УДК 624.042.8:534.1

© 1994 г. А.В. Койбин

КРУТИЛЬНЫЕ ВИБРАЦИИ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПРИ ВНЕШНЕМ СУХОМ ТРЕНИИ

Задача о вынужденных колебаниях в упругом стержне под воздействием гармонического возмущения и наличия сухого внешнего трения, изменяющегося по закону Кулона [1], решается с использованием приближенных методов разложения по малому параметру и гармонической линеаризации.

1. Рассмотрим круглый стержень, на который действует постоянное по длине давление, нагруженный на одном конце крутящим моментом, изменяющимся по гармоническому закону с частотой ω. Уравнение динамики такого стержня имеет вид

$$\varphi^{\cdot\cdot} - c^2\varphi'' = q\,\mathrm{sign}\,\varphi^{\cdot}, \quad c^2 = G/\rho \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ – угол поворота сечения с координатой x, q – коэффициент, зависящий от величины равномерно распределенного давления на стержень и характеризующий интенсивность крутящего момента, G – модуль сдвига, ρ – плотность материала. Штрихом и точкой обозначены частные производные по координате x и времени t.

Рассматривая стационарные колебания, решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$\varphi(x,t) = A_1 \sin\xi_1 + A_2 \sin\xi_2 \tag{1.2}$$

$$\xi_1 = \omega t + \alpha x + \varphi_1, \quad \xi_2 = \omega t - \alpha x - \varphi_2, \quad \alpha = \omega / c$$

Решение (1.2) при постоянных A_1, A_2, φ_1 и φ_2 удовлетворяет уравнению (1.1) с нулевой правой частью. Решение уравнения (1.1) построим методом вариации произвольных постоянных. Полагая постоянные функциями координат и накладывая дополнительные условия на производные (1.3)

$$A_1' \sin\xi_1 + A_1\varphi_1' \cos\xi_1 + A_2' \sin\xi_2 - A_2\varphi_2 \cos\xi_2 = 0 \tag{1.3}$$

подставим искомое решение (1.2) в уравнение (1.1) и, разрешая систему совместно с условием (1.3), получим систему нелинейных уравнений для нахождения A_1, A_2, φ_1 и φ_2:

$$A_j' = (-1)^{j+1} \frac{q}{\omega c} \cos\xi_j\, \mathrm{sign}\,\varphi^{\cdot}, \quad \varphi_j' = -\frac{q}{A_j \omega c} \sin\xi_j\, \mathrm{sign}\,\varphi^{\cdot}, \quad j = 1,2 \tag{1.4}$$

Решение системы (1.4) в общем виде затруднено. Воспользуемся методом усреднения. Было показано [2, 3], что при слабом демпфировании в рассматриваемом случае колебания можно считать медленно меняющимися как по времени, так и по координате. Поэтому целесообразно в системе уравнений (1.4) провести поочередно усреднение по времени и координате. Введя функцию [3]

$$|\varphi^{\cdot}| = |A_1\omega\cos\xi_1 + A_2\omega\cos\xi_2| \tag{1.5}$$

усредняемую систему (1.4) за период по времени можно записать так:

$$A_j' = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q}{\omega c} \frac{\partial|\varphi^{\cdot}|}{\partial A_j \omega} d\omega t, \quad \varphi_j' = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q}{A_j^2\omega^2 c} \frac{\partial|\varphi^{\cdot}|}{\partial\varphi_j} d\omega t, \quad j = 1,2 \tag{1.6}$$

Осредним в системе (1.6) под знаком дифференциала:

$$\int_0^{2\pi} |\varphi^{\cdot}|\, d\omega t = 4R, \quad \zeta = \psi_1 + \psi_2 \tag{1.7}$$

$$R = \left[A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\zeta\right]^{1/2}, \quad \psi_j = y + \varphi_j$$

