УДК 531.01

© 1994 г. Л.И. Седов

СОПУТСТВУЮЩИЕ И ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Показана возможность построения нелинейных уравнений общей теории относительности (ОТО) с введением понятия потенциальной энергии. Рассмотрены решения обобщенных уравнений для движений индивидуальных частиц с ненулевыми четырехмерными абсолютными ускорениями относительно семейства инерциальных геодезических, удовлетворяющих уравнениям поля на их орбитах. Без явного учета закона всемирного тяготения уравнения ОТО и уравнения поля не представляют собой замкнутые системы уравнений.

Закон всемирного тяготения порождает соответствующие дополнительные ограничения на гравитационное поле и на траектории свободных частиц. Описание релятивистских гравитационных полей и свободного движения массовых частиц основано на использовании как скаляра термодинамической энергии mc^2, так и скаляра потенциальной энергии частиц mU, так же как и в механике Ньютона или в пространстве Минковского в специальной теории относительности (СТО). В сопутствующей системе координат скаляр U удовлетворяет соответствующему трехмерному уравнению Пуассона.

В свете предлагаемой теории многие известные решения ОТО требуют физического переосмысления.

Построение математических моделей с применением дифференциальных уравнений связано, как правило, с принятием различного рода упрощенных "простых" аксиом и законов, апробированных различными способами для бесконечно малых объемов в рамках пространства и времени. Последние определяются с помощью соответствующих канонических координатных систем в специальных идеальных геометрических кинематических объектах, позволяющих характеризовать изучаемые явления и вводить различные характерные понятия математической природы. Таким образом, вопросы описания и предсказания требуемых ответов сводятся к постановке и решению математических задач и в результате достигается понимание в нужных приближениях сущностей рассматриваемых объектов, их взаимодействий и описания существа различных событий.

Теоретически математические методы исследований для получаемых объяснений и выводов расчетными путями во многих вопросах связаны с приемлемыми координатными системами отсчета как средствами исследований. Эти системы отсчета могут быть различными, однако подразумевается, что вскрытие основных причин их следствий и характерные свойства изучаемых явлений должны обладать известной инвариантностью, связанной с постановками и средствами получаемых решений.

Использование тензорных методов дает возможность находить результаты, не зависимые от частных видов принимаемых систем координат.

При определениях и оперировании с пространством времени, материальными телами и полями необходимо действовать с континуальными многообразиями "точек", которые индивидуализируются своими свойствами массами, зарядами, спинами и вообще многими другими их характерными особенностями, проявляющимися в их взаимодействии.

Индивидуальность объектов постулируется путем фиксирования понятий об их свойствах и взаимодействиях. В частности, это относится к представлениям о пространствах и времени как о многообразиях индивидуальных с геометрически определенными континуумами точек носителей с погруженными в них различными объектами со своими индивидуальными точками. При этом можно подразумевать наличие взаимодействий подобных индивидуумов, которые могут совпадать или различаться с индивидуумами употребляемых пространств и времени.

В распространенных физических приложениях, однако, применяются четырехмерные физические определенные пространства. В них особое значение имеют системы отсчета для пространства – времени, в которых координаты арифметизации индивидуальных точек производятся названием трех постоянных значений чисел ξ^1, ξ^2, ξ^3 и собственным временем τ. В фиксированном пространстве можно рассматривать разные объекты, наряду с координатами $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ можно вводить еще аналогичным путем объекты с координатами $\eta^i(\eta^\alpha, \tau')$, $(\alpha = 1, 2, 3)$. Таким образом, можно, говорить о сопутствующих системах координат для наблюдателя $\eta^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3, \tau')$ и для изучаемых субстанций, определяемых координатами ξ^α, τ, и говорить о движении в одном и том же пространстве, относительно наблюдателя определяемом функциями $\eta^i(\xi^k)$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$.

В разных физических теориях численные характеристики "точек объектов", называемых постоянными значениями $\xi^\alpha = \mathrm{const}(\alpha)$, можно заменять соответствующими объектами с помощью матриц чисел и другими обобщенными понятиями. В частности, ξ^α могут отвечать такие огромные конечные тела, как астероиды, планеты, звезды и даже целые галактики. Нередко подобные объекты моделируются материальными точками с названными значениями $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau$.

В континуальном множестве точек можно вводить различным образом системы координат. Имея в виду четырехмерные псевдоримановы пространства с метриками, имеющими сигнатуру $- - - +$ семейства L глобальных временных координат τ, отвечающих в метрике значениям знака +, можно принять и отвечающим координатным линиям L, выбрав их в начальном этапе для переменной τ при $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ в построении теории довольно произвольными, но все же не замкнутыми и из условий однозначности – не пересекающимися. В окончательной фазе исследований потребуется дать условия для определения возможных семейств этих линий для римановых пространств. Очевидно, что в постановке в конкретных релятивистских теориях необходимо выставлять дополнительные условия, которые должны выделять системы семейств координатных линий L влияния некоторых характерных величин. Последние могут возникать и, вообще говоря, фигурировать в аксиоматических модельных соотношениях, выделяемых за счет особенностей употребляемых локальных инерциальных тетрадных систем отсчета.

Обратим внимание, что в постановках теории гравитации, посвященной свободному движению без столкновений материальных частиц, рассматриваются только взаимодействия между собой частиц посредством только массовых сил при отсутствии поверхностных сил, которые, например, характерны для теории упругости и пластичности, в теории вязких жидкостей и во многих других (модельных) материальных и полевых сплошных средах.

Не ограничивая общности, метрику для индивидуальных частиц, определенных постоянными значениями ξ^1, ξ^2, ξ^3 и переменной τ, можно преобразовать глобально [1] к каноническому виду:

$$ds^2 = \overset{0}{g}_{ij}(z^1, z^2, z^3, z^4)dz^i dz^j, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau)d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma, \tau)d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{1}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и по одинаковым индексам подразумевается суммирование. Здесь ds – инвариантное расстояние между соответственно взятыми любыми бесконечно близкими точками в пространстве.

После конкретного преобразования имеем $z^k = z^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$, а c – постоянная скалярная характеристика псевдориманового пространства.

В этом виде метрики семейство линий L представляет собой координатные линии переменной τ, на которых $ds^2 = c^2 d\tau^2$ для индивидуальных точек, названных значениями $\xi^\alpha = \mathrm{const}(\alpha)$.

В сопутствующих координатах Лагранжа для фиксированного риманова пространства с метрикой в форме (1) все механические характеристики состояния индивидуумов можно рассматривать как частицы, вмороженные в пространство. Состояния сплошных сред определяется функциями компонент метрического тензора $g_{44} = c^2 = \mathrm{const}$, $g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau)$ и $g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau)$ и выбором локальных инерциальных тетрад S. Отметим сразу, что для фиксированных пространств Римана вычисление кинематических механических характеристик для векторов абсолютных скоростей и ускорений, и компонент тензоров деформации, и скоростей деформации связано с введением в каждой точке пространства множества локально возможных определенных инерциальных тетрад S.

На основании вида метрики и семейства L вводятся понятия абсолютной четырехмерной скорости $\mathbf{u}(\xi^i)$ и абсолютного ускорения $\mathbf{a}(\xi^i)$ формулами

$$\mathbf{u} = d\mathbf{s}/d\tau, \qquad \mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau \tag{2}$$

для которых в системе координат ξ^α, τ для компонент векторов четырехмерной скорости $\mathbf{u}$ верны формулы $u^1 = u^2 = u^2 = 0$ и $u^4 = c$, а ковариантные компоненты этих векторов в метрике (1) можно определить равенствами $\mathbf{u}_\alpha = cg_{\alpha k}\mathbf{u}^k = cg_{\alpha 4}$ и $\mathbf{u}_4 = c$ и поэтому $\mathbf{u}^k\mathbf{u}_k = c^2$.

