

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновом поле сил // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 749–758.
2. Кузьмин П.А. Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 206 с.
3. Уокер Р. Алгебраические кривые. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 236 с.
4. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
5. Солеев А. Выделение ветвей аналитической кривой и многогранники Ньютона // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1305–1307.
6. Новиков М.А. О знакоопределенности аналитических функций. // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 256–261.

Иркутск

Поступила в редакцию
12.III.1993

УДК 531.8

© 1994 г. В.Г. Вербицкий, Л.Г. Лобас

БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ ПРИ ПОСТОЯННЫХ СИЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Исследуются механические системы, в которых взаимодействие катящихся упругих тел с опорной плоскостью описывается известной аксиоматикой [1]. При отсутствии внешних силовых воздействий они относятся к динамическим системам с симметрией [2]. Боковая сила, приложенная в центре масс, и момент сил относительно вертикальной оси рассматриваются как дефекты симметрии. Анализируются бифуркационные множества двух-, трех- и четырехпараметрических семейств стационарных состояний. Предлагается процедура построения бифуркационной поверхности в явной или параметрической формах без построения множества стационарных состояний. Показано, что при различных значениях управляющих параметров бифуркационное множество может иметь особенности, идентифицируемые как катастрофы сборки, ласточкин хвост и бабочка [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из корпуса с неповоротной колесной осью и управляющего колесного модуля, угол поворота которого относительно корпуса есть θ . Обозначим через x и y декартовы координаты центра масс C в инерциальной системе, ϑ – курсовой угол. Введем угловую скорость рысканья $\omega = \vartheta'$ и квазискорости $v = x' \cos \vartheta + y' \sin \vartheta$, $u = -x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta$, являющиеся продольной и поперечной проекциями скорости точки C . Система находится под воздействием боковых реакций опорной плоскости Y_i , являющихся в рамках феноменологического подхода [1] эмпирическими функциями так называемых углов бокового увода (в англоязычной литературе – углов скольжения) δ_i . В случае монотонности функции $Y_i(\delta_i)$ удовлетворяют условиям

$$Y_i(0) = 0, \quad Y_i(-\delta_i) = -Y_i(\delta_i)$$

$$Y_i'(0) = k_i > 0, \quad \lim_{\delta_i \rightarrow +\infty} Y_i(\delta_i) / G_i = \varphi_i$$

$$(G_1 = mgbt^{-1}, \quad G_2 = mgat^{-1}, \quad l = a + b)$$

Пусть m и I – масса и центральный момент инерции системы относительно вертикальной оси, a и b – расстояния точки C до передней и задней колесных осей соответственно, $\delta_1 = \theta - (u + a\omega)v^{-1}$, $\delta_2 = (-u + b\omega)v^{-1}$. Уравнения плоскопараллельного движения одноколейной модели с постоянной скоростью v имеют вид [4]

$$m(u' + v\omega) = Y_1 \cos\theta + Y_2 + Q, \quad I\omega' = aY_1 \cos\theta - bY_2 + M \quad (1.1)$$

где Q – боковая сила, приложенная в центре масс, M – момент сил относительно вертикальной оси.

Особые точки векторного поля фазовых скоростей, задаваемого системой (1.1), являются решениями уравнений

$$mv\omega = Y_1(\delta_1)\cos\theta + Y_2(\delta_2) + Q, \quad Y_1(\delta_1)a\cos\theta - Y_2(\delta_2)b + M = 0 \quad (1.2)$$

$$(\delta_1 = \delta_1(\omega, u, v, \theta), \delta_2 = \delta_2(\omega, u, v))$$

Их количество и характер существенно зависят от параметров v , θ , Q , M . При $Q = 0$ и $M = 0$ была получена [5, 6] простейшая бифуркационная кривая стационарных состояний на плоскости параметров θ и v , соответствующая катастрофе сборки. Задача отыскания решений системы (1.2) сводится [7] в этом случае, по существу, к одному нелинейному уравнению

$$v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) = Y(\delta_2 - \delta_1) \quad (1.3)$$

Бифуркационные значения параметров θ и v определяют многообразие всех касательных к кривой $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$, т.е. двойственную кривую [8]. Точки возврата двойственной кривой соответствуют точкам перегиба исходной кривой.

