infty$ как $(-t)^{-\mu-1}$. Если подставить (2.4) в другие составляющие исходного уравнения движения (1.2), отличные от $Bx^{\cdot}$ и $\partial V_m/\partial x$, то получим функцию t, убывающую быстрее $(-t)^{-\mu-1}$. Для отыскания других членов ряда (2.1) получается бесконечная цепочка уравнений, которую можно решить последовательно методом, изложенным в [4]. Остается применить результат [3], согласно которому уравнения (1.2) допускают решение с асимптотическим рядом (2.1).

Замечание. При доказательстве теоремы 1 нигде не используется положительная определенность кинетической энергии T. Теорема справедлива и в том случае, когда $T = 0$. Тогда уравнение (1.2) перейдет в градиентную систему, асимптотические решения которой исследовались в [4].

Положив в (1.2) $\Phi = 0$, получим обратимую систему с теми же положениями равновесия. Если форма V_m, $m \geqslant 3$ не имеет минимума в точке $x = 0$, то, как установлено в [5, 6], уравнения движения имеют формальное решение в виде ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{t^{2s\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{m-2} \tag{2.5}$$

где b_s, $s \geqslant 2$ – полиномиальные вектор-функции от $\ln(-t)$; $b_1 = \kappa e$, $\kappa = \text{const} > 0$, e – точка эллипсоида $\|x\| = 1$, где ограничение формы V_m достигает минимума. Здесь $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbf{R}^n$, задаваемая кинетической энергией при $x = 0$.

Ряд (2.5) является асимптотическим разложением для некоторого решения $t \to x(t)$ уравнений движения, такого, что 1) $x(t) \to 0$ при $t \to -\infty$, 2) $x(t)/\|x(t)\| \to e$ при $t \to -\infty$.

Векторы e и e_* из (2.2) определяют направления "наискорейшего спуска" для потенциальной энергии относительно метрик $T|_{x=0}$ и $\Phi|_{x=0}$. Они, разумеется, не совпадают.

Устремим теперь диссипацию к нулю. Спрашивается, перейдет ли при этом ряд (2.1) в (2.5)? Ответ оказывается отрицательным. Это показывает пример уравнения

$$x^{\cdot\cdot} - \varepsilon x^{\cdot} = x^2 \tag{2.6}$$

$$(T = x^{\cdot 2}/2,\ V = -x^3/3,\ \Phi = \varepsilon x^{\cdot 2}/2;\ \varepsilon = \text{const} > 0)$$

В уравнении (2.6) сделана замена времени $t \to -t$ с целью упрощения записи ряда (2.1). В связи с этим рассматривается задача о решениях (2.6), которые стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2.6) имеет асимптотическое решение

$$x(t) = 6/t^2 \tag{2.7}$$

При $\varepsilon > 0$ ищем асимптотическое решение в виде ряда

$$a/t + b/t^2 + c/t^3 + \ldots \tag{2.8}$$

где $a = \text{const}$, $b, c, \ldots$ – полиномы от $z = \ln t$. Обозначая штрихом дифференцирование по z, получим

$$\left(\frac{b}{t^2}\right)^{\cdot} = \frac{b' - 2b}{t^3}, \quad \left(\frac{c}{t^3}\right)^{\cdot} = \frac{c' - 3c}{t^4}, \ldots; \quad \left(\frac{b}{t^2}\right)^{\cdot\cdot} = \frac{b'' - 5b' + 6b}{t^4}, \ldots \tag{2.9}$$

Подставляя ряд (2.8) в уравнение (2.6), используя формулы (2.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых обратных степенях времени, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного определения $a, b, c, \ldots$:

$$\varepsilon a = a^2, \quad 2a - \varepsilon b' + 2b\varepsilon = 2ab \tag{2.10}$$

$$b'' - 5b' + 6b - \varepsilon c' + 3c\varepsilon = b^2 + 2ac, \ldots$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получим цепочку уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты ряда (2.7).