На основании этих формул абсолютное ускорение индивидуальных материальных точек как ускорение относительно локальных инерциальных тетрад представится формулами

$$a = a_\alpha э^\alpha = \left(\frac{du_\alpha}{d\tau} + u_s\Gamma^s_{\alpha 4}\right)э^\alpha = c\frac{\partial g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau)}{\partial\tau}э^\alpha, \quad \alpha_4 = 0 \tag{3}$$

Хорошо известно из практики построения геометрических псевдоримановых моделей пространства и времени, что подобно моделям различных сред и полей, для псевдоримановых пространств можно и нужно вводить различные модели четырехмерных пространств. В связи с этим огромный успех достигнут в приложениях и дальнейших уточнениях понятий пространства и времени.

Модель ньютоновской механики, в которой геометрически вводимые координаты образуют трехмерную часть пространства Евклида, а четвертой переменной времени служит измеряемая синхронизированными часами τ, абсолютно независима от каких-либо объектов и событий.

Дальнейшее усложнение понятия пространства как физического объекта связано с существенным обобщением путем введения четырехмерной метрики (1) псевдоримановых пространств, для которых, по определению, в бесконечно малом элементарном объеме после соответствующего выбора системы координат x^α, τ, зависящей от рассматриваемой точки M, можно привести метрику с точностью до малых высшего порядка к виду

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dx^{12} - dx^{22} - dx^{32} \tag{4}$$

Для соответствующего элемента координатной тетрады S с относительными приращениями dx^1, dx^2, dx^2, $dx^4 = d\tau$, для которых по определению символы Кристоффеля равны нулю ($\Gamma^k_{mn} = 0$) и тетрада S для переменных x^α, τ в точке M образует локальную инерциальную систему отсчета.

Как известно, для любой кривой линии L^* в римановых пространствах можно преобразованием координат к переменным, зависящим от вида линии L^*, ввести переменные x^α, τ так, что не только в изолированной точке пространства M, но и во всех точках линии L^* метрика римановых пространств в бесконечно малой окрестности к линии L^* может быть представлена формулой вида (4).

Такая система координат, привязанная к линии L^*, называется системой отсчета Ферми и является на L^* инерциальной. В общем случае для точек конечных объемов или точек на конечных площадях трех- и двумерных поверхностей преобразованием координат привести метрику к виду (4) невозможно. Если в общем случае метрику пространства все же можно привести к виду (4) сразу во всех точках риманова пространства, то такое пространство является частным специальным и называется пространством Минковского, которое подобно пространству по Ньютону с соответствующей трехмерной декартовой системой координат.

В общем случае компоненты метрических тензоров g_{ij} для тензоров псевдоримановых пространств зависят от абсолютного времени τ, поэтому, как показано ниже, невозможно ввести глобальные инерциальные системы. В частности, для метрик, отвечающих пространствам Вейля, отличных от пространства Минковского, для которых тензор Риччи $R_{ij} = 0$ причем для компонент тензора Римана $R_{ijkl} = W_{ijkl}$, равных компонентам тензора Вейля, глобальная инерциальная система координат тоже не существует.

Базисные тетрады S в различных точках римановых пространств для соответствующих локальных метрик (4) всегда можно ввести с учетом преобразований Лоренца универсальным образом с помощью локальных систем инерциальной системы декартовых координат x^α, τ в трехмерных евклидовых пространствах ньютоновской механики или в пространствах Минковского при различных метрических глобальных формах (1) в переменных x^α, τ, отвечающих метрикам топологически эквивалентных римановых пространств. Тетрады S голономны в пространствах Евклида и Минковского и неголономны в пространствах Римана общего вида.

Так как в римановых пространствах вообще не существует глобальных инерциальных систем координат, то множеству инерциальных локальных тетрад S в декартовых координатах в пространствах Минковского и в системах соответствующих координат (x^α, τ) в римановых пространствах в переменных x^α, τ будет отвечать множество неголономных инерциальных тетрад как системы отсчета. Такую систему отсчета можно рассматривать как непосредственное и естественное обобщение глобальной инерциальной системы отсчета в пространствах Минковского. Соответствующие тетрады с x^α, τ представляют собой выбранные инерциальные системы отсчета, которые применяются для введения и локального определения характеристических величин при формулировке фундаментальных постулатов – систем аксиом в малых объектах. Введение модельных инвариантных соотношений в касательных пространствах Минковского может служить основанием для глобального определения такого же рода соотношений в римановых пространствах в согласии с их свойствами, определенных в малом, что составляет сущность псевдоримановых пространств.

С другой стороны, для любой фиксированной системы координатных линий семейств L для переменной τ результаты определения векторов четырехмерных скоростей и абсолютных ускорений независимо от неголономности тетрад определяются инвариантно относительно различных локальных инерциальных тетрад S. Поэтому для их вычисления можно применять любые локальные инерциальные тетрады S, независимо от их неголономности. Однако, при определении, например, компонент тензоров скоростей деформации и ряда других характерных величин в точках системы линий L результаты будут зависеть от выбора системы неголономных локальных тетрад S.

В механике сплошных сред неголономные инерциальные системы отсчета S в римановом пространстве можно выделять с помощью декартовых систем тетрад S в фиксированных касательных пространствах Минковского во всех точках временных координатных линий L как сопутствующих систем отсчета в римановых пространствах.

Кроме этого, очевидно, что если псевдориманово пространство фиксировано, то компоненты метрики в каноническом виде (1) в сопутствующей системе координат можно менять после задания семейства координатных линий для переменной τ и за счет преобразований

$$\xi^\alpha = \varphi^\alpha(\eta^\beta), \quad \tau = \tau' + \psi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \tag{5}$$

сохраняющих свой вид формы метрики (1).

Очевидно, на заданных линиях L абсолютные четырехмерные скорости и ускорения не зависят от вида инерциальных тетрад системы отсчета. Однако такие характеристики отдельных точек как тензоры деформации и скоростей деформации для малых трехмерных объемов dV_3, нормальных к линиям L, зависят от применяемой в каждой точке линий L системы отсчета локальных неголономных инерциальных тетрад S за счет их поступательного движения с постоянными трехмерными скоростями v_{rel} вдоль линий L. В произвольном фиксированном четырехмерном римановом пространстве в соответствующих координатах за счет выбора тетрад S и преобразований (5) можно ввести упрощенные варианты значений метрических тензоров, для которых трехмерные тензоры скоростей деформации равны нулю.

В самом деле, пусть $э_1$, $э_2$, $э_3$ и $э_4$ – базисные векторы, зависящие от времени τ, в рассматриваемых точках на координатных линиях τ сопутствующей системы координат, и пусть в точках на линиях L e_1, e_2, e_3, e_4 – постоянные базисные векторы (независимые от τ) для локальной инерциальной тетрады S, причем $э_4(\tau)$ и e_4 в рассматриваемых точках направлены вдоль соответствующей касательной к линии семейства L.

Если инерциальные тетрады S во всех точках пространства выбраны неголономным образом локально так, что $э_i = e_i$, то множество инерциальных тетрад можно рассматривать как систему отсчета. Вместе с этим можно написать

$$g_{\alpha\beta} = (э_\alpha э_\beta) = (e_\alpha e_\beta), \quad g_{\alpha 4} = (э_\alpha э_4) = (e_\alpha e_4) \tag{6}$$

Формулы (6) определяют собой одни и те же компоненты метрических тензоров, но с возможными разными системами отсчета, что может, однако, сказаться на их производных по глобальному времени τ.

Очевидно, что относительно описанной тетрадной системы отсчета с базисами e_α верны равенства $\partial g_{\alpha\beta}/\partial\tau = 0$ и, следовательно,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \tag{7}$$

Поэтому тензор скоростей деформации, определенный через $g_{\alpha\beta}$, равен нулю, что в теории свободных движений материальных точек, пылинок или даже конечных тел, абсолютно твердых в теории гравитации, для движений по L вполне приемлемо.