Изучаемая система при $Q = 0$ и $M = 0$ относится к классу динамических систем с симметрией, определяемому условиями

$$\dot{x} = f(x, p), \quad f(-x, -p) = -f(x, p), \quad x \in R^n, \quad p \in R^m \quad (1.4)$$

Внешние силовые поля могут вызывать дефекты симметрии. В этом случае

$$\dot{x} = f(x, p) + q, \quad q \in R_+^n \quad (1.5)$$

2. Метод построения бифуркационного множества при постоянных силовых воздействиях. Прямой путь состоит в построении множества стационарных состояний графо-аналитическим методом [7] или методом продолжения по параметру [4] и последующем отыскании на этих множествах точек, в которых происходит бифуркация слияния или рождения. Кроме трудоемкости применение такого способа требует знания структуры бифуркационного множества, что при увеличении количества управляющих параметров затруднительно. Предлагаемый ниже метод основан на том, что бифуркационная поверхность многообразия стационарных состояний (1.2) является геометрическим местом точек пространства управляющих параметров, в которых "подвижная прямая", отвечающая данной скорости v , касается "неподвижной кривой" [7]. При этом по положению подвижной прямой определяются значения бифуркационных параметров v и θ . Пробегая таким образом всю неподвижную кривую, получим полную бифуркационную диаграмму.

Обозначив $Y_i^* = Y_i G_i^{-1}$, $Q^* = Q(mg)^{-1}$, $M^* = Ml(mgab)^{-1}$ и ограничившись значениями θ , для которых $\cos\theta \approx 1$, запишем (1.2) в виде

$$Y_1^* = v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) - M^* a l^{-1} - Q^*, \quad Y_1^* = Y_2^* - M^* \quad (2.1)$$

На плоскости переменных $\delta_2 - \delta_1$ и Y_1^* первое уравнение (2.1) определяет подвижную прямую, второе – неподвижную кривую $Y_1^* = Y_2^* - M^*$. Из условий их касания при $Q = 0$

имеем

$$(Y_1^* - M^* al^{-1})(\theta + \delta_2 - \delta_1)^{-1} = dY_1^* / d(\delta_2 - \delta_1) \quad (2.2)$$

$$dY_1^* / d(\delta_2 - \delta_1) = v^2 (gl)^{-1}$$

Отсюда

$$\theta = (Y_1^* + M^* al^{-1}) / (Y_1^*)' - (\delta_2 - \delta_1) \quad (2.3)$$

Следовательно $\theta = \theta(\delta_2 - \delta_1)$. Из второго уравнения (2.2) получаем $v = v(\delta_2 - \delta_1)$. Таким образом, система (2.2) позволяет найти бифуркационные значения θ и v в виде

$$\theta = \theta(\delta_2 - \delta_1, \mu), v = v(\delta_2 - \delta_1, \mu), M = \mu \quad (2.4)$$

Иногда (особенно при $M \neq 0$) в качестве параметра целесообразнее взять Y_1^* . В этом случае сначала по второму уравнению (2.1) следует найти [7]

$$\delta_2 - \delta_1 = G(Y_1^*) \quad (2.5)$$

а затем уже $Y_1^* = Y_1^*(\delta_2 - \delta_1)$. Функция $Y_1^*(\delta_2 - \delta_1)$ является обратной для функции $G(Y_1^*)$. Исходными являются зависимости $Y_1^* = f_1(\delta_1)$, $Y_2^* - M^* = f_2(\delta_2)$. Разрешив их относительно δ_i , находим $\delta_1 = F_1(Y_1^*)$, $\delta_2 = F_2(Y_2^* - M^*)$. Поэтому $G(Y_1^*) = F_2(Y_1^*) - F_1(Y_1^*)$. Разрешить уравнение (2.5) относительно Y_1^* удается не всегда. В последнем случае, используя (2.3) и (2.5), вместо (2.4) из (2.2) получаем параметрические уравнения бифуркационного множества в виде