и перейдем к безразмерным величинам. Обозначим $\alpha x = y$, $A_j = 4qa_j/(\pi^2\omega^2)$. Тогда при учете усреднения (1.7), систему (1.6) запишем в виде

$$a_j' = (-1)^{j+1}\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial a_j}, \quad \varphi_j' = \frac{1}{2a_j^2}\frac{\partial r}{\partial \varphi_j} \tag{1.8}$$

$$r = \left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\zeta\right)^{1/2}, \quad j = 1,2$$

Усредним по координате $y = \alpha x$. Для этого в системе 1.8 определим среднее значение $\langle r\rangle$ за период по быстрой переменной $\zeta = \psi_1 + \psi_2$, при этом предполагается медленное изменение величин a_j и φ_j. Получим

$$\langle r\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(a_1,a_2,\zeta)a\zeta = \frac{2(a_1+a_2)}{\pi}E(k), \quad k^2 = \frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} \tag{1.9}$$

($E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода).

После подстановки значения $\langle r\rangle$ в систему (1.8) усредненную систему запишем в виде

$$a_j' = \frac{1}{\pi}\left\{(-1)^{j+1}E + \frac{E-K}{2a_j}(a_2 - a_1)\right\}, \quad \varphi_j' = 0, \quad j = 1,2 \tag{1.10}$$

($K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода).

Разложим эллиптические интегралы в ряд по степеням $\varepsilon = (1 - k')/(1 + k')$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$ [4], и подставим эти разложения в систему (1.10), сохраняя слагаемые порядка не выше ε. Тогда придем к системе

$$a_1' = 1/2, \quad a_2' = a_2/(4a_1), \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 0 \tag{1.11}$$

Система (1.11) имеет решение

$$a_1 = 1/2\,y + C_1, \quad a_2 = C_2/(1/2\,y + C_1)^{1/2}, \quad \varphi_1 = C_3, \quad \varphi_2 = C_4$$

Тогда искомое решение (1.2) можно представить в исходных переменных в виде

$$\varphi(x,t) = Dr\sin(\omega t + \Psi) \tag{1.12}$$

$$D = \frac{4q}{\pi\omega^2}, \quad \operatorname{tg}\Psi = \frac{a_1\sin\psi_1 + a_2\sin\psi_2}{a_1\cos\psi_1 + a_2\cos\psi_2}$$

$$r = \left\{\left(1/2\,y + C_1\right)^2 + C_2^2\left(1/2 + C_1\right)^{-1} + 2C_2\left(1/2\,y + C_1\right)^{1/2}\cos(2y + C_3 + C_4)\right\}^{1/2}$$

$$y = \alpha x, \quad \alpha = \omega/c, \quad \psi_1 = y + C_3, \quad \psi_2 = y + C_4$$