На основании равенств (2) и (3) производные $c\partial g_{\alpha 4}/\partial\tau$ определяют собой компоненты ускорения относительно тетрадной системы отсчета.

Предыдущие определения и термины имеют чисто кинематический характер в четырехмерных псевдоримановых пространствах.

Для разъяснения приложений этих теорий к ОТО напишем фундаментальные уравнения в несколько непривычном, но явном виде в системе CGS

$$R_{ij} - g_{ij}R/2 = 2{,}07 \times 10^{-48} T_{ij} \tag{8}$$

и, как следствие, получим равенства

$$\nabla_i T^i_j = 0$$

которые справедливы в любой системе координат и, в частности, для сопутствующих систем с метрикой в форме (1).

Уравнение (8) написано с вставленным значением коэффициента

$$k = 8\pi G/c^4 = 2{,}07 \times 10^{-48} \text{с}^2/(\text{г} \cdot \text{см}) \tag{9}$$

как гравитационной постоянной в ОТО, выраженной через скалярные характеристики пространства c и гравитационную постоянную по Ньютону G.

Компоненты T_{ij} отвечают "тензору энергии импульса", который нуждается в дополнительных постулатных обоснованиях для различных модельных сред и полей и который для чистой гравитации в ОТО при свободных движениях масс постулируется равенством $T_{ij} = \rho u_i u_j$. Отсюда

$$T_i^i = \rho u_i u^i = \rho c^2 \tag{10}$$

где ρ – плотность массы покоя частиц среды.

Очевидно, что при построении физических моделей (приближенных по существу всегда) необходимо обратить внимание на очень малое значение коэффициента k и сравнительно малую величину правой части, когда согласно (10) $|\bar{u}| = c$, плотность ρ имеет, может быть, даже довольно значительную величину внутри звезд (в действительности, с конечными значениями), для которых правая часть все же сохраняет приемлемое пренебрежимо малое численное значение.

Успехи приложений ОТО в астрономии связаны все же с обоснованными допущениями о том, что вместо реального моделирования тел с умеренной по величине плотностью ρ распределенных подвижных масс небесные тела рассматривают как особые материальные точки с колоссальными массами. В произведениях со сверхмалыми значениями коэффициента k эти массы могут дать для правой части уравнений (8) приемлемые виды особых точек, позволяющие действовать с усложненными римановыми пространствами, "содержащими особые точки". В практических задачах механики инвариантные величины $g_{ij}T^{ij} = T_i^i$ обычно имеют очень скромные значения, и поэтому правая часть в уравнении (8) может оказаться за пределами точности моделирования.

Таким образом, во многих проблемах появляется возможность отбросить во многих областях пространств правую часть в уравнении (2) как величину, находящуюся за пределами возможной или необходимой точности целесообразной теории. Тем не менее математически и физически можно рассматривать римановы пространства, для которых имеют место равенства $R_{ij} - g_{ij}R/2 = 0$, и отсюда следует, что тензор Риччи

$$R_{ij} = 0 \tag{11}$$

и может представлять интерес не только для чисто научных исследований, но и с практических точек зрения в теоретических приложениях физики.

В частности, уже давно физика зиждется и развивается на базе СТО с использованием пространства Минковского, которое является частным решением уравнений (11). (Автор располагает конструкцией построения обширного класса всех решений уравнений (11).)

Рассмотрим специально еще вопрос о возможности введения глобальных инерциальных систем отсчета в рамках римановых пространств в канонических метриках вида (1).

По определению, инерциальные системы в малых объемах характеризуются всеми своими свойствами декартовых координат в псевдоевклидовых пространствах, для которых координатные линии L – прямые или геодезические в римановом пространстве, причём непересекающиеся соседние линии в малом параллельны с точностью до малых выше первого порядка. Это означает, что с точностью до малых первого порядка нормальные расстояния между соседними фиксированными координатными линиями одинаковы.

Стоит еще упомянуть, что расходящиеся или сходящиеся системы прямых (геодезических) в малом не могут служить глобальными координатными линиями в инерциальных системах отсчета. Иначе говоря, если обозначить через e_i ($i = 1, 2, 3, 4$) координатные векторы базисов для инерциальных тетрад, то эти векторы приближенно постоянны вблизи рассматриваемой точки.

После обозначения через **u** и **a** скорости и ускорения вдоль всех координатных линий L в инерциальных системах в ОТО в локальных тетрадах

$$e_i u^i = dr/d\xi^i \approx \text{const}, \quad \mathbf{a} = 0$$

В четырехмерных римановых пространствах в локальных инерциальных тетрадах для векторов **u** и соответственно для базисов e_i, а также и e^i, в любых системах отсчета (координат) должны точно выполняться следующие соотношения:

$$\nabla_i u^k = 0 \text{ для любых } k;\ i = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

которые являются математическим определением инерциальных тетрад.

В уравнении (12) **u** – базисный вектор, отвечающий временной координате τ в сопутствующей метрике (1). Однако для инерциальных тетрад для каждого из векторов базиса $e^4 = \mathbf{u}$ по определению будет справедливо такое же уравнение (12).

Инвариантное уравнение (12) можно применять в любых системах координат.

Система базисов e_1, e_2, e_3, $e_4 = \mathbf{u}$ не обязательно ортогональна!

Вместе с этим уравнение (12) инвариантно относительно любых преобразований с постоянными коэффициентами l_p^q вида $u_p^* = l_p^i u^p$ и, в частности, при переходе от ковариантных векторов e_p к контравариантным e^p.

Уравнение (12) в любой и в том числе в сопутствующей системе координат можно переписать в форме

$$\frac{\partial \overset{*}{u}{}^k}{\partial \xi^i} + \overset{*}{u}{}^p\, \Gamma_{pi}^k = 0 \tag{13}$$

Из равенств (12) и (13) получим

$$\Gamma_{4i}^k = \frac{1}{2} g^{kq} \left(\frac{\partial g_{q4}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{iq}}{\partial \tau} - \frac{\partial g_{4i}}{\partial \xi^q} \right) = 0 \ \text{ и } \ g_{k3}\Gamma_{4s}^k = 0$$

и поэтому в глобальных сопутствующих инерциальных системах отсчета получится

$$\frac{\partial g_{q4}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{4i}}{\partial \xi^q} = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial g_{iq}}{\partial \tau} = 0, \quad i, q = 1, 2, 3, 4 \tag{14}$$

На основании (14) риманова метрика в сопутствующей системе приводится к синхронному виду

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + g_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}^\gamma) d\xi^\alpha d\xi^\beta = c^2 d\tau^2 - [\hat{g}_{11}(\eta^\gamma) d\eta^{1^2} + \hat{g}_{22}(\eta^\gamma) d\eta^{2^2} +$$
$$+ \hat{g}_{33}(\eta^\gamma) d\eta^{2^2}], \quad \gamma = 1, 2, 3 \tag{15}$$

Поэтому мировые линии L – параллельные геодезические и нормальные к трехмерной римановой поверхности Σ, которая перемещается вдоль линий L с поступательной постоянной четырехмерной скоростью **u**, одинаковой во всех точках линий L.

Если кроме инерциальности в римановом пространстве (случай пустых объемов) соответствующие компоненты тензора Риччи равны нулю ($R_{ij} = 0$), то трехмерное пространство Σ евклидово, а метрики (6) определяют пространство Минковского.

В общем случае компоненты метрических тензоров $g_{\nu j}$ – тензоров псевдоримановых пространств для произвольных сопутствующих семейств линии L могут существенным образом зависеть от абсолютного времени τ, поэтому глобальные инерциальные системы невозможно ввести. В частности, ниже будет показано, что для метрик пространства Вейля, отличных от пространства Минковского, в которых также $R_{ij} = 0$, глобальная инерциальная система координат вообще не существует. Поэтому условия (14) не могут выполняться глобально в конечных объемах.

