УДК 531.36

© 1994 г. А.П. Иванов

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Изучаются относительные равновесия материальной точки в равномерно вращающейся системе координат. Наряду с потенциальными силами, зависящими от относительных координат, и силами инерции учитываются малые силы сопротивления, зависящие от абсолютной скорости. Действие последних приводит, во-первых, к смещению равновесия и, во-вторых, к изменению характеристических показателей по сравнению с консервативным случаем. Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. В частности, эти условия выполнены для системы, устойчивой в первом приближении, при наличии малого вязкого трения. Впервые обнаружены случаи асимптотической устойчивости треугольных точек либрации в классической задаче трех тел при учете сопротивления среды.

1. Смещение равновесия в сопротивляющейся среде. Решение ряда задач теоретической и небесной механики приводит к исследованию равновесия материальной точки относительно системы координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси OZ. Силовая функция системы $U = U(x, y, z)$ зависит лишь от относительных координат. Уравнения движения в пустоте имеют вид (масса равна единице)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \operatorname{grad} U + \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_c, \quad \mathbf{r} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{P}_e = \omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{P}_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$$

Здесь $\mathbf{P}_e$, $\mathbf{P}_c$ – переносная и кориолисова силы инерции [1].

В положении относительного равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} = 0$, откуда получаем

$$\operatorname{grad} U'|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = 0, \quad U' = U + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \tag{1.2}$$

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать более реалистичную модель, в которой принимается во внимание малая сила сопротивления среды, направленная противоположно абсолютной скорости точки $\mathbf{V}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \operatorname{grad} U + \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_c + \mathbf{S} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{S} = -f(V)\mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad f(V_0) = \varepsilon \ll \omega, \quad \mathbf{V}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$$

Ниже дается сравнительный анализ систем (1.1) и (1.3) с точки зрения наличия у них положений равновесия и их устойчивости.

Найдем положение равновесия системы (1.3). Полагая $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, получим

$$\operatorname{grad} U'|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^*} = f(V^*)\mathbf{V}^*, \quad \mathbf{V}^* = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* \tag{1.4}$$

При отсутствии сопротивления $f = 0$, система (1.4) удовлетворяется при $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (т.е.

$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0$). Это решение единственно, если вторая вариация измененной силовой функции

$$U_2 = \| \delta^2 U' / \delta \mathbf{r}^2 \|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$$

невырождена, при этом равновесие (1.2) системы (1.1) изолировано. В этом случае система (1.4) имеет единственное решение в окрестности точки $\mathbf{r}_0$:

$$\Delta \mathbf{r} = \varepsilon U_2^{-1} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) + O(\varepsilon^2) \tag{1.5}$$

Заметим, что если $\mathbf{r}_0$ лежит на оси вращения, то относительное равновесие является и абсолютным, так что $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{0}$.

Доказано следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть в положении равновесия (1.2) гессиан функции $U + {}^1/{}_2\omega^2(x^2 + y^2)$ отличен от нуля. Тогда для достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ силы сопротивления (1.3) смещают положение равновесия на величину $\Delta \mathbf{r}$, вычисляемую по формуле (1.5).

2. Устойчивость в случае пропорционального сопротивления. Исследуем устойчивость положения равновесия системы (1.3). Прежде всего заметим, что система (1.1) обобщенно-консервативна, так как силы инерции $\mathbf{P}_e$, $\mathbf{P}_c$ имеют структуру линейных потенциальных и гироскопических сил соответственно. Поэтому для ее устойчивости необходимо, чтобы линейная система

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\Omega \dot{\boldsymbol{\rho}} - U_2 \boldsymbol{\rho} = 0; \qquad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \qquad \Omega = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

имела лишь чисто мнимые характеристические показатели λ_j ($j = 1 \div 6$).

Линеаризуем систему (1.3) в окрестности точки $\mathbf{r}^*$ (для разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}^*$ оставляем прежнее обозначение $\boldsymbol{\rho}$):

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\Omega \dot{\boldsymbol{\rho}} - U_2^* \boldsymbol{\rho} - d\mathbf{S} = 0 \tag{2.2}$$

где U_2^* – вторая вариация функции U', а $d\mathbf{S}$ – дифференциал вектор – функции $\mathbf{S}$, вычисленные в точке $\mathbf{r}^*$. При $\varepsilon \to 0$ уравнение (2.2) переходит в (2.1), и вследствие непрерывной зависимости характеристических показателей от параметра получаем такой результат.

Предложение 2. Для устойчивости равновесия в среде с малым сопротивлением необходимо, чтобы равновесие в пустоте (1.2) было устойчиво в первом приближении.

На первый взгляд, для получения достаточных условий устойчивости к системе (2.2) можно применить теоремы Кельвина–Четаева [2] о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость консервативной системы. Однако формулы (1.3) показывают, что в выражении диссипативной по природе силы S через относительные координаты и скорости присутствуют члены другой структуры.