Решим уравнения (2.10), полагая $\varepsilon > 0$. Так как $a \neq 0$ (теорема 1), то из первого уравнения (2.10) получаем $a = \varepsilon$. Второе уравнение дает соотношение $b' = 2$. Откуда (с точностью до аддитивной постоянной) $b = 2\ln t$. Третье уравнение (2.10) дает

$$\varepsilon(c' - c) = -b^2 + 6b - 10$$

Следовательно, c – многочлен второй степени по z, старший коэффициент которого как функция ε имеет особенность типа полюса. Итак, при $\varepsilon \to 0$ коэффициенты ряда (2.8) вообще не имеют конечных пределов.

3. Влияние дополнительных гироскопических сил. Добавим в правую часть уравнения (1.2) дополнительное слагаемое – $Cx^{\cdot}$, где $C(x)$ – кососимметрическая $(n \times n)$-матрица. Это слагаемое обычно интерпретируют как гироскопические силы, если 2-форма

$$\sum c_{ij}(x)dx_i \wedge dx_j, \quad \|c_{ij}\| = C$$

замкнута. Впрочем, это условие в дальнейшем не используется.

Положим $D = B(0) + C(0)$. Так как функция Релея всегда неотрицательна, то $|B(0)| \geqslant 0$. В [7] установлена

Лемма 1. Если B – матрица неотрицательной квадратичной формы, то $|B + C| \geqslant 0$ для любой кососимметричной матрицы C.

Следствие. Если матрица D невырождена, то $|D| > 0$.

Рассмотрим "упрощенное" уравнение

$$Dx^{\cdot} = -\partial V_m/\partial x, \quad m \geqslant 3$$

Будем искать решение вида

$$x(t) = a/(-t)^{\mu}, \quad a \in \mathbf{R}^n\setminus\{0\}$$

Вектор a удовлетворяет алгебраическому соотношению

$$\mu Da = \frac{\partial V_m}{\partial x}(a) \tag{3.1}$$

Это уравнение, конечно, не всегда имеет нетривиальное вещественное решение.

Теорема 2. Предположим, что уравнение (3.1) с невырожденной матрицей D имеет решение $a \neq 0$. Тогда уравнения движения

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} - Cx^{\cdot} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\cdot}} \tag{3.2}$$

допускают асимптотическое решение вида (2.1), в котором $a_1 = a$.

Следствие 1. В предположениях теоремы 2 равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Теорема 2 доказывается тем же способом, что и теорема 1.

Следствие 2. Пусть $x = 0$ – изолированная критическая точка функции V_m и индекс градиентного векторного поля $\partial V_m/\partial x$ в точке $x = 0$ не равен $(-1)^n$. Тогда существует асимптотическое решение уравнений (3.2), "выходящее" из равновесия $x = 0$ и, в частности, это равновесие неустойчиво.

Напомним, что индекс изолированной особой точки $x = 0$ векторного поля $\upsilon(x)$ определяется как степень отображения

$$x \in S_\varepsilon^{n-1} \to \upsilon(x)/|\upsilon(x)| \in S^{n-1} \tag{3.3}$$

где S_ε^{n-1} – сфера малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x = 0$. Определение степени отображения и основные его свойства можно найти, например, в [8]. В частности, гомотопные отображения имеют одинаковую степень. Полезна следующая формула:

$$\operatorname{ind}_{x=0}(Ax) = \operatorname{sgn}|A| \tag{3.4}$$

Знаменитую теорему Кельвина о невозможности стабилизации невырожденного равновесия с нечетной степенью неустойчивости s с помощью гироскопических и диссипативных сил можно переформулировать в терминах индекса градиентного поля. Действительно, пусть $m = 2$. Предположение о невырожденности критической точки $x = 0$ эквивалентно условию изолированности нуля градиентного поля $\upsilon = \partial V_2/\partial x$. В соответствии с (3.4)

$$\operatorname{ind}_{x=0}\upsilon = \operatorname{sgn}|\partial^2 V_2/\partial x^2| = (-1)^s$$

Следовательно, если $\operatorname{ind}_{x=0}\upsilon \neq 1$, то стабилизация невозможна. Следствие 2 указывает, что при $m \geqslant 3$ условие обобщенной теоремы Кельвина зависит от четности числа степеней свободы.