Таким образом, в римановых пространствах в общих случаях невозможно присутствие конечных объемов V_4 с глобальной инерциальной системой координат.

В каждой точке пространства локально применяемые инерциальные тетрады для вычисления ускорения на рассматриваемой мировой линии как сопутствующей определены неоднозначно с точностью до преобразования Лоренца. Так как в тетрадах, связанных между собой преобразованиями Лоренца, в точках мировых линий L векторы абсолютных ускорений одинаковы, можно считать, что все тетрады в разных точках L и на разных L' одинаковы. В связи с этим можно во всех точках риманова пространства использовать локально одинаковую единственную фиксированную инерциальную тетраду.

Между разными топологически эквивалентными римановыми пространствами можно установить взаимно-однозначное соответствие точек, когда одинаковым значениям координат отвечают различные метрики. В частности, декартовы координаты и соответствующие инерциальные тетрады можно вводить с использованием пространств Минковского и соответствующих инерциальных тетрад, которые сохраняются и в псевдоримановых пространствах, но образуют в пространстве Римана неголономную систему отсчета.

Всякое конечное соотношение между компонентами тензоров, написанное в каждой тетраде, сохраняет свой тензорный вид в преобразованных компонентах после соответствующих преобразований координатных систем как в пространстве Минковского, так и в пространстве Римана.

Такое положение – основа для удобных определений соответствующих тетрадных систем в конечных объемах, полученных с помощью преобразований для фиксированной глобальной метрики.

Что касается обратной задачи о восстановлении по тетрадным данным глобальных метрик и соответствующих конечных тензорных соотношений в глобальных координатах, то для этого потребуется еще удовлетворение соответствующих условий сплошности довольно общего вида с учетом того, что любой тензор четвертого ранга с соответствующей симметрией и в любых координатах, глобальных или инерциальных локальных тетрадных, можно рассматривать как тензор Римана, если его компоненты удовлетворяют только локально в тетрадах тождествам Бьянки.

В фиксированных пространствах с координатами x^i преобразованиями определяются законы движения индивидуальных геометрических точек или индивидуальных физически определенных точек сплошных сред или полей, для которых координаты могут совпадать или не совпадать с определенными геометрическими индивидуальными точками четырехмерных пространств. Если допустить применение соответственного выбора неголономных локальных инерциальных тетрад как систем отсчета в переменных Ферми x^α, τ, то можно в сопутствующих координатах в четырехмерных псевдоримановых пространствах в каждой точке и на каждой координатной линии L для инвариантно определяемого собственного времени τ удовлетворить равенству

$$\partial g_{\alpha\beta}/\partial\tau = 0 \quad \text{при} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{16}$$

Если правые части уравнений (9) получены варьированием инвариантных энергетических выражений для пространства распределенных масс, то в каждой точке можно написать

$$k\left[\rho g_{ij}u^i u^j + \rho\frac{dU(x^\alpha,\tau)}{d\tau}\right]dV_3 d\tau = kT_s^s dV_3 d\tau = dm(g_{ij}u^i dx^j + dU) \tag{17}$$

где $dV_3 d\tau = dV_4$, причем dV_3, $d\tau$ и dV_4 можно рассматривать как инвариантные величины. Тогда при наличии или при отсутствии удельной потенциальной энергии $U(x^\alpha, \tau)$

для геометрии риманова пространства получится одно и то же базовое уравнение теории поля (за счет варьирования уравнения энергии по g_{ij}). Это уравнение, как известно, фигурирует в ОТО как условие для определения геометрических свойств псевдоримановых пространств как множеств точек вместилища механических объектов и происходящих с ними событий.

Уравнения теории поля в любых глобальных или локальных тетрадных системах отсчета в согласии с формулой (17) представляется в виде

$$R_i^j - \frac{1}{2}\delta_i^j R = k\rho u_i u^j \tag{18}$$

(Подробности динамической релятивистской теории гравитации изложены автором ранее [2].)

Из уравнений (18) в любой системе координат после свертки при $i = j$ получится инвариантная формула

$$-R = k\rho c^2 \tag{19}$$

Далее из уравнений (18) в любых сопутствующих координатах после ковариантного дифференцирования получим

$$u_i \nabla_j(\rho u^j) + \rho u^j \nabla_j u_i = 0 \quad \text{или} \quad u_i \nabla_j(\rho u^j) + \rho c \nabla_4 u_i = 0$$

В сопутствующей системе координат величины $c\nabla_4 u_i$ равняются компоненте a_i абсолютного ускорения:

$$a_\alpha = c\partial g_{\alpha 4}/\partial\tau \tag{20}$$

на любой выделяемой сопутствующей линии L. Причем проекция ускорения на касательную к рассматриваемой траектории равна нулю из-за постоянства модуля $|\mathbf{u}| = c$.

В общем случае для произвольной сопутствующей линии не обязательно, чтобы трехмерная физическая индивидуальная частица имела постоянную массу, т.е.

$$\nabla_j \rho u^j \neq 0 \quad \text{и} \quad a_i = \nabla_4 u_i \neq 0 \tag{21}$$

Только из закона сохранения массы частицы на линии L следует уравнение неразрывности $\nabla_j \rho u^j = 0$, и поэтому $a_i = 0$ и вектор

$$\mathbf{a} = 0. \tag{22}$$

Теория гравитации строится с учетом двух независимых аксиом, отвечающих эмпирическим законам. Это закон сохранения масс индивидуальных частиц и закон всемирного тяготения, определяющихся отдельно и независимо от уравнений (9).

Потенциальная энергия U как функция точек пространства одинакова для разных сопутствующих семейств в фиксированных пространствах и, вообще говоря, определяется с помощью универсальных скалярных дифференциальных уравнений в любых фиксированных системах координат независимо от соответственных метрик для различных римановых пространств.

Формулировка каждого из этих законов представляет собой эмпирически обоснованные модельные постулаты, что, естественно, допускает различные формулировки характерных значений величин присутствующих масс при присутствии еще необходимых эмпирических постоянных и, возможно, различных формул в пределах целесообразной точности моделирования.

В точках пустых объемов, в которых $T_{ij} = 0$ или $\rho = 0$, верны равенства $R = 0$ и $R_{ij} = 0$, но компоненты тензора Римана, вообще говоря, отличны от нуля и равны компонентам соответствующего тензора Вейля W с компонентами $W_{ipjq} = R_{ipjq} \neq 0$, причем свертки $W_{ip}{}^i{}_q = W_{ipj}{}^p = 0$. Алгебраические свойства компонент тензора Вейля проанализированы А.З. Петровым, а их глобальные функциональные свойства установлены в работе автора [3].

В общих примерах тензору Вейля отвечают искривленные псевдоримановы пространства, зависящие от четырех скалярных инвариантов.

По определению пространство Минковского и СТО базируются на простейшем частном примере тензора Вейля, равного нулю.

Рассмотрим решения уравнения поля (18), когда в канонических сопутствующих координатах компоненты метрики зависят только от координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. В чистой теории гравитации в ОТО при свободных движениях материальных точек в канонических сопутствующих координатах получается, что в псевдоримановых пространствах функции $g_{\alpha 4}$ не зависят от τ: $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma) \neq 0$, что является следствием общих уравнений (9), когда тензор энергии-импульса определен формулой (17) при $U = \text{const}$ во всех точках пространства.

Если вид функции $g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)$ обеспечивается выбором неголономных локальных инерциальных тетрадных систем отсчета, которые согласно постулатам о псевдоримановости пространства всегда требуется использовать, так как глобальная голономная инерциальная система координат в псевдоримановых пространствах существует только в пространстве Минковского, для которого уравнения (9) при $\rho \neq 0$ в ОТО не удовлетворяются.