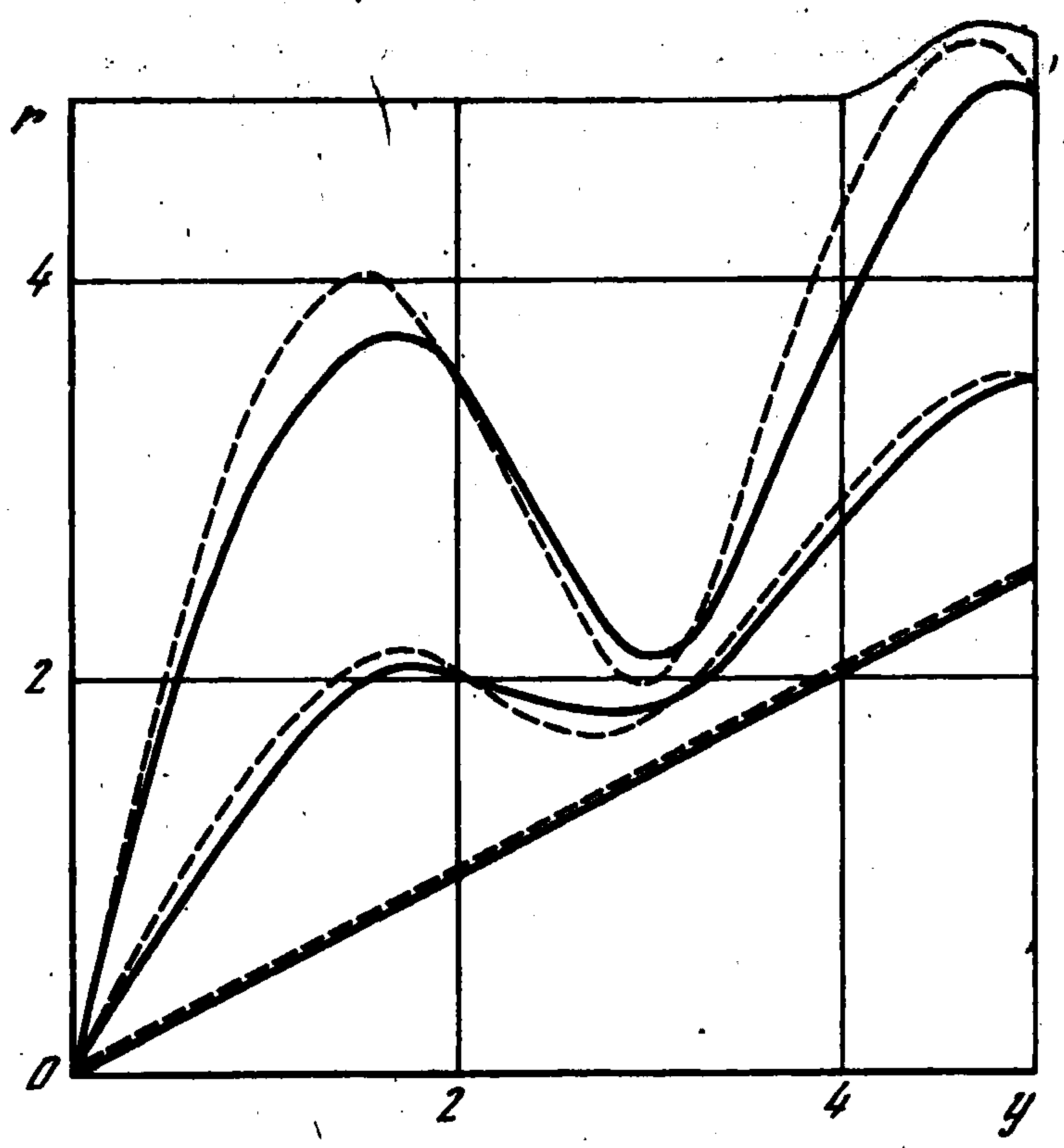
Полученное решение хорошо согласуется с численным решением усредненной системы (1.8). Сравним результаты решения усредненной системы (1.8) и системы (1.11) после усреднения по координате и разложения по малому параметру.

Для определения постоянных интегрирования зададимся граничными условиями. Положим один из концов стержня ($x = 0$) закрепленным, а на другом конце при $x = L$ действует возмущающий момент, изменяющийся по гармоническому закону с амплитудой H и частотой ω. Для простоты возьмем кинематическое задание возмущения. Граничные условия для безразмерных зависимостей можно записать в виде

$$\varphi(0,t) = 0, \quad y = 0$$

$$\varphi(l,t) = h\sin\omega t, \quad h = H/D, \quad \alpha L = l \tag{1.13}$$

$$\varphi(y,t) = a_1\sin(\omega t + y + C_3) + a_2\sin(\omega t - y - C_4)$$



Полагаем, что крутильные вибрации распространяются на всю длину стержня. Параметры системы и внешнего воздействия, обеспечивающие эти условия, найдем после определения постоянных интегрирования.