Рассмотрим, в частности, случай $f = \text{const}$, типичный для сил вязкого трения. При этом имеем

$$\mathbf{S} = -\varepsilon \mathbf{V}, \qquad d\mathbf{S} = -\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \Omega \boldsymbol{\rho}) \tag{2.3}$$

В выражении $d\mathbf{S}$ первое слагаемое имеет форму линейных диссипативных сил, второе – позиционных неконсервативных сил. Заметим, что в [3] при исследовании равномерных вращений твердого тела отмечалось, что силы, имеющие диссипативную структуру в абсолютной системе координат, могут иметь позиционную составляющую в связанной системе.

Теорема 1. В случае пропорционального сопротивления (2.3) для асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1.3) достаточно, чтобы характеристические показатели системы (2.1) были чисто мнимыми и попарно различными.

Доказательство. Составим характеристическое уравнение для системы (2.2):

$$F(\lambda, \varepsilon) = \det\|(\lambda^2 + \varepsilon\lambda)E_3 + (2\lambda + \varepsilon)\Omega - U_2^*\| = 0 \tag{2.4}$$

Обозначим λ_j^* ($j = 1 \div 6$) корни уравнения

$$\det\|\lambda^2 E_3 + 2\lambda\Omega - U_2^*\| = 0$$

По условию для достаточно малых ε будем иметь $\mathrm{Re}\lambda_j^* = 0$ и $\lambda_k^* \neq \lambda_j^*$ при $k \neq j$ [3]. С учетом характера зависимости $F(\lambda, \varepsilon)$ в формуле (2.4) получим

$$F(\lambda_j^*, 0) = 0, \quad \partial F(\lambda_j^*, 0)/\partial\lambda = 2\partial F(\lambda_j^*, 0)/\partial\varepsilon \neq 0$$

Следовательно, корни уравнения (2.4) допускают оценку

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j^* - \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2) \tag{2.5}$$

Для $\varepsilon > 0$ в формулах (2.3) $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, откуда следует вывод об асимптотической устойчивости по первому приближению.

Заметим, что в условиях данной теоремы не требуется устойчивости по Ляпунову невозмущенной системы (1.1).

3. Условия устойчивости при нелинейных законах сопротивления. Перейдем к анализу произвольного закона сопротивления, считая в (1.3) функцию f положительной и дифференцируемой. При линеаризации системы (2.1) в формуле (3.1) появляются дополнительные слагаемые. Поскольку

$$\mathbf{S} - \mathbf{S}^* = f(V^*)\mathbf{V}^* - f(V)\mathbf{V} = f(V^*)(\mathbf{V}^* - \mathbf{V}) + f'(V^*)(V^* - V)\mathbf{V}^* + o(V^* - V) =$$

$$= -\varepsilon(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) + f'(V_0)[(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_0)(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}) - \omega^2(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}) - (\mathbf{V}_0, \dot{\boldsymbol{\rho}})]\mathbf{V}_0 / V_0 + \ldots$$

(здесь отброшены нелинейные по $\boldsymbol{\rho}$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ члены, а также величина порядка $O(\varepsilon^2)$), то при $f'(\upsilon_0) \neq 0$ выражение $d\mathbf{S}$ в формуле (2.2) имеет при подходящем выборе начала координат (так, что $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_0) = 0$) вид

$$d\mathbf{S} = -\varepsilon(D\dot{\boldsymbol{\rho}} + K\boldsymbol{\rho} + N\boldsymbol{\rho}) \tag{3.1}$$

$$D = E + \frac{2\gamma}{r_0^2}\begin{Vmatrix} y_0^2 & -x_0y_0 & 0 \\ -x_0y_0 & x_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K = \frac{\gamma}{r_0^2}\begin{Vmatrix} -2x_0y_0 & x_0^2 - y_0^2 & 0 \\ x_0^2 - y_0^2 & 2x_0y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$N = (1+\gamma)\Omega, \quad \gamma = \frac{V_0 f'(V_0)}{2f(V_0)}, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Параметр γ определяется типом сопротивления ($\gamma = 0$ для пропорционального сопротивления, $\gamma = 1/2$ для квадратичного закона, $\gamma = -1/2$ для сопротивления, не зависящего от модуля скорости и т.д.).

В формуле (3.1) первое слагаемое имеет структуру линейных диссипативных сил (диссипация полная, если $\gamma > -1/2$), второе – потенциальных, и третье – неконсервативных позиционных сил.