Функции $g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)$ при преобразовании вида $\xi^\alpha = \varphi^\alpha(\eta^\gamma)$ можно рассматривать как тензорную метрику подвижного фиксированного трехмерного дефинитного риманова пространства P, независимого от временной координаты глобального времени τ, обуславливающего его произвольное движение в четырехмерном пространстве как абсолютно твердого тела.

Наличие условия $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma)$ обеспечивает отсутствие абсолютных ускорений для четырехмерных скоростей $\mathbf{u}$ на координатных линиях глобального времени τ. Поэтому в сопутствующей метрике для уравнений (18) при условии $g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)$ движение трехмерного пространства P должно быть поступательным и инерциальным в четырехмерном пространстве, в общем случае искривленном при $R \neq 0$ или тоже трехмерно искривленном при $R = 0$ и $R_{ij} = 0$. Однако при трехмерной метрике $g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)$ получается, что $R_{\alpha\beta} \neq 0$, когда тензор Римана равен тензору Вейля.

Как известно, если в P имеем $R_{\alpha\beta} = 0$, то трехмерное пространство P будет евклидовым, а четырехмерное пространство в этом случае превратится в пространство Минковского.

Вместе с этим можно рассматривать пространства Вейля и Минковского с подвижными ускорениями твердых трехмерных пространств с искривленными пространствами P, однако в этом случае абсолютные ускорения индивидуальных материальных точек должны быть отличными от нуля и поэтому необходимо, чтобы $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau) \neq 0$, что исключается в классическом уравнении поля (18) в ОТО.

Условие $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma)$ становится как непосредственное и вполне естественное обобщение ньютоновской теории гравитации для теории относительности, когда абсолютное ускорение равно нулю.

В пространствах Вейля $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau)$ и $\mathbf{a}$ могут быть отличными от нуля. В частности, в сопутствующих системах отсчета в пространствах Минковского в СТО, когда потенциальная энергия $U \cdot dm \neq 0$ при разных значениях $U = \text{const}$ на разных координатных временных линиях L для криволинейной глобальной переменной τ

Описанный конструктивный анализ решений уравнений поля (18) в сопутствующих координатах позволяет охарактеризовать пространства Римана и Вейля, которые должны удовлетворять классическому уравнению поля. Описанная конструкция решений уравнений (18) может послужить основой для понимания требования необходимости введения потенциальной энергии, зависящей от распределения масс вещества. Вместе с этим допустимо с математической точки зрения, следуя ОТО, строить модельную теорию гравитации без учета потенциальной энергии масс, имея в виду, что $U \ll c^2$. Однако даже для очень малых абсолютных ускорений глобальные геометрические и временные свойства орбит определяют собой разные орбиты индивидуальных точек при $U \neq 0$ или, когда $U = \mathrm{const}(L) \neq 0$, для больших интервалов времени.

Для точного и естественного получения предельных переходов от ОТО к теории Ньютона с усложнениями о понятиях физической природы пространства как псевдоримановых целесообразно строить теории гравитации с учетом потенциальной энергии, имеющей фундаментальное значение по Ньютону и в рамках уравнений (9) для "тензора энергии импульса", определяемого согласно формуле (17) с добавлением физически очень существенных скалярных законов для функции U, отвечающих закону всемирного тяготения. Преимущества такой теории практически очевидны во многих задачах, для которых ускорения порождены взаимодействием при наличии больших концентрированных масс, и, в частности, в вопросах о реальности теоретических феноменов, связанных с явлением "черных дыр", характеризующихся особой структурой геометрии пространств и также очень большими ускорениями индивидуальных материальных частиц и в многих других примерах.

Что можно сказать по Ньютону об энергии стакана с покоящейся водой в озере Севан, или на орбитальной станции об энергии, измеряемой космонавтом, или в лаборатории Еревана в сопутствующих координатах, или в глобальных инерциальных системах координат? В ОТО дается ответ: эти энергии – для воды (или легкой пушинки) – в обоих случаях одинаковы и соответственно равны mc^2. Однако в механике Ньютона и в альтернативной (17) теории относительности говорится, что эти энергии из-за присутствия потенциальных энергий различны. Инженеры-практики, используя эти различия, строят электростанции.

В теории гравитации в соответствии со сказанным выше можно отделить задачу об определении глобального пространства, связанного с уравнениями теории поля и определениями пространств и решений физических проблем о движении индивидуальных частиц.

В ньютоновской механике и альтернативных теориях относительности полезно пользоваться устанавливаемыми фиксированными пространствами, в которых возможно построение различных гравитационных полей и законов движения механических систем как точных решений в предлагаемых моделях. Такая постановка вопроса может применяться всегда в механике Ньютона и СТО.

При определении пространств можно иметь в виду следующие модельные определения.

1°. По Ньютону, трехмерные пространства евклидовы, а время абсолютно для всевозможных проблем механики.

2°. В специальной теории относительности все как по Ньютону, но только в сопутствующих системах координат. Для заданных наблюдателей требуются дополнительные пересчеты по алгорифмам инерциальной навигации.

Из сказанного выше при произвольных L или L^* вытекает, что проблема в том, что основные объемные уравнения (9) в ОТО без соответствующих ограничений и дополнительных условий на семейства линий L допускают многообразные модельные точные решения уравнений (8), которые не могут служить приемлемыми моделями для описания природы гравитационных полей.

В связи с природой уравнений (8) для выделений конкретных решений требуется ставить дополнительные условия. В ОТО такие дополнительные условия формулируются в виде требования о геодезичности семейства линий L.

В ньютоновской механике такие дополнительные условия формулируются в виде требования о выполнении хорошо подтвержденного модельного опытного закона всемирного тяготения распределенных масс материальных тел, именно тех масс m, которые определены в свою очередь (эмпирическими постулатами) как характерные параметры тел, имеющие фундаментальное значение вообще во всевозможных приложениях механики к теориям о движении материальных тел.

В ОТО многие авторы считают, что для слабых гравитационных полей можно посчитать, что закон всемирного тяготения удовлетворяется автоматически. Однако, если в теории гравитации для некоторых систем сопутствующих L выполняется условие наличия геодезичности или отсутствия, то после преобразований координат для любых других сопутствующих семейств L' и переменной τ' также будет выполняться соответствующее условие.

В книге Паули "Теория относительности", изданной впервые в 1921 г. и оказавшей огромное влияние на идеологию многих авторов последующих научных работ и учебников, посвященных ОТО, содержатся следующие фундаментальные утверждения (см. [10], с. 203, 219).

Для слабых гравитационных полей компоненты метрического тензора должны лишь крайне мало отклоняться от их значений, которые в каждой точке пространства отвечают локальной инерциальной метрике. Иначе, основываясь на таком допущении, Паули исходит из постулируемой им метрики для риманового пространства вида

$$ds^2 = c^2\left(1+\frac{2\Phi(x^1,x^2,x^3)}{c^2}\right)dt^2 + g_{\alpha\beta}(x^1,x^2,x^3))dx^\alpha dx^\beta \tag{23}$$

Малая функция $\Phi(x^1,x^2,x^3)$ взята Паули независимо от переменной t, что вообще неприемлемо в связи со смыслом, в последующем внесенным Паули в эту функцию.

В качестве дополнительных условий (которые всегда необходимы) исторически было выдвинуто допущение о приемлемости в ОТО частной конкретной метрики вида (23), что само по себе недопустимо для доказательства справедливости для слабых полей во всех случаях приближения решений уравнений (9) ОТО к теории Ньютона.

Следует подчеркнуть сразу, что всякие дополнительные условия фактически ограничивают систему неоднозначных решений фундаментальных уравнений (9) в ОТО, а постулируемые виды соответствующих метрик могут не быть решениями рассматриваемых задач вообще или не отвечать действительности с физической точки зрения.