$$\theta = (Y_1^* + M^* al^{-1})G'(Y_1^*) - G(Y_1^*) \equiv \theta(Y_1^*) \quad (2.6)$$

$$v = [gl / G'(Y_1^*)]^{1/2} \equiv v(Y_1^*), \quad Y_1^* \in (-\varphi_1, \varphi_1)$$

3. Реализация метода в частном случае двух управляющих параметров v и θ . Пусть $Q = 0$ и $M = 0$. Возможность исключения параметра из уравнений (2.2) или (2.6) зависит не только от количества управляющих параметров, но и от способа аппроксимации рокаровской функции $Y_i(\delta_i)$. В частности, для $Y_i = \beta_i \arctg(\alpha_i \delta_i)$ ($i = 1, 2$) нелинейная функция $Y(\delta_2 - \delta_1)$, входящая в определяющее соотношение (1.3), может быть получена аналитически, а уравнение неподвижной кривой – в явном виде:

$$Y = k \arctg[\beta(\delta_2 - \delta_1)], \quad k = 2\varphi\pi^{-1}, \quad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\beta = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}$$

Поэтому уравнение бифуркационной кривой есть

$$\theta = [(1 + w^2) \arctg w - w] \beta^{-1} \quad (3.1)$$

$$w = (v_+^2 v^{-2} - 1)^{1/2}, \quad v_+ = (k\beta gl)^{1/2}$$

Здесь v_+ – критическая скорость прямолинейного движения.

Для $w < 1$ из (3.1) находим

$$\theta = 2(3\beta)^{-1} w^3 + O(w^5), \quad \theta \approx 2(3\beta)^{-1} (v_+^2 v^{-2} - 1)^{3/2} \quad (3.2)$$

Следовательно, кривая (3.1) имеет точку возврата (заострения) первого рода при $\theta = 0$ и $v = v_+$. В малой окрестности острия она аппроксимируется полукубической параболой. Кривая (3.1) изображена штриховой линией на фиг. 1 для $m = 2717$ кг, $I = 4061$ кг · м², $a = 1,14$ м, $b = 1,6$ м, $k_1 = 1177200$ Н/рад, $k_2 = 103500$ Н/рад, $\varphi = 0,8$, $v = 8$ м/с. В ее симметричности относительно прямой $\theta = 0$ отражается одно из свойств систем (1.4).

Точка возврата $(0, v_+)$ бифуркационного множества может быть как безопасной, так и опасной [9] границей области устойчивости в пространстве параметров (матрица соответствующей системы линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет одно нулевое собственное значение). Это свойство можно [4] связать с вещественной бифуркацией слияния или рождения из начала координат фазового пространства пары особых точек; безопасная граница соответствует бифуркации рождения, опасная — слияния. Поэтому согласно геометрической интерпретации определяющего уравнения (1.3) выпуклость графика функции $Y(\delta_2 - \delta_1)$ в окрестности нуля является условием безопасности, а вогнутость — опасности границы.

Смена характера выпуклости при изменении параметров системы возможна с приходом в начало координат точек перегиба (тогда в нуле реализуется высший перегиб), а в соответствующей точке $(0, v_+)$ бифуркационного множества появляется особенность более высокого ранга.