Теорема 2. Пусть матрица U_2 отрицательно определена, а величина γ лежит в интервале $(-1/3, 1)$. Тогда для достаточно малых ε положение равновесия системы (1.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Заметим, что условия предложений 1, 2 в данном случае выполнены. Кроме того, равновесие в пустоте устойчиво по Ляпунову по одной из теорем

Кельвина–Четаева. Для системы с трением (3.1) построим функцию Ляпунова

$$L=(\rho,(\varepsilon K-U_2^*)\rho)+(\dot\rho,\dot\rho)+\varepsilon(1+\gamma)(\dot\rho,\rho) \tag{3.2}$$

Данная квадратичная форма положительно определена для достаточно малых ε, а ее полная производная по времени в силу уравнений (2.2), (3.1) выглядит так

$$\dot L=\varepsilon[(1+\gamma)(\rho,U_2^*\rho)+(1+\gamma)(\dot\rho,\dot\rho)-2(\dot\rho,D\dot\rho)]+o(\varepsilon) \tag{3.3}$$

Несложная проверка показывает, что при сделанных ограничениях на параметр γ функция (3.3) определена отрицательно, что и доказывает асимптотическую устойчивость.

Из двух условий теоремы 2 основным является ограничение на матрицу U_2, так как в реальных механических системах сопротивление среды характеризуется коэффициентом $\gamma\in[0,\, {}^1\!/\!_2]$. Если матрица U_2 определена положительно или имеет одно положительное собственное значение и два отрицательных, то необходимые условия устойчивости не выполнены. В случае двух положительных и одного отрицательного собственного значения условия теоремы 2 не выполнены, но условия предложения 2 могут быть выполненными (гиростабилизация). Этот случай рассматривается ниже.

Лемма. Пусть функция $F(\lambda,\varepsilon)$ является многочленом четной степени относительно λ с действительными коэффициентами, непрерывно дифференцируемыми по параметру ε. Уравнение $F(\lambda,\varepsilon)=0$ имеет при $\varepsilon=0$ лишь простые чисто мнимые корни. Тогда вещественная часть корней при $\varepsilon\neq 0$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{Re}\lambda(\varepsilon)=\varepsilon\frac{F_\varepsilon(-\lambda,0)-F_\varepsilon(\lambda,0)}{2F_\lambda(\lambda,0)}+o(\varepsilon) \tag{3.4}$$

(нижний индекс обозначает частную производную).

Справедливость данного утверждения следует из теоремы о неявной функции и четности функции $F(\lambda,0)$.

Применим формулы (3.4) для анализа асимптотической устойчивости начала координат системы (2.2). Характеристическое уравнение в обозначениях формулы (3.1) имеет вид

$$F(\lambda,\varepsilon)=\det\|\lambda^2E_3+2\lambda\Omega-U_2^*+\varepsilon(D\lambda+K+N)\|=0 \tag{3.5}$$

Если выполнены условия предложения 2, то для оценки корней уравнения (3.5) можно применить лемму и выяснить, лежат ли все эти корни в левой полуплоскости.

Выделим следующий важный частный случай, когда эта проверка существенно упрощается.

Теорема 3. Пусть 1) матрица U_2 имеет собственный вектор, параллельный оси вращения OZ, 2) соответствующее собственное значение a_3 отрицательно, 3) вектор $\mathbf r_0$ ортогонален к OZ. Тогда для асимптотической устойчивости достаточно выполнения неравенств

$$(1+\gamma)D^{1/2}>|\gamma|\left|\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{(U_2\mathbf r_0,\mathbf r_0)}{r_0^2}\right| \tag{3.6}$$

$$D=[2\omega^2-{}^1\!/\!_2(a_1+a_2)]^2-a_1a_2>0,\quad a_1a_2>0,\quad 2\omega^2-{}^1\!/\!_2(a_1+a_2)>0$$

где a_1, a_2 – два других собственных значения матрицы U_2. При обратном знаке хотя бы одного из неравенств (3.6) положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Очевидно, что третье условие всегда можно удовлетворить за счет подходящего выбора начала координат. Кроме того, поворотом осей X, Y можно добиться того, что матрица U_2 примет диагональную форму $U_2=\operatorname{diag}\{a_1,a_2,a_3\}$. Характеристический многочлен (3.6) распадается на произведение трехчлена $\lambda^2+\varepsilon\lambda-a_3$, корни которого при малых $\varepsilon>0$ лежат в левой полуплоскости, и многочлена четвертой степени

$$F_1(\lambda,\varepsilon)=\det\begin{Vmatrix}\lambda^2+\varepsilon\lambda-a_1+\gamma^*(\lambda y^2-\omega xy) & -(2\lambda+\varepsilon)\omega-\gamma^*(\omega y^2+\lambda xy)\\ (2\lambda+\varepsilon)\omega+\gamma^*(\omega x^2-\lambda xy) & \lambda^2+\varepsilon\lambda-a_2+\gamma^*(\lambda x^2+\omega xy)\end{Vmatrix} \tag{3.7}$$

$\gamma^*=2\varepsilon\gamma/r_0^2$

При $\varepsilon=0$ получаем

$$F_1(\lambda,0)=(\lambda^2-a_1)(\lambda^2-a_2)+4\lambda^2\omega^2 \tag{3.8}$$

Корни многочлена (3.8) чисто мнимы и попарно различны тогда и только тогда, когда выполнена вторая группа неравенств в (3.6), в этом случае

$$\lambda_{1,2}^2(0)={}^1/_2(a_1+a_2)-2\omega^2\pm D^{1/2} \tag{3.9}$$

Подставляя значения (3.9) в выражения (3.4), получим

$$-1-\gamma+\gamma\frac{(a_1+a_2)r_0^2-2(U_2\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_0)}{\pm 2r_0^2D^{1/2}}<0$$

что эквивалентно первому неравенству (3.6).