Ниже докажем, что любые решения, описывающие свободные движения частиц с постоянными массами в пространствах с метрикой (23) в сопутствующих координатах, обладают абсолютными ускорениями, но на основании уравнений поля (18) при $T_{ij} = k\rho u_i u_j$ это противоречит главному выводу ОТО о геодезичности временных орбит в материальных четырехмерных пространствах.

Однако, в частности для метрики Шварцшильда в ОТО, отличной от метрики (23), определенной также на основании ряда ограниченных условий, можно удовлетворить уравнениям ОТО и условию геодезичности движения пробных частиц. В этом случае получается еще, что пробные индивидуальные частицы движутся без взаимодействия с соседями по геодезическим с постоянным значением энергии mc^2 на каждой орбите в пространстве с гауссовой кривизной, равной нулю $R = 0$ в пустотах.

Для явного введения индивидуальных точек и инвариантно определенного собственного времени, необходимых для применения понятий абсолютных четырехмерных векторах скорости и ускорения, кроме координат (x^1, x^2, x^3, t) в (23) введем еще сопутствующие координаты $\xi^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ Лагранжа с помощью следующих преобразований:

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\tau),\ \text{или}\ dt\sqrt{c^2+2\Phi} = d\tau c\ \text{или}\ t=\int^{\tau}\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1/2}d\tau \tag{24}$$

Метрика (23) преобразованием (24) в том же пространстве приводится к виду

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2\hat{g}_{\alpha 4}(\xi^\gamma,\tau)d\xi^\alpha d\tau + \hat{g}_{\alpha\beta}(\xi^\gamma,\tau)d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{25}$$

После каждого преобразования в переменных (24) получим каноническую сопутствующую метрику, в которой закону движения в Лагранжевых координатах (24) соответствует глобальное собственное время $\tau \neq t$, например, постоянные "начальные" значения $\xi^\alpha = \text{const}$ на траекториях индивидуальных частиц. Отметим еще, что метрики (25) могут отвечать различным законам движения за счет выбора функций $x^\alpha(\xi^\gamma, \tau)$, что равносильно различным определениям преобразований (24), которые можно фиксировать устранением произвольного задания функций $x^\alpha(\xi^\gamma, \tau)$ от указанных аргументов в формулах (25).

Для серий частных преобразований положим

$$x^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{b}, \quad \left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1/2} d\tau = dt \tag{26}$$

где b – любая возможная конечная скалярная постоянная. На основании формул (23) и (26) можно выписать компоненты метрики в формуле (25). Таким путем с приближениями найдем

$$\begin{aligned} g_{\alpha 4} &= c^2\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial t}{\partial\tau} = c^2\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{1/2}\int^\tau \frac{\partial\tau}{\partial\xi^\alpha}\left[1+\frac{2\Phi(\xi^\alpha/b)}{c^2}\right]^{-1/2} d\tau = \\ &= c^2\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{1/2}\int^\tau \left(1+\frac{2\Phi(\xi^\alpha/b)}{c^2}\right)^{3/2} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}\frac{1}{b} \approx -\frac{1}{b}\int^\tau \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} d\tau \\ \hat{g}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{b^2} g_{\alpha\beta} + g_{44}\frac{\partial t}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial t}{\partial\xi^\beta} \approx \frac{1}{b^2} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{b^2}\int^\tau \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^\alpha} d\tau \int^\tau \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^\beta} d\tau \end{aligned} \tag{27}$$

На основании формулы $a_\alpha = c\partial g_{\alpha 4}/\partial\tau$ получим, что компоненты ускорения индивидуальных частиц на линиях L, отвечающих значениям $\xi^\alpha = \text{const}$, определяются формулой

$$a_\alpha = -\frac{c}{b}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} \tag{28}$$

Согласно (28) величины компонент вектора абсолютного ускорения **a** могут быть различными, но существенно, что $\mathbf{a} \neq 0$.

Полученный вывод связан с частным преобразованием (26), однако метрика в других сопутствующих системах отсчета в случае общего преобразования получится из метрики (25) добавочным преобразованием к преобразованию (26), сохраняющим вид канонической сопутствующей метрики вида (25). Легко показать, что такое преобразование должно отвечать формулам

$$\xi^\alpha = \varphi^\alpha(\eta^\gamma) \quad \text{и} \quad \tau = \tau' + \Psi(\eta^\gamma)$$

После этого в преобразованной метрике (25) получим

$$\hat{\hat{g}}_{\alpha 4} = c^2\frac{\partial\Psi}{\partial\eta^\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial\tau'} + \hat{g}_{\beta 4}\frac{\partial x^\beta}{\partial\eta^\alpha} - 1 + (-1)0 \tag{29}$$

Так как $c^2\partial\Psi/\partial\eta^\alpha$ не зависит от τ, то получим в других сопутствующих координатах η^α, τ' формулу для ускорения, отличного от нуля:

$$\hat{\hat{a}}_\alpha = \frac{c\partial\hat{\hat{g}}_{\alpha 4}(\eta^\gamma,\tau')}{\partial\tau'} = \hat{a}_\beta\frac{\partial x^\beta}{\partial\eta^\alpha}, \quad \beta = 1,2,3 \tag{30}$$

Компоненты a_α отличаются от a_β только за счет преобразования от ξ^α, τ к η^β, τ, поэтому вектор абсолютного ускорения является инвариантом.

Так как линия L – произвольная, сопутствующая, отвечающая свободному движению частицы с постоянной массой, то на основании (22) в ОТО при потенциальной энергии U = const во всех точках пространства следует, что ускорение **a** обязательно отлично от нуля в любых сопутствующих координатах метрики (23) и поэтому не удовлетворяет основному требованию ОТО и не является решением какой-либо задачи о свободных движениях материальных сред в ОТО.

Из формулы (27) ясно, что компоненты $g_{\alpha\beta}(x^\alpha, \tau)$ не влияют на значение величины ускорения **a**, а поэтому метрику (23) нельзя подобрать так, чтобы **a** = 0, но можно подобрать $g_{\alpha\beta}$ так, чтобы только приближенно удовлетворялось уравнение Пуассона на основе приближенно записанного инвариантного равенства (19) для метрики (23)

$$R = -k\rho c^2$$

и после введения постоянного гравитационного релятивистского коэффициента k формулой (9). Ввиду очень малых величин k точность значений этого коэффициента, полученная с помощью, по сути дела, "неверных" решений в ОТО, сомнительна, однако вполне приемлема при учете потенциальной энергии, являющейся источником отмеченных ускорений.

Таким образом, метрика (23) не удовлетворяет ОТО, в которой $T_i^i = dmc^2$ и **a** = 0. Если принять, что $T_i^i = dmc^2 + dmU$, то вместо равенств $a_\alpha = 0$ получим $a_\alpha = -\partial U/\partial x^\alpha$ и $U = \Phi$

Добавим еще, что величина k не скажется на решениях уравнений ОТО в пустотных объемах для пространств Вейля, определенных равенством $T_{ij} = 0$, когда, однако, плотность $\rho = \infty$ только в изолированных точках пространства, в которых масса m конечна (модель звезды).

В теории поля по Ньютону и в альтернативной релятивистской теории при наличии потенциальной энергии, когда в сопутствующей системе отсчета верно равенство (17) и вводится скалярное уравнение Пуассона, независимое от системы уравнений (8), в которых из закона всемирного тяготения следует:

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha U = -4\pi\rho G \tag{31}$$

то вместо постоянной k в решениях будет фигурировать только гравитационная постоянная G за счет уравнения (31), а не за счет канонических уравнений (9) в ОТО, так как в пустотах $T_{ij} = 0$. Однако даже в приближенной постановке пренебрегать вычисленным в (28) отличным от нуля абсолютным ускорением **a** нельзя, так как если положить **a** = 0, и следовательно, в силу (28) $\Phi \neq$ const, то метрика (23) станет определять собой пространство Минковского, в котором все геодезические – прямые линии, что явно противоречит главным следствиям физической теории гравитации.