Проанализируем эту возможность для аппроксимации

$$Y_i(\delta_i) = k_i \delta_i (1 + \kappa_i^2 \varphi_i^{-2} \delta_i^2)^{-1/2}, \quad \kappa_i = k_i G_i^{-1}$$

Так как аналитическое представление зависимости $Y(\delta_2 - \delta_1)$ в этом случае не представляется возможным, анализ на выпуклость проведем для обратной функции $G(Y) = \delta_2 - \delta_1$. Находим

$$G(Y) = (\kappa_2^{-1} - \kappa_1^{-1})Y + \frac{1}{2}(\kappa_2^{-1}\varphi_2^{-2} - \kappa_1^{-1}\varphi_1^{-2})Y^3 + \frac{3}{8}(\kappa_2^{-1}\varphi_2^{-4} - \kappa_1^{-1}\varphi_1^{-4})Y^5 + \dots \quad (3.3)$$

Здесь $\kappa_1 > \kappa_2$: имеется критическая скорость v_+ , причем $v_+^2 = \kappa_1 \kappa_2 g l (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1}$. Если график зависимости $G(Y)$ лежит выше касательной в нуле, имеем вогнутость кривой $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$, ниже — выпуклость. Из (3.3) следует, что при $\varphi_1^2 > \kappa_2 \kappa_1^{-1} \varphi_2^2$ граница опасная; условие $\varphi_1^2 \leq \kappa_2 \kappa_1^{-1} \varphi_2^2$ обеспечивает безопасность границы (при $\varphi_1^2 = \kappa_2 \kappa_1^{-1} \varphi_2^2$ коэффициент при третьем члене в (3.3) отрицателен). Так как

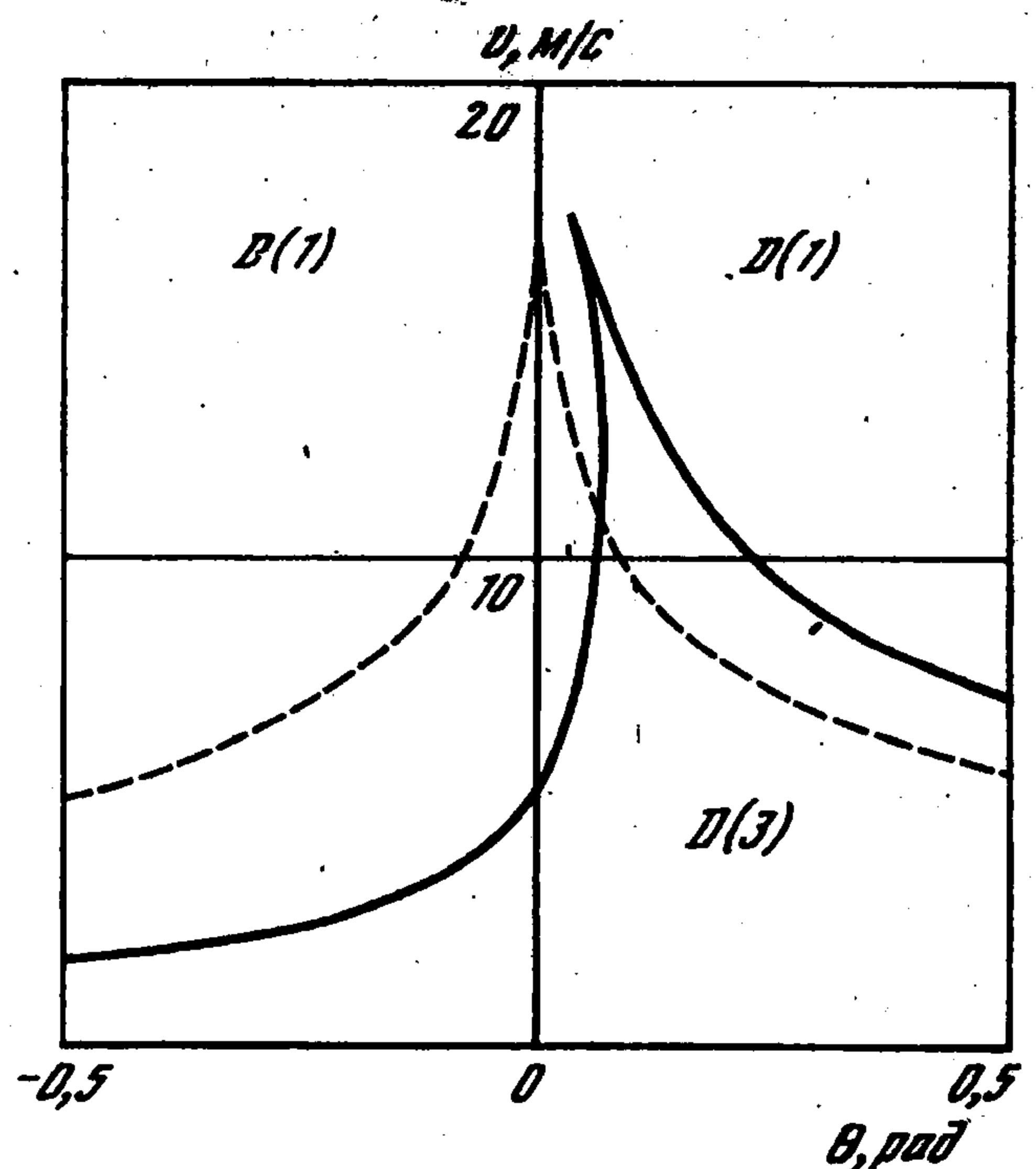
$$G(Y) = \kappa_2^{-1} Y (1 - \varphi_2^{-2} Y^2)^{-1/2} - \kappa_1^{-1} Y (1 - \varphi_1^{-2} Y^2)^{-1/2}$$