Следствие. Если матрица U_2 определена отрицательно и выполнено первое условие теоремы, то положение равновесия асимптотически устойчиво для всех $\gamma>-1$.

Действительно, в этом случае правая часть неравенства (3.6) не больше, чем $|\gamma(a_1-a_2)|/2$, а $D\geqslant(a_1-a_2)^2/4$. При $\gamma>-1$ неравенство (3.6) заведомо выполнено.

Данный результат дополняет выводы теоремы 2.

4. Треугольные точки либрации в разреженной среде. Классическая круговая ограниченная задача трех тел допускает решения Лагранжа, называемые также треугольными точками либрации (см. [5]). Этим решениям соответствуют положения относительного равновесия материальной точки относительно системы координат, вращающейся вместе с основными притягивающими телами. Уравнения движения в пустоте имеет вид (1.1), где μ – отношение масс основных тел,

$$\omega=1,\quad r_0=\left(\frac{1}{2}-\mu,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)^T,\quad U_2=\begin{Vmatrix}3/4 & k & 0\\ k & 9/4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{Vmatrix},\quad k=\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

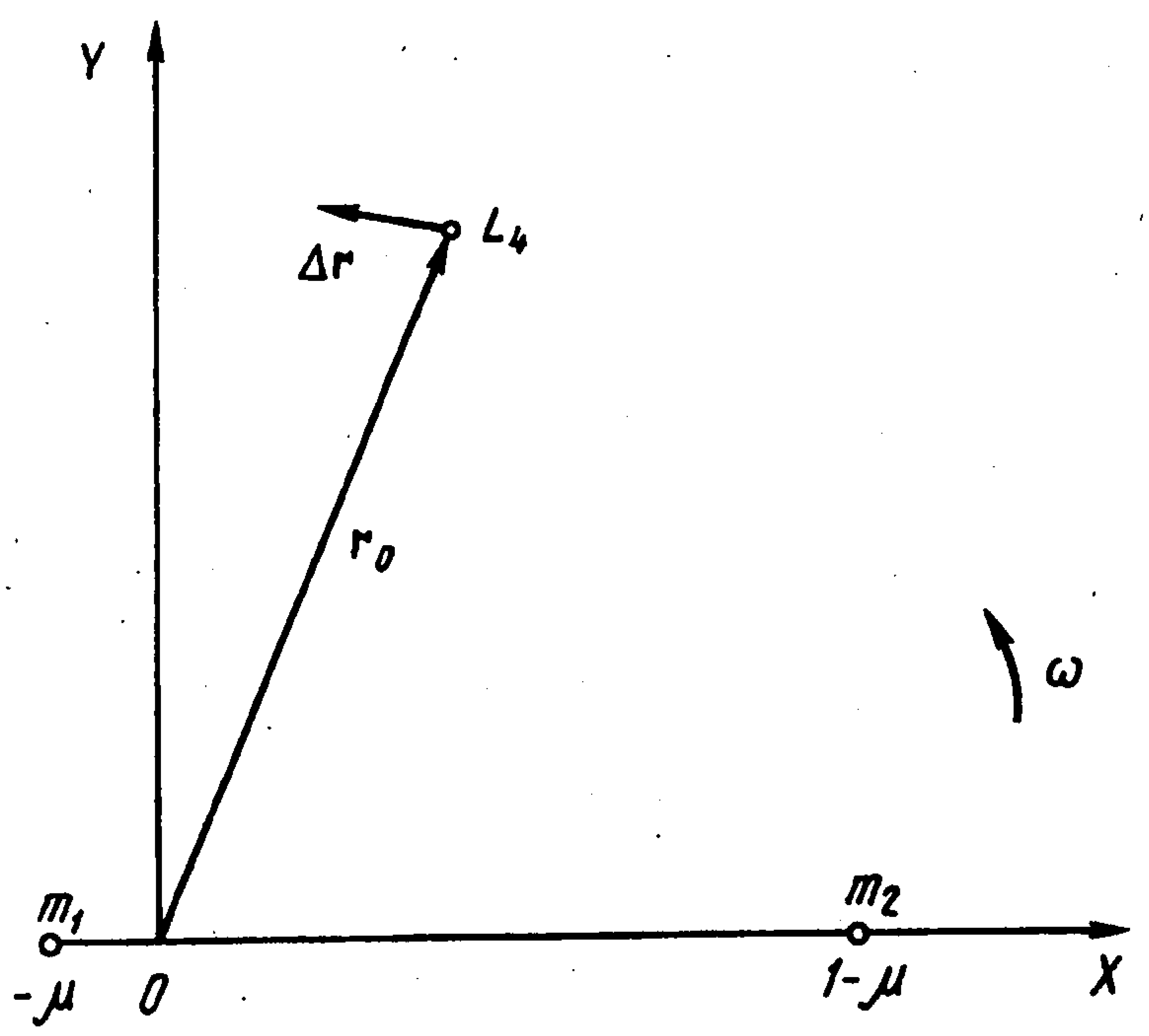
Условия устойчивости в первом приближении (вторая группа неравенств (3.6)) выполнены на интервале $0<\mu<\mu^*=0{,}03852\ldots$ Наличие малого сопротивления среды сказывается на движении трех тел в разной степени: сопротивление пропорционально квадрату диаметра, а масса – его кубу, значит, ускорение обратно пропорционально диаметру. Поэтому в ограниченной постановке можно не учитывать влияние сопротивления на движение основных тел.

