УДК 531.36

© 1994 г. М.А. Новиков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В ЗАДАЧЕ БРУНА

Предлагается критерий знакоопределенности неоднородных форм и доказывается совпадение достаточных и необходимых условий устойчивости вращений тяжелого твердого тела вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции.

1. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений твердого тела вокруг наименьшей главной оси инерции в задаче Бруна совпадают с достаточными и имеют вид

$$C^2\omega^2 \geqslant \mu S^2, \quad S=\sqrt{A(C-B)}+\sqrt{B(C-A)}$$

Приведенный результат делает более мягким полученное ранее [1] условие устойчивости. Доказательство строгого неравенства имеется в [2].

Доказательство сформулированной теоремы опирается на критерии знакоопределенности неоднородных форм

$$V(x) = V_{2\beta}(x_1, x_2, ..., x_n) + V_*(x) \tag{1.1}$$

$$x \in R^{n+l}, \quad n \geqslant 1, \quad l \geqslant 1, \quad \beta \geqslant 1$$

где $V_{2\beta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – знакоопределенная форма наименьшей степени 2β от n переменных, $V_*(x)$ – полином из членов выше степени 2β. Очевидно, знакоопределенность $V(x)$ эквивалентна отсутствию отличных от нуля действительных решений уравнения $V(x) = 0$ в окрестности начала координат. Такие решения [3–5] можно искать в виде параметрических ветвей:

$$x_j = \sum_{|p|=L}^{\infty} a_{jp}t^p, \quad j=1,2,...,n \tag{1.2}$$

$$x_{n+1} = t_1^M, \; x_{n+2} = t_2^M, \; ..., \; x_{n+l} = t_l^M$$

$$t=(t_1,t_2,...,t_l), \quad t^p = t_1^{p_1} \times t_2^{p_2} \times ... \times t_l^{p_l}$$

$$a_{jp} \in R, \quad |p| = p_1 + p_2 + ... + p_l, \quad L > M$$

где p_j – целые неотрицательные числа.

Подставляя (1.2) в (1.1), получим

$$V(x(t)) = V_1(a_{jp}, t) = A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M) + ... \tag{1.3}$$

где $Q(L)$ – степень формы низшего порядка переменных $t_1, t_2, ..., t_l$ в полиноме $V_1(a_{jp}, t)$. Значение M первоначально можно полагать равным наименьшему общему кратному (НОК) чисел 1, 2, ..., 2β, и в дальнейшем уточнять, сокращая Q, L, M на их наибольший общий делитель D. Величина L определяется в процессе построения ветви решения $V(x) = 0$ из условия

$$A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M) = 0 \tag{1.4}$$

На первом шаге полагаем $L = M + 1$. Если решением (1.4) является единственное $a_{jp} \equiv 0$ ($j = 1, 2, ..., n$), то необходимо принять $L = M + 2$ и продолжить процесс отыскания отличных от нуля a_{jp}.

Приведем дробь Q/M к несократимой Q_1/M_1, тогда вопрос о существовании или отсутствии действительных ветвей у $V(x) = 0$ решает

Теорема 2. В случае, если

1°: а) $Q_1 = 2\alpha + 1$ (α – целое) или б) $Q_1 = 2\alpha$ и форма $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M)$ по переменным $t_1, t_2, ..., t_l$ при всех вещественных a_{jp} знакопеременна, то форма $V_1(a_{jp}, t)$ знакопеременна (существуют действительные ветви решения $V(x) = 0$);

2°: $Q_1 = 2\alpha$ и форма $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M) \gg 0$ при любых $a_{jp} \in R$, то форма $V_1(a_{jp}, t)$ знакоопределенна (нет действительных ветвей $V(x) = 0$);

3°: $Q_1 = 2\alpha$ и форма $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M) \geqslant 0$ при всех $a_{jp} \in R$, то форма $V_1(a_{jp}, t)$ может быть знакоопределенной или знакопеременной, что устанавливается привлечением членов порядка выше L разложения (1.2) и членов порядка выше Q в (1.3) (действительные ветви решения $V(x) = 0$ могут существовать).

Сформулированная теорема является обобщением теоремы 1 [6], где было $n = 1$, t – скалярная переменная. Из знакоопределенности $V_1(a_{jp}, t)$ при всех вещественных $a_{jp} \in R$ следует знакоопределенность $V(x)$, а из знакопеременности $V_1(a_{jp}, t)$, хотя бы на одной из ветвей (1,2) следует знакопеременность $V(x)$.

При решении вопроса о знакоопределенности желательно по возможности понизить степень M в (1.2), что облегчает анализ выражения $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M)$ как полинома по t более низкой степени.

Теорема 3. При анализе знакоопределенности формы (1.1) для случая $\beta = 1$ в разложении (1.2) всегда можно считать $M = 1$.

Доказательство. Полагаем M=НОК (1,2) = 2. Так как выражение $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M)$ определено полиномами $V_{2\beta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ и некоторой частью мономов $V_*(x)$, а разложения $x_1, x_2, ..., x_n$ начинаются с членов порядка L, то первоначально $Q = 2L$. Рассмотрим далее 2 возможности: 1) $L = 2\alpha$, 2) $L = 2\alpha + 1$ (α – целое).