$$G''(Y) = 0 \Rightarrow Y_0^2 = (\kappa_1^{2/5} \varphi_1^{4/5} - \kappa_2^{2/5} \varphi_2^{4/5}) (\kappa_1^{2/5} \varphi_1^{-6/5} - \kappa_2^{2/5} \varphi_2^{-6/5})^{-1}$$

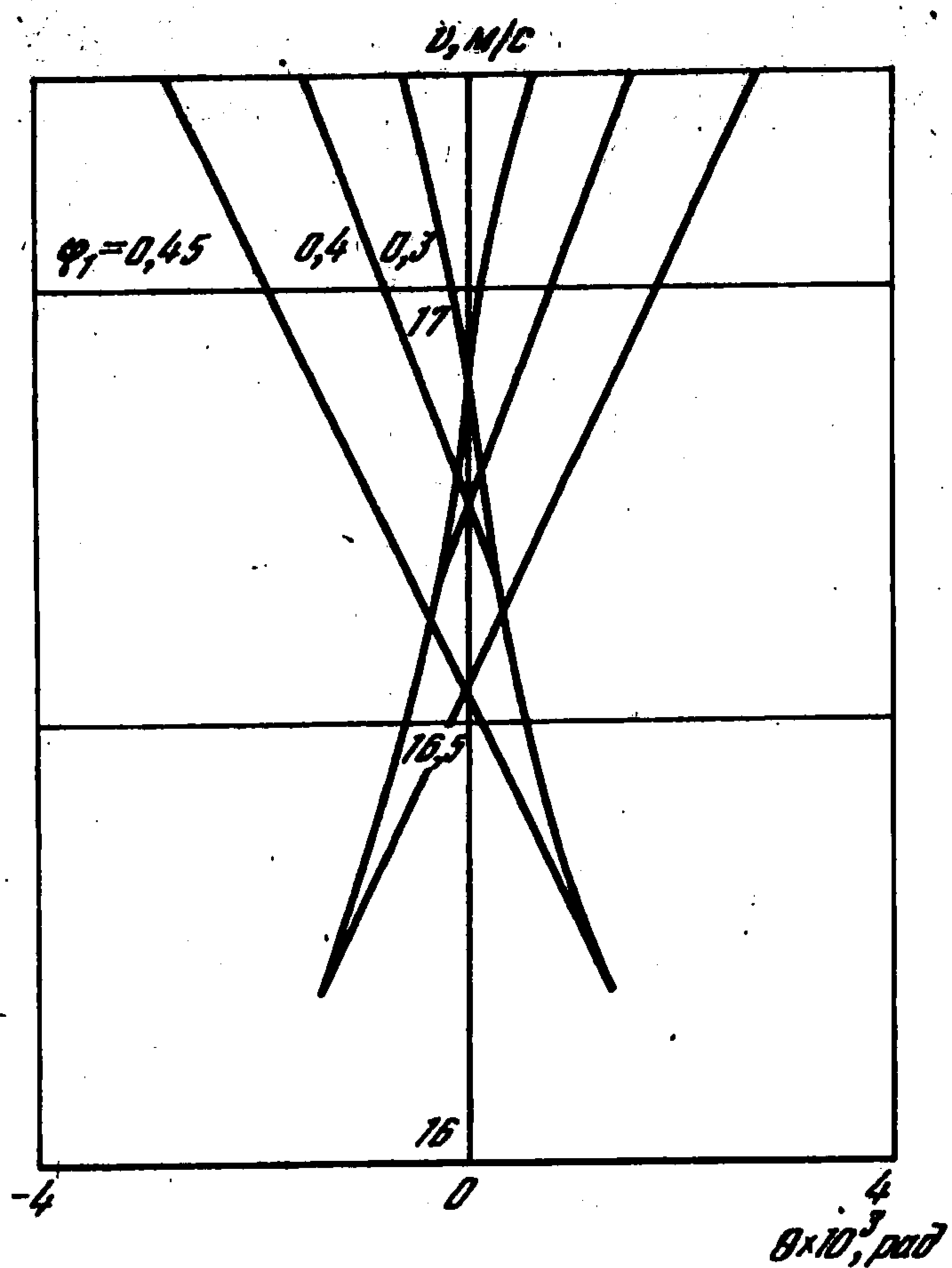
то при $\varphi_2 \kappa_2^{1/2} \kappa_1^{-1/2} < \varphi_1 < \varphi_2$ подтверждается существование двух точек перегиба в окрестности начала координат ($Y_0^2 > 0$). При $\varphi_1^2 = \kappa_2 \kappa_1^{-1} \varphi_2^2$ в начале координат имеется высший перегиб; следовательно, в соответствующей точке бифуркационного множества реализуется особенность "бабочка", выворачивающая сборку в двойственную сборку. Этот процесс иллюстрирует фиг. 2, на которой $\varphi_2 = 0,8$. Наличие трех точек возврата у бифуркационного множества объясняется тем, что каждой точке перегиба неподвижной кривой отвечает точка возврата бифуркационной кривой.

4. Влияние боковой силы ($M = 0$). Из (2.1) следует, что при $Q > 0$ подвижная прямая опускается на Q^* . Это эквивалентно повороту передних колес на угол $\theta_* = -Q^* g l v^{-2}$. Максимальное значение боковой силы, при котором существует устойчивый стационарный режим, есть