Для четных значений n и $\Phi = 0$ следствие 2 установлено ранее в [9]. Доказательство неустойчивости в общем случае проводится методом [9] с использованием леммы 1.

Сначала заметим, что в уравнении (3.1) параметр μ можно считать произвольным положительным числом. Для этого достаточно сделать подходящую линейную подстановку $a \to \lambda a$, $\lambda > 0$. Рассмотрим семейство векторных полей

$$\upsilon_\alpha = (1-\alpha)\upsilon - \alpha Dx, \quad \upsilon = \partial V_m/\partial x, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Если уравнение (3.1) не имеет ненулевых решений при $\mu > 0$, то для всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ поле υ_α обладает изолированным нулем в точке $x = 0$. Так как поля $\upsilon_0 = \upsilon$ и $\upsilon_1 = -Dx$ гомотопны, то их индексы совпадают. Следовательно,

$$\operatorname{ind}_{x=0}\upsilon = \operatorname{ind}_{x=0}(-Dx) = (-1)^n$$

поскольку $|D| > 0$ (следствие из леммы 1). Утверждение доказано.

Следствие 3. Пусть m нечетно и $x = 0$ – изолированная критическая точка функции V_m. Тогда $x = 0$ – неустойчивое равновесие системы (3.2).

Действительно, в этом случае индекс градиентного поля $\partial V_m/\partial x$ в точке $x = 0$ будет четным, поскольку ввиду четности его компонент каждая точка единичной сферы S^{n-1} в (3.3) имеет четное число прообразов.

Отметим, что условие изолированности критической точки функции V_m существенно для разрешимости алгебраической системы (3.1). Вот простой контрпример: $V_3 = x_1x_2x_3$, $D = \operatorname{diag}(-1, 1, -1)$. Отметим, что $|D| > 0$.

Неустойчивость равновесия обратимой системы при нечетном m впервые доказана в [5]. Невозможность стабилизации гироскопическими силами с невырожденной матрицей C установлена в [9]. По-видимому, заключение следствия 3 справедливо без предположения об изолированности критической точки $x = 0$. Задача об устойчивости равновесия в случае сильно вырожденных гироскопических сил, когда $C = 0$, рассмотрена в [10].

4. Некоторые обобщения. Рассмотрим случай, когда ряд Маклорена потенциальной энергии начинается с квадратичных членов:

$$V = V_2 + V_m + V_{m+1} + \ldots, \quad m \geqslant 3 \tag{4.1}$$

Если форма V_2 положительно определена, то равновесие $x = 0$ будет устойчивым и асимптотических движений нет. Если же V_2 не имеет в точке $x = 0$ минимума, то существование асимптотических движений вытекает из классических результатов Ляпунова [1]. Поэтому рассмотрим случай, когда $V_2 \geqslant 0$ и множество $\pi = \{x\colon V_2(x) = 0\}$ не сводится к одной точке $x = 0$. Такая ситуация часто встречается в приложениях, когда изучаются случаи вырождения. Из линейной алгебры известно, что π – плоскость. Пусть W_m – ограничение формы V_m на плоскость π.

Теорема 3. Предположим, что форма W_m не имеет в точке $x = 0 \in \pi$ минимума и диссипация полная. Тогда уравнения движения (1.2) допускают асимптотическое решение с асимптотическим рядом вида (2.1).

Доказательство проводится методом, изложенным в [4]. Было бы интересным изучить влияние гироскопических сил на существование асимптотических движений в системах с потенциалом (4.1). Еще одна интересная задача – исследование асимптотических рядов вида (2.1) в системах с частичной диссипацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16244).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
2. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
3. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 4. С. 63–74.
4. *Козлов В.В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928–937.
5. *Козлов В.В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573–577.
6. *Козлов В.В., Паламодов В.П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285–289.
7. *Козлов В.В.* О степени неустойчивости // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 14–19.
8. *Шварц Дж.* Дифференциальная геометрия и топология. М.: Мир, 1970. 224 с.
9. *Болотин С.В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1993. № 6. С. 66–75.
10. *Фурта С.Д.* Об асимптотических решениях уравнений движения механических систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 938–944.

Москва

Поступила в редакцию
23.XI.1993