Смещение точки либрации L_4 определим по формуле (1.5):

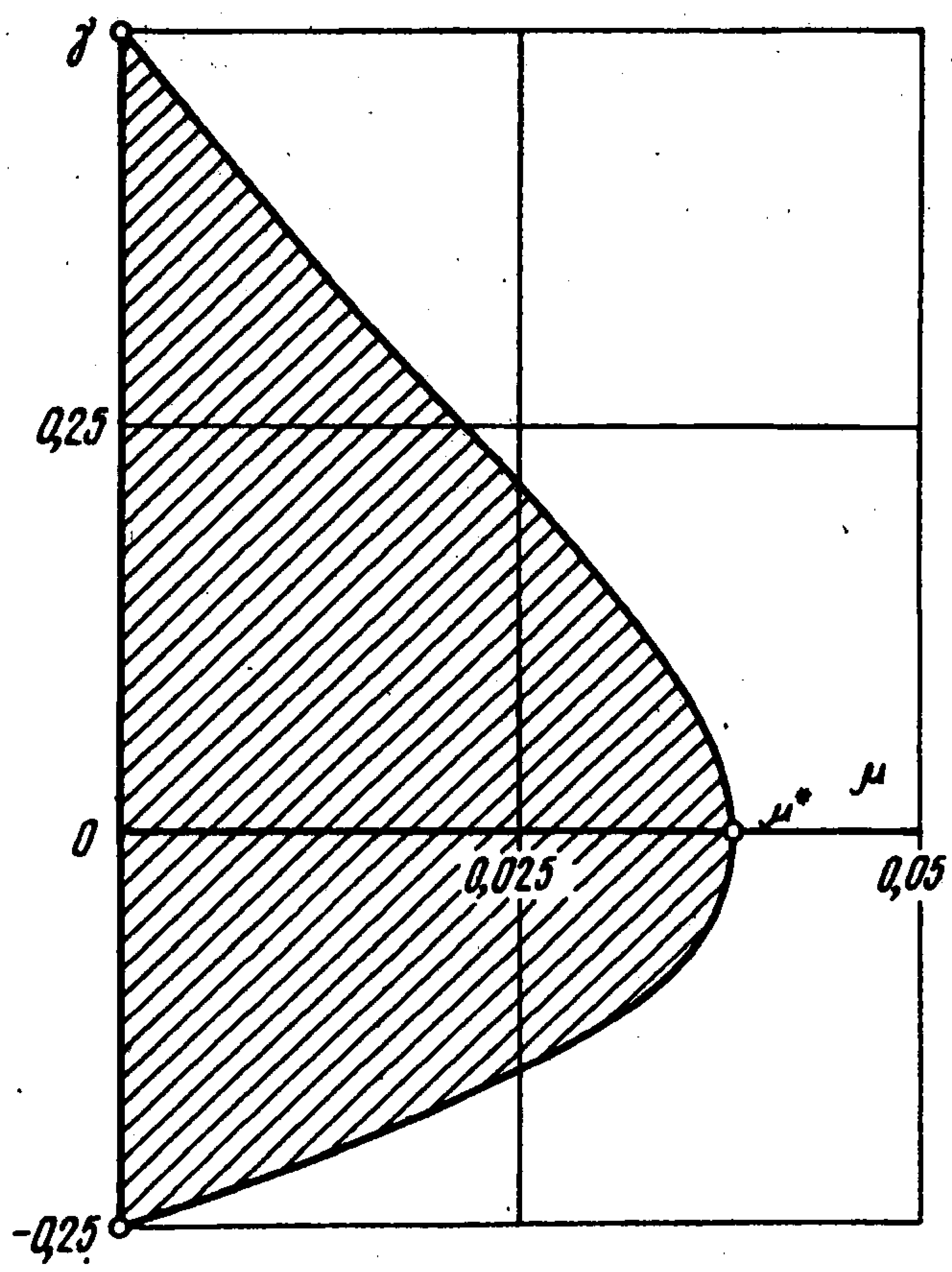
$$\Delta\mathbf{r}=\varepsilon U_2^{-1}\mathbf{r}_0=\varepsilon(-3\sqrt{3}\,(1-\mu+\mu^2),\,3(1-2\mu),\,0)(27/8-2k^2)^{-1} \tag{4.1}$$

Иллюстрацией служит фиг. 1: точка либрации под действием трения смещается в направлении вращения; угол между векторами $\mathbf{r}_0$ и $\Delta\mathbf{r}$ тупой, поэтому $|r^*|<|r_0|$.