Тем не менее в короткие интервалы времени времени из-за приближений $\tau \approx t$ планеты движутся относительно Солнца с малыми ускорениями, и поэтому на практике земную систему отсчета часто можно считать для многих задач инерциальной системой (но, как правило, все же с учетом порожденных Землей ускорений сил тяжести) и, конечно, без учета эффектов чередования смены дня и ночи!

Вместе с этим Паули подразумевал справедливость в рамках ОТО закона всемирного тяготения или его уточнений и в связи с этим отметил возникновение уравнения Пуассона из уравнения ОТО для очень слабых полей. Однако предполагаемая им интуитивно метрика (23) представляет собой добавочное сильное допущение, которое даже в слабых полях явно противоречит требованию о геодезичности орбит в ОТО.

Такие же утверждения бытуют во множестве научных работ и учебников по области ОТО. В частности, утверждается, что в небесной механике ОТО дает следующее уточненное приближение к теории Ньютона вообще и в том числе для продолжительных интервалов времени, что по существу не доказательно.

Таким образом, приведенные выше и нижеследующие соображения противоречат выводу Паули. Вот цитата из текста Паули: "Таким образом, уравнение Пуассона действительно оказывается справедливым. То обстоятельство, что общая теория относительности на основании постулатов § 56 без дальнейших гипотез приводит к закону тяготения Ньютона, является ее большим успехом. Кроме этого, благодаря этому мы теперь в состоянии кое-что сказать о знаке и числовом значении k".

В самом деле: геодезичность семейства линий L в рамках ОТО устанавливается точно условием о независимости компонент $g_{\alpha 4}$ от собственного времени τ, иначе только в результате вида функции $u_\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ и соответственно в сопутствующей системе координат, когда $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma)$.

Возможный произвол семейства координатных линий L, компонент $g_{\alpha 4}(\xi^\gamma)$ и $g_{pq}(\xi^\gamma, \tau)$ показывает, что можно строить гравитационное поле неоднозначно даже в пустотных объемах, где $\rho = 0$ при наличии особых точек или краевых условий для множеств псевдоримановых пространств для некоторых серий семейств временных линий L, для которых $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0$.

Такого рода решения заведомо, вообще говоря, не могут служить моделями гравитационных полей в природе без учета дополнительного взаимодействия масс в согласии с законом всемирного тяготения.

Вместе с этим очевидно, что явное влияние постоянной k исключается в основных уравнениях (8) для пустотных объемов.

В альтернативных теориях относительности и по Ньютону принимается для удельной потенциальной энергии U уравнение (31), согласно которому абсолютные ускорения отличны от нуля, причем в динамической теории доказывается, что

$$\mathbf{a}_{\mathrm{abs}} = -\operatorname{grad} U \tag{32}$$

В этом случае метрика (23) является решением уравнений (8) с измененными правыми частями за счет присутствия удельной потенциальной энергии. Суть дела связана с тем, что геодезические орбиты в ОТО заменяются точными решениями в релятивистских альтернативных теориях с ускорениями аналогично теории Ньютона, но в псевдоримановых пространствах. При этом непрерывность предельного перехода к ньютоновской механике естественна и математически точна.

Если семейство линий L задано, то согласно (32) определяется скалярная функция U через ускорения $\mathbf{a}_{\mathrm{abs}}$. Очевидно также, что справедливо и обратное утверждение об определении линий L, если задать U. Поэтому ясно, что для получения необходимых моделей для правильного описания гравитации в природе использование модельного закона всемирного тяготения, вообще говоря, независимо от уравнений (8) обязательно!

Законы соответствующих движений индивидуальных точек в римановых пространствах вообще различны, и это существенно для оценки теорий, так как именно они определяют собой главные свойства орбит небесных тел для больших промежутков времени также и в случаях слабых гравитационных полей.

Обратимся к теории Шварцшильда для решений уравнений (8). Вместо метрической формы (23) возьмем теперь метрику пространства Шварцшильда, порожденную полярной системой пространственных координат r, θ, ψ, с временной координатой t в механике Ньютона, а также в ОТО для псевдориманового пространства с метрикой Шварцшильда, удовлетворяющей системе уравнений (8) в пустых объемах четырехмерного пространства. Или пространств, заполненных "пробными малыми массами", когда в соответствующей приближенной постановке математических задач можно пренебречь их влиянием на геометрию, и соответственно на метрику Шварцшильда, определяемую одной особой материальной точкой с большой концентрированной массой M, моделирующей стационарную трехмерную метрику псевдориманового четырехмерного пространства (с пренебрежением местных полей в задачах о движении небесных тел, возмущающих окружающие их пространства).

В случае решения Шварцшильда для уравнений (8) в ОТО получается, что за исключением особой точки гауссова кривизна R в точках четырехмерного пространства равна нулю. Поэтому тензор Римана становится равным тензору Вейля, отвечающему, в частности, метрике, которая в форме, данной Дристом и Вейлем, представляется формулой

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r^*}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{r^*}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \tag{33}$$

В такой метрике кроме величины c единственным постоянным параметром служит r^* как характеристика пространства. Параметрическая величина r^* в приложениях весьма мала.

При $r^* = 0$ метрика (33) отвечает пространству Минковского, для которого все геодезические прямые. Поэтому в теории движения планет в ОТО нельзя в приближенных решениях полагать глобально $r^*/r = 0$.

Таким образом, очевидно, что в ОТО даже для очень слабых полей пространство зависит инвариантным образом все же только от переменного отношения r^*/r на рассматриваемых круговых и некруговых орбитах L. При этом в фиксированных пространствах Шварцшильда величина r^* для особой точки, в которой $r = 0$, обуславливается постоянными величинами M, c, G. Последние по существу влияют только через комбинацию $2MG/c^2 = r^*$, которая в свою очередь в ОТО является эмпирической величиной для конкретных задач.

Заметим еще, что отбрасывание малых переменных величин r^*/r на орбитах L в метрике (33) недопустимо, так как учет именно этих малых переменных отношений обуславливает релятивистские эффекты, которые в ОТО часто трактуются как уточнение механики Ньютона.

Рассмотрим систему линий L в переменных t, r, θ, $\psi = \omega_0 ct$ с постоянными значениями координат Лагранжа, для которых на системе временных координатных линий L выполняются соответствующие равенства $r = r_0 = \text{const}$, $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\omega = \omega_0 =$ $= \text{const}$.