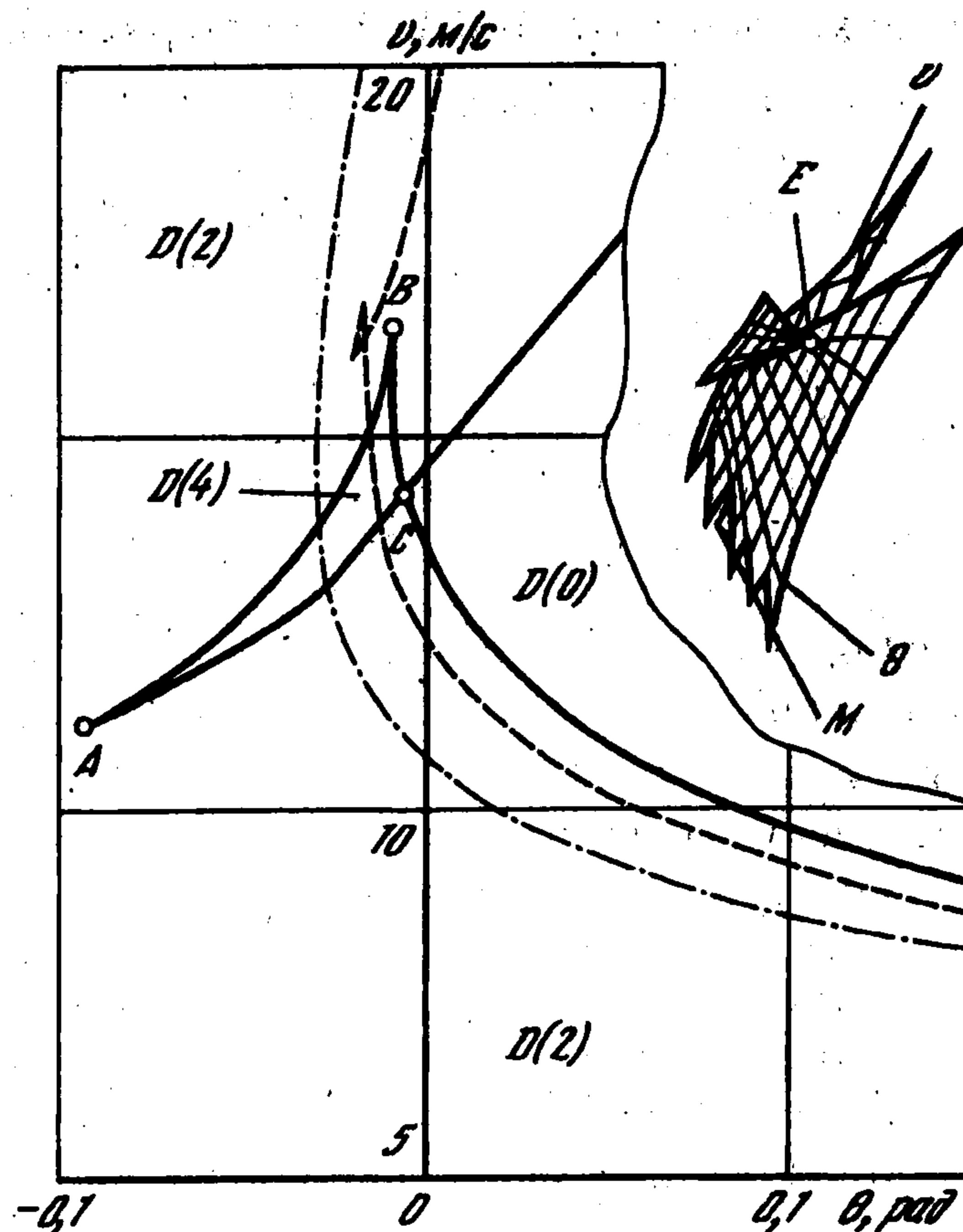
$$Q_{\max}^* = |k \arctg(v_+^2 v^{-2} - 1)^{1/2} - \beta v^2 (g l)^{-1} (v_+^2 v^{-2} - 1)^{1/2}|$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Бифуркационное множество описывается соотношением

$$\theta = Q^* g l v^{-2} + \beta^{-1} [(1 + w^2) \operatorname{arctg} w - w] \quad (4.1)$$

получающимся из (3.1) заменой θ на $\theta - Q^* g l v^{-2}$. На фиг. 1 показаны сечения поверхности (4.1) плоскостями $Q^* = 0$ (штриховая кривая) и $Q^* = 0,5$ (сплошная кривая). Их конфигурация показывает, что боковая сила, не меняя качественно бифуркационное множество, приводит к значительным количественным изменениям. В частности, $v_+ = 16,9$ м/с при $Q^* = 0$, тогда как при $Q^* = 0,5$ имеем $v_+ = 5,1$ м/с. Поворотом передних колес в надлежащую сторону на подходящий угол можно устранить влияние боковой силы и получить желательный режим движения.