Граничные условия (1.13) приводят к системе уравнений для отыскания постоянных интегрирования, из которой получим

$$C_2 = -C_1^{3/2}, \quad C_3 = C_4, \quad \operatorname{tg} C_3 = (a_{2l} + a_{1l})(a_{2l} - a_{1l})^{-1} \operatorname{tg} l$$

$$a_{2l} = C_1^{3/2}\left(1/2\, l + C_1\right)^{-1/2}, \quad a_{1l} = 1/2\, l + C_1 \tag{1.14}$$

$$a_{1l}^2 + C_1^3 a_{1l}^{-1} - 2a_{1l}^{1/2} C_1^{3/2} \cos 2l = h^2$$

Здесь h – безразмерная амплитуда возмущающего воздействия, $l = \alpha L$ – безразмерная длина стержня, a_{jl} – значения a_j при $y = l$.

Последнее соотношение (1.14) служит для отыскания постоянной C_1, а через нее выражаются и остальные искомые постоянные интегрирования.

Для безразмерной амплитуды перемещений получим

$$r \approx 1/2\, y + C_1 - C_1^{3/2}\left(1/2\, y + C_1\right)^{-1/2} \cos 2y \tag{1.15}$$

причем приближенное равенство имеет место в связи с малостью отношения $a_2/a_1 = \varepsilon$.

На фигуре представлены зависимости $r(y)$ в безразмерной форме. Сплошными линиями показаны зависимости, полученные из приближенного решения (1.12), штриховыми – результаты численного интегрирования системы (1.8). Сравнение выполнено при одинаковых граничных условиях и постоянного по длине давления для нескольких значений амплитуды h кинетического возмущающего воздействия на торце стержня. Видно, что усреднение по координате x и разложение по малому параметру несильно повлияли на характер зависимости амплитуды от координат по сравнению с результатами численного интегрирования усредненной системы по времени.

2. Решение (1.12) справедливо для коротких стержней, у которых вибрации распространяются на всю длину стержня. Определим параметры системы и внешнего воздействия, обеспечивающие эти условия. Можно заметить из (1.14), что при уменьшении амплитуды возмущающего воздействия h значение постоянной C_1 стремится к нулю. В предельном случае при $C_1 = 0$ решение для амплитуды дается линейной функцией. При этом

$$2h = l, \quad H\pi\omega^2 / 2 = \omega c^{-1} L \tag{2.1}$$

При $l > 2h$, как следует из приближенного решения, вибрации не будут доходить до конца стержня. Из условия (2.1) можно установить границу распространения поля вибраций

$$L_* = H\pi\omega c / (2q) \leq L \tag{2.2}$$

Тогда для крутильных вибраций сечений стержня, для которого выполняется условие (2.2), можно записать

$$\varphi(x,t) = D\left(C_1 - \tfrac{1}{2}\alpha x\right)\sin\left(\omega t - \alpha x - \Psi_0\right) \tag{2.3}$$

Решение (2.3) тождественно удовлетворяет системе (1.8), если ее решение разыскивать в виде (1.2), положив $A_2 = 0$. Постоянные интегрирования C_1 и Ψ_0 определим из граничного условия на возмущенном конце. Например, при кинематических граничных условиях $\varphi(0, t) = H \sin \omega t$ постоянные интегрирования примут значения $DC_1 = H$, $\Psi_0 = 0$, а зона распространения вибраций x_* определится из условия положительности амплитуды

$$x_* = 2C_1\alpha^{-1} = H\pi\omega c / (2q)$$

При $q \to 0$ координата $x_* \to \infty$, что соответствует полному отсутствию демпфирования. При увеличении интенсивности крутящего момента q, зависящего от сил распределенного давления, вибрации локализуются около возмущенного конца стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
2. *Пальмов В.А.* Распространение вибраций в нелинейной диссипативной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 749–756.
3. *Миронов М.В.* О распространении в стержнях продольных колебаний с медленно меняющимися параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 91–96.
4. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
6.XII.1993