Для семейств концентрических круговых орбит с разными значениями r_0 и ω_0 при $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\psi = c\omega_0 t$ метрику (33) можно переписать в виде

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r}{r^*} - \omega_0^2 r^2\right)dt^2 - \left(1-\frac{r^*}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{34}$$

Вместо временной координаты вдоль линий L переменной t можно ввести на линиях L переменную τ как глобальную координату для собственного времени на линиях L с помощью преобразования координат вида

$$\tilde{r} = r, \quad d\tau = \left(1-\frac{r^*}{r} - \omega_0^2 r^2\right)^{1/2} dt \quad \text{или} \quad t = \tau\left(1-\frac{r^*}{r} - \omega_0^2 r^2\right)^{-1/2} \tag{35}$$

В результате получим решение уравнения поля (9) в "трехмерных" сопутствующих координатах в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{14} d\tilde{r} d\tau + g_{11} d\tilde{r}^2 \tag{36}$$

где

$$g_{14} = \hat{g}_{44}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial r} = -\tau c^2 (r^*/r^2 - 2r\omega_0^2)/2(1 - r^*/r - r^2\omega_0^2)^2$$

$$g_{11} = \hat{g}_{11}$$

По основному закону ОТО абсолютные ускорения на орбитах L индивидуальных массовых частиц в свободных движениях равны нулю. Если в пространствах Шварцшильда орбиты L отвечают постоянству координаты $r = r_0 = \text{const}$, то на основании формулы (36) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\omega_0^2 = r^*/(2r_0^3) \tag{37}$$

и тогда

$$\tau = t(1 - 3r^*/(2r_0))$$

Если равенство (37) не выполнено, то $g_{14} \neq 0$. Поэтому для абсолютных ускорений будут верны формулы

$$a_1 = c\frac{\partial g_{14}}{\partial \tau} = -\frac{c^3}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{r^*}{r} - \omega_0^2 r^2\right)^{-1} = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad a_2 = a_3 = 0 \tag{38}$$

где компонента ускорения a_1 отлична от нуля. В этом случае в пространстве Шварцшильда в метрике (34) возникает ускорение силы тяжести с удельной потенциальной энергией

$$U = -\frac{c^3}{2}\left(1 - \frac{r^*}{r} - \omega_0^2 r^2\right)^{-1} + U_0$$

зависящей от двух постоянных r^* и ω_0^2 и постоянной интегрирования U_0 при

$$r^* = \frac{2MG}{c^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\Omega^2}{c^2}$$

Поэтому формулу (38) для компоненты ускорения a_1 можно еще переписать в виде

$$a_1 = -\frac{\partial U}{\partial r} = c\left(\Omega^2 r - \frac{MG}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r^*}{r} - \omega_0^2 r^2\right)^{-2} \neq 0 \tag{39}$$

Однако условия $a_1 = 0$ на орбитах $r = \text{const}$ в ОТО равносильны аналогичному равенству в механике Ньютона

$$\Omega^2 l = MG/l^2 \tag{40}$$

которое может не выполняться в фиксированном пространстве Шварцшильда на разных орбитах $r = \text{const}$ так как, во-первых, расстояния l по Ньютону точек орбит до точки $r = 0$ по Шварцшильду не равны $r \neq l$ и, во-вторых, угловая скорость $\Omega = d\varphi/d\tau$ в ОТО не равняется $d\varphi/dt$ по Ньютону из-за неравенства $\tau \neq t$ согласно формуле (35). Поэтому соотношение (40) при замене l на r в пространстве Шварцшильда не совпадают с соответствующими соотношениями по Ньютону. Их различия для пробных частиц обуславливают механические эффекты в классической ОТО.

Из формулы (37) следует, что на орбитах $r_0 = \text{const}$, $\theta_0 = \text{const}$ и $\omega_0 = \text{const}$ на соответствующих линиях L величины временных периодов T_t и T_τ обращения планет вокруг Солнца связаны зависимостью

$$T_\tau = T_t\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r^*}{r_0}\right)^{1/2}, \quad T_\tau \neq T_t$$

Из формулы (38) следует, что при $r_0 = 3r^*/2$ получается, что $T_\tau = 0$, и, следовательно, соответствующее движение орбиты происходит с трехмерной скоростью, равной скорости света c.

При очень малых $r^* \ll r$ с большой точностью для периодов справедливы равенства

$$T_\tau = T_t\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r^*}{r_0}\right), \quad T_\tau \approx T_t$$

Таким образом, когда равенство (37) выполняется, то согласно ОТО пробные тела – планеты в пространстве Шварцшильда движутся поступательно по геодезическим, иначе при $\bar{a}_{abs} = 0$ для их центра масс.

Однако, если некоторые значения постоянных r_0 и ω_0 не удовлетворяют равенству (37), то планеты кроме поступательного движения при $r_0 = \text{const}$ будут совершать еще собственное вращение, которое обусловит наличие $\bar{a}_{abs} \neq 0$ для их центра масс, поэтому в пространстве Шварцшильда в ОТО для вращающихся планет геодезичность орбит нарушается в рамках теории для метрики (34).

Рассмотрим теперь точные формулы для периодов обращения малых масс m вокруг Солнца с большой массой M как материальной точки по круговым орбитам в теории Ньютона.

На основании закона всемирного тяготения возможно относительное движение планеты по окружности под действием силы притяжения F Солнцем планеты по окружности радиуса $l = \text{const}$ при допущении о неподвижности Солнца в инерциальной системе отсчета (масса M велика, а m мала). Для сил взаимодействия по Ньютону можно написать

$$F = \frac{mMG}{l^2} = \frac{m\upsilon^2}{l} \Rightarrow \upsilon = \left(\frac{MG}{l}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad T_{\text{New}} = \frac{2\pi l}{\upsilon} = 2\pi l^{3/2}(MG)^{-1/2}$$

Аналогично на основании (34) в пространстве Шварцшильда и в евклидовых пространствах для круговых орбит пробных масс верны формулы

$$r^2 = \frac{r^* c^2 T_t^2}{8\pi^2}, \quad l^3 = \frac{MG}{4\pi^2} T_{\text{New}}^2$$

В соответствии с установившимся определением для пространства Шварцшильда полагается, что

$$r^* = 2MG/c^2$$

После этого можно написать

$$\frac{r^3}{l^3} = \frac{T_t^2}{T_{\text{New}}^2} = (1-p)^3, \quad T_t = T_{\text{New}}(1-p)^{3/2} \tag{41}$$

При больших r величина p мала, но существенно отлична от нуля, так как

$$r = (1-p)l \tag{42}$$

Единственным безразмерным параметром на рассматриваемых круговых орбитах в метрике (33) является параметр r^*/r, постоянный на разных кругах.

В общей постановке поставленной выше задачи о стационарных решениях Шварцшильдом найдено семейство решений в ОТО зависящих от двух геометрических постоянных параметров $\alpha = r^*$ и ρ (в обозначениях Шварцшильда). Для непрерывных решений в полярных координатах вплоть до значений $r = 0$ в пустом пространстве при $R_{ij} = 0$ и $R = 0$ Шварцшильдом установлено соотношение [11]

$$\rho = \alpha^3 = r^{*3}$$

и формула метрики в виде

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r^*}{R}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r^*}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega^3 \tag{43}$$

где сферический координатный элемент $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\psi^2$ и

$$R = r(1 + r^{*2}/r^3)^{1/3} \approx r$$

при отсутствии черной дыры, которую можно считать стянутой в особую точку $r = 0$. Переход от метрики (43) к метрике (33), как будто вполне законный, меняет, тем не менее качественно геометрическую структуру псевдориманового пространства вблизи особой точки.

Если "ρ" = 0 и $\alpha = r^*$, то метрика (43) приобретает вид метрики (33) со всеми описанными выше следствиями и, в частности, с существованием черной дыры.

Если "ρ" $\neq$ 0 и $\rho = f(r^*)$, где $f(r^*)$ – некоторая задаваемая функция, то получается серия решений с различными черными дырами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17341).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* О глобальном времени в общей теории относительности // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 1. С. 44–48.
2. *Седов Л.И.* О гравитационных полях в римановых пространствах // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 855–899.
3. *Седов Л.И.* О свойствах инвариантных компонент тензора Вейля, следующих из тождеств Бьянки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 5–11.
4. *Седов Л.И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 6. С. 1311–1314.
5. *Sedov L.I.* Pros. Steklov Inst. Math. 1991. V. 186. No. 1/4. P. 1–5.
6. *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.
7. *Седов Л.И.* Об основных моделях в механике. М.: Изд-во МГУ, 1992. 152 с.
8. *Петров А.З.* О пространствах, определяющих поля тяготения. Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. № 2. С. 149–152.
9. *Седов Л.И.* О сохранении поля сил тяжести по Ньютону в псевдоримановых пространствах. Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 2. С. 171–174.
10. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1991. 324 с.
11. *Шварцшильд К.* О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199–207.

Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1993