В области $D(3)$ имеется один устойчивый стационарный режим и два неустойчивых, в области $D(1)$ — один неустойчивый. Острию соответствует трехкратная особая точка фазовой плоскости, оно идентифицирует катастрофу сборки в многообразии стационарных состояний.

Положительные параметры Q или M нарушают симметрию. Система при их наличии относится к классу (1.5), а бифуркационное множество становится асимметричным относительно прямой $\theta = 0$.

5. Влияние момента сил ($Q = 0$). В этом случае, вообще говоря, возможно лишь параметрическое представление бифуркационной поверхности. Для указанных выше числовых значений на фиг. 3 изображены сечения поверхности (2.4) плоскостями $M^* = 0,12$ (сплошная линия), $M^* = 0,24$ (штриховая), $M^* = 0,4$ (штрихпунктирная линия). Бифуркационная диаграмма показывает, что при изменении M в трехмерном пространстве управляющих параметров θ , v и M реализуется катастрофа ласточкин хвост. Символами $D(k)$, где $k = 0, 2, 4$, обозначены области, в которых имеется k особых точек. При переходе границы бифуркационного множества количество особых точек уменьшается или увеличивается на две. Точки A , B и C соответствуют остриям сборок и являются трехкратными особыми точками; область, заключенная между ребрами, соответствует четырем особым точкам. При некотором значении параметра M (применительно к фиг. 3 оно лежит в интервале $0,24 < M^* < 0,4$) реализуется четырехкратная особая точка, которая соответствует особенности ласточкин хвост. Общий вид бифуркационной поверхности

приведен в правой части фиг. 3. Точка E порождает четырехкратную особую точку в фазовом пространстве. Наличие именно этой точки идентифицирует катастрофу ласточкин хвост.

6. Заключение. Для систем с качением в рамках феноменологического подхода [1] при классической монотонной зависимости $Y_i(\delta_i)$ и $M = 0, Q = 0$ определяющая кривая $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$ имеет точку простого перегиба в нуле, а бифуркационное множество — точку возврата $(0, v_+)$ (особенность A_3 — "сборка" [8]). В окрестности точки сборки бифуркационное множество определяется зависимостью (3.2). В точках $(\theta(v), v)$ происходит апериодическая потеря устойчивости стационарных режимов, которым на опорной плоскости отвечают круговые траектории. Критическая скорость для круговых режимов убывает по полукубическому относительно θ закону.

Наличие момента сил $M < mgabt^{-1}(\varphi_1 + \varphi_2)$ приводит к появлению еще одной точки возврата в бифуркационном множестве, которая сливается с первой в точке (θ_*, v_*, M_*) (особенность A_4 [8] — "ласточкин хвост"). В соответствующей точке функция $Y(\delta_2 - \delta_1, M) \equiv Y_1^*(\delta_2 - \delta_1)$ имеет высший перегиб, а уравнение $v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) - M^*at^{-1} = Y(\delta_2 - \delta_1, M)$ — корень кратности 4. Бифуркационные значения параметров образуют поверхность, разбивающую пространство на три области с разным количеством стационарных режимов: 4, 2 и 0.

Таким образом, в рассматриваемых механических системах устойчивым образом встречаются лишь каспидные особенности: в двухпараметрическом (v, θ) , семействе стационарных состояний — сборка, трехпараметрическом (v, θ, M) — ласточкин хвост, четырехпараметрическом $(v, \theta, \varphi_1, \varphi_2)$ — "бабочка".

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 365 с.
3. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
4. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 232 с.
5. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркации и устойчивость стационарных движений колесного экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 57–63.
6. Troger H., Steindl A. Nonlinear Stability and Bifurcation Theory. Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. 407 p.
7. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 944–948.
8. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
9. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.X.1993