Из теорем 1, 3 следует асимптотическая устойчивость смещенной точки либрации при некоторых законах сопротивления. Данный результат довольно неожидан, так как в отсутствие сопротивления к настоящему моменту в пространственной задаче имеются лишь результаты об устойчивости для большинства начальных условий и формальной устойчивости в нерезонансном случае, а также о неустойчивости при резонансах третьего и четвертого порядков [5]. Стабилизирующий характер сил трения, диссипативных по природе, здесь обусловлен наличием "дарового" источника энергии,



Фиг. 1



Фиг. 2

заключенной в основных телах и проявляющейся через неконсервативные позиционные силы.

Первое условие (3.6) эквивалентно одному неравенству

$$\frac{\gamma+1}{|\gamma|} > \left|\frac{1}{2} - \frac{216-17(4D-1)}{108+4(4D-1)}\right| D^{-1/2}, \quad D = \frac{1-27\mu(1-\mu)}{4} \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \tag{4.2}$$

Область асимптотической устойчивости на плоскости параметров μ, γ представлена на фиг. 2. В частности, при пропорциональном сопротивлении ($\gamma = 0$) смещенная точка либрации асимптотически устойчива при всех $\mu \in (0, \mu^*)$, при квадратичном законе ($\gamma = 1/2$) и сопротивлении, пропорциональном квадратному корню из скорости ($\gamma = -1/4$) она неустойчива. В промежуточных случаях имеется интервал асимптотической устойчивости $\mu \in (0, \mu(\gamma))$.

5. Относительное равновесие несвободной частицы. Полученные выше результаты можно обобщить на случай частицы, движущейся по поверхности

$$z = \varphi(x, y) \tag{5.1}$$

Считая связь (5.1) идеальной, запишем уравнения относительного движения в лагранжевой форме. Для кинетической энергии T, измененной силовой функции U_p и обобщенных сил Q имеем такие выражения через обобщенные координаты x, y и их производные:

$$T = \tfrac{1}{2}V^2 = \tfrac{1}{2}[(\varphi_x^2+1)\dot{x}^2 + 2\varphi_x\varphi_y\dot{x}\dot{y} + (\varphi_y^2+1)\dot{y}^2] + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \tag{5.2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2), \quad U_p(x,y) = U(x,y,\varphi(x,y))$$

$$Q_x = S_x + \varphi_x S_z, \quad Q_y = S_y + \varphi_y S_z$$

где φ_x, φ_y – частные производные функции (5.1), S_x, S_y, S_z – компоненты вектора сопротивления $\mathbf{S}$.

Уравнения Лагранжа второго рода в матричной форме таковы:

$$B\ddot{\mathbf{r}} + (\dot{x}B_x + \dot{y}B_y)\dot{\mathbf{r}} - \tfrac{1}{2}\operatorname{grad}(B\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + 2\Omega\dot{\mathbf{r}} - \operatorname{grad} U' = \mathbf{Q} \tag{5.3}$$

$$U' = U_p + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2, \quad \mathbf{r} = (x, y)$$

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1+\varphi_x^2 & \varphi_x\varphi_y \\ \varphi_x\varphi_y & 1+\varphi_y^2 \end{Vmatrix}$$

Здесь B_x, B_y обозначают частные производные матрицы B.

В случае $\mathbf{S} \equiv 0$ положение равновесия $\mathbf{r}_0$ определяется из условия (1.2) стационарности функции U'. При наличии сопротивления (1.3) в формулах (5.2) получаем

$$\mathbf{Q} = -f(V)(B\dot{\mathbf{r}} + \Omega\mathbf{r}) \tag{5.4}$$

По аналогии с (1.5) можно вывести следующую формулу для смещения равновесия под действием силы сопротивления (5.4):

$$\Delta\mathbf{r} = \varepsilon U_2^{-1}\Omega\mathbf{r}_0 + O(\varepsilon^2) \tag{5.5}$$

Формула (5.5) справедлива при условии, что гессиан функции $U_p + {}^1/_2\omega^2(x^2 + y^2)$ отличен от нуля при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

При исследовании устойчивости по первому приближению в уравнении (5.3) второе и третье слагаемые не учитываются. При $\mathbf{S} \equiv \mathbf{0}$ характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\|B\lambda^2 + 2\Omega\lambda - U_2\| = 0 \tag{5.6}$$

Для пропорционального трения $\mathbf{S} = -\varepsilon\mathbf{V}$ характеристический многочлен принимает форму, аналогичную (2.4):

$$F(\varepsilon, \lambda) = \det\|(\lambda^2 + \varepsilon\lambda)B + (2\lambda + \varepsilon)\Omega - U^*_2\| = 0$$

Повторяя доказательство теоремы 1, приходим к такому предложению.

Теорема 1′. Если уравнение (5.6) имеет лишь простые чисто мнимые корни, то при достаточно малом пропорциональном сопротивлении смещенное положение равновесия частицы на поверхности (5.1) асимптотически устойчиво.

При произвольном законе сопротивления можно применить метод, использованный при доказательстве теоремы 3, так как в рассматриваемом случае уравнение (5.6) биквадратное. В итоге получим такой результат.

Теорема 3′. Если уравнение (5.6) имеет лишь простые чисто мнимые корни, то при наличии сопротивления, характеризующегося параметром γ, критерий асимптотической устойчивости выглядит так

$$(1+\gamma)D^{1/2} > |\gamma| \left| \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{(B^{-1}U_2\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)}{r_0^2} \right| \tag{5.7}$$

$$D = [2\omega^2/\Delta_B - (a_1 + a_2)/2]^2 - a_1a_2$$

где $a_{1,2}$ – собственные значения матрицы $B^{-1}U_2$, $\Delta_B = \det\|B\|$.

Следствие. Если матрица U_2 отрицательно определена, то при всех $\gamma > -1$ равновесие асимптотически устойчиво.

Данное утверждение доказывается аналогично следствию из теоремы 3.

Пример (*"центрифуга"*). Тяжелый шарик движется по поверхности, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Z и заданной в относительных координатах уравнением

$$z = \varphi(x, y) = x^2 + \alpha x^3 + \beta y^2, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

Будем считать ускорение свободного падения равным единице. Условия равновесия в пустоте выглядят так

$$\varphi_x = \omega^2 x, \quad \varphi_y = \omega^2 y \tag{5.8}$$

Система (5.8) допускает изолированное решение

$$x_0 = (\omega^2 - 2)/3\alpha, \quad y_0 = 0 \tag{5.9}$$

Допустим, что на шарик действует сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости ($\gamma = 1/2$). Тогда смещение равновесия можно рассчитать по формуле (5.5), где $U_2 = \mathrm{diag}\{2 - \omega^2, \omega^2 - 2\beta\}$. Матрица U_2 обратима, если $\omega^2 \neq 2$ и $\omega^2 \neq 2\beta$, при этом

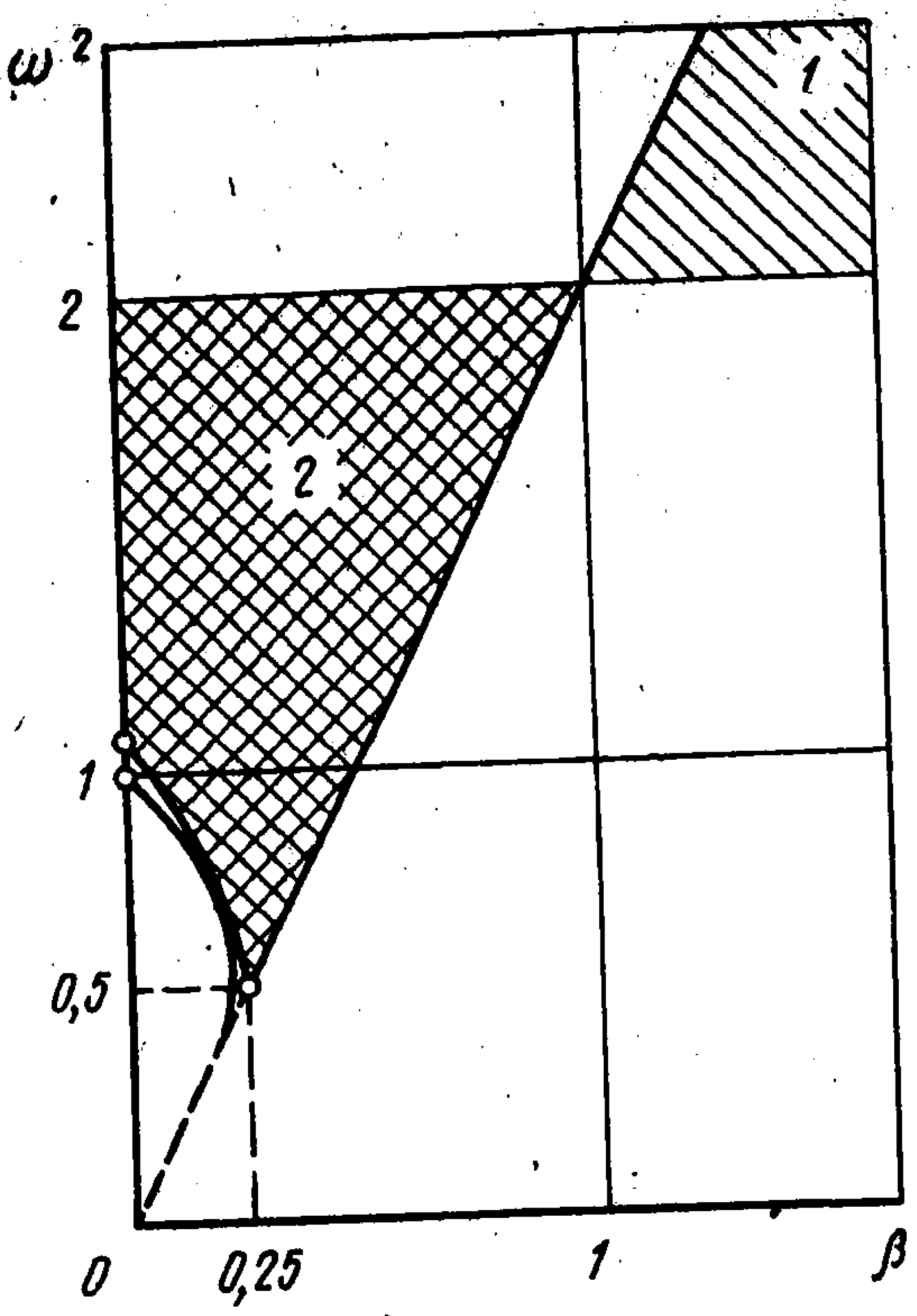
$$\Delta\mathbf{r} = \varepsilon\left(0, \frac{\omega(\omega^2-2)}{3\alpha(\omega^2-2\beta)}\right) + o(\varepsilon)$$

Следовательно, в первом приближении смещение происходит в плоскости $x = \mathrm{const}$, причем если $\det U_2 > 0$, то в направлении, противоположном вращению, иначе – в сторону вращения.

Необходимые условия устойчивости выполняются лишь в первом из этих двух случаев, причем если

$$\beta > \omega^2/2 > 1 \tag{5.10}$$

то по теореме 3' смещенное равновесие асимптотически устойчиво.



Фиг. 3

При выполнении двойного неравенства (5.10) в противоположном смысле необходимые условия устойчивости имеют вид

$$\beta > 1 - 2\omega^2, \quad (\beta - 1 + 2\omega^2)^2 > (\omega^2 - 2)(2\beta - \omega^2) \tag{5.11}$$

Для матрицы B и значений $a_{1,2}$ имеем такие выражения

$$B = \mathrm{diag}\{1 + \omega^4 x_0^2, 1\}, \quad a_1 = 9\alpha^2(2 - \omega^2)[9\alpha^2 + \omega^4(\omega^2 - 2)^2]^{-1}, \quad a_2 = \omega^2 - 2\beta$$

На фиг. 3 построена область устойчивости в плоскости параметров β, ω^2 для значения $\alpha = 1$. Эта область состоит из бесконечного сектора 1, где выполнены достаточные условия (5.10), и криволинейного четырехугольника 2, где выполнены неравенства (5.7), (5.11).

Заметим, что положение равновесия (5.8) устойчиво в пустоте в секторе 1, помимо этого необходимые условия его устойчивости (5.11) выполнены в криволинейном четырехугольнике, несколько большем, чем 2 и ограниченном снизу кривой $\beta = -1 - \omega^2 + 2\omega(2 - \omega^2)^{1/2}$ (см. фиг. 3).

Обсудим еще один случай стесненного движения, когда частица принуждена оставаться на кривой, имеющей в относительных координатах уравнение

$$y = y(x), \quad z = z(x) \tag{5.12}$$

Уравнения движения можно составить по аналогии с (5.2), (5.3) в виде

$$B\ddot{x} + \tfrac{1}{2}B'\dot{x}^2 - \omega^2(x + yy') - U_p' = Q \tag{5.13}$$

$$B = 1 + y'^2(x) + z'^2(x), \quad U_p = U(x, y(x), z(x)), \quad Q = S_X + y'S_Y + z'S_Z$$

Условие равновесия в пустоте выглядит так

$$U_p' + \omega^2(x + yy') = 0$$

Смещение равновесия определяется по формуле

$$\Delta x = \varepsilon\omega U_2^{-1}(y_0 y_0' - x_0) + o(\varepsilon), \quad U_2 = U_p''(x_0) + \omega^2(1 + y_0 y_0'' + y_0'^2)$$

которая справедлива при условии $U_2 \neq 0$.

Поскольку система (5.13) единственную степень свободы, ее гиростабилизация невозможна, и положение равновесия $x = x_0$ устойчиво в случае $U_2 < 0$ и неустойчиво при $U_2 > 0$.

Сопротивление Q раскладывается в первом приближении на сумму потенциальных и диссипативных линейных сил. Согласно теоремам Кельвина–Четаева, для $\gamma > -1/2$ из устойчивости в пустоте следует асимптотическая устойчивость в сопротивляющейся в среде, а в случае $U_2 > 0$ смещенное равновесие также неустойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–17228).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946, 655 с.
2. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 131 с.
3. *Румянцев В.В.* Две задачи о стабилизации движения // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 5–12.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.V.1993