При четных L значение D = НОД (M, L, Q) = НОД ($2, 2\alpha, 4\alpha$) = 2, тогда приведенные величины $M_2 = M/D = 1$, $L_2 = \alpha$, $Q_2 = 2\alpha$, являются наименьшими возможными значениями степеней в (1.2) и выражении ряда (1.3). Следовательно, при четных L можно сразу полагать $M = 1$, сводя дальнейшее исследование к использованию теоремы 2.

При нечетных L форма (1.3) знакопеременна (п. 1° а теоремы 2), так как здесь $Q/M = L = 2\alpha + 1$. Докажем знакопеременность $V_1(a_{jp}, t)$, полагая в рядах (1.2) сразу $M = 1$. так как на структуру $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M)$, могут влиять некоторые слагаемые из $V_*(x)$, то для любого монома $x_1^{p_1} \times x_2^{p_2} \times ... \times x_n^{p_n} \times x_{n+1}^{q_1} \times x_{n+2}^{q_2} \times ... \times x_{n+l}^{q_l}$ полинома $V_*(x)$ при обозначении $a_1 = p_1 + p_2 + ... + p_n$, $a_2 = q_1 + ... + q_l$, имеет место соотношение $Q = 2L \leqslant a_1 L + a_2 M$. При этом для мономов $V_*(x)$, дающих вклад в выражение $A_{Q(L)}(a_{jp}, t, L, M)$, выполняется равенство

$$2L = a_1 L + a_2 M \tag{1.5}$$

Заметим, что при $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $L > M$ последнее равенство допускает только два значения a_1: 1) $a_1 = 1$, 2) $a_1 = 0$. При нечетных значениях L величина $a_1 = 1$ исключается из рассмотрения, так как из (1.5) следует $L = 2a_2$, что не имеет места для целых L, a_2. Следовательно, нечетным L соответствует $a_1 = 0$. Так как для параметрического решения $L/M = (2\alpha + 1)/2$, то при $M_1 = 1$ очевидно $L_1 > \alpha$. Полагая $L_1 = \alpha + 1$ для мономов, удовлетворяющих равенству (1.5), найдем оценку $Q_1 = Q(\alpha + 1) = a_1 L_1 + a_2$. Из тождества $2Q_1 = 2L + a_1 = 2L$, при имеющем здесь место $a_1 = 0$, получим $Q_1 = L = 2\alpha + 1$. В данном случае $Q_1/M_1 = 2\alpha + 1$, и по п. 2° теоремы 2 получим знакопеременную форму $V_1(a_{jp}, t)$. Так как исследование проведено для всех L, то теорема 3 доказана.

2. Перейдем к доказательству теоремы 1. Движение твердого тела в задаче Бруна описывается уравнениями Эйлера–Пуассона [1, 2]. Для них известны четыре первых интеграла:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \mu(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = \text{const}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}$$

$$V_2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \mu(BC\gamma_1^2 + CA\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2) = \text{const}$$

$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

В качестве невозмущенного движения рассмотрим перманентное вращение тела вокруг главной вертикальной оси с наибольшим моментом инерции ($C > A, C > B$):

$$p = q = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad r = \omega = \text{const}, \quad \gamma_3 = 1 \tag{2.1}$$

Выраженные через отклонения от решения (2.1) $\varepsilon_1 = p$, $\varepsilon_2 = q$, $\varepsilon_3 = r - \omega$, $\eta_1 = \gamma_1$, $\eta_2 = \gamma_2$, $\eta_3 = \gamma_3 - 1$ интегралы уравнений возмущенного движения запишутся в виде

$$V_{01} = A\varepsilon_1^2 + B\varepsilon_2^2 + C\varepsilon_3^2 + \mu(A\eta_1^2 + B\eta_2^2 + C\eta_3^2) + 2C\omega\varepsilon_3 + 2\mu C\eta_3 = \text{const} \tag{2.2}$$

$$V_{11} = r_1 + C\varepsilon_3\eta_3 + C\varepsilon_3 + C\omega\eta_3 = \text{const} \qquad r_1 = A\varepsilon_1\eta_1 + B\varepsilon_2\eta_2$$

$$V_{21} = A^2\varepsilon_1^2 + B^2\varepsilon_2^2 + C^2\varepsilon_3^2 - \mu(BC\eta_1^2 + CA\eta_2^2 + AB\eta_3^2) + 2C^2\omega\varepsilon_3 - 2\mu AB\eta_3 = \text{const}$$

$$V_{31} = k + \eta_3^2 + 2\eta_3 = 0 \qquad (k = \eta_1^2 + \eta_2^2)$$

Теорема 1 будет доказана, если из (2.2) удастся составить знакоопределенную функцию при соответствующих значениях ω. С этой целью последовательным исключением переменных уменьшим их число до четырех. Найдем из последнего уравнения (2.2)

$$\eta_3 = -1 + (1-k)^{1/2} = -k/2 - k^2/8 - k^3/16 - \ldots$$

и подставим в остальные интегралы:

$$V_{02} = A\varepsilon_1^2 + B\varepsilon_2^2 + \mu[(A-C)\eta_1^2 + (B-C)\eta_2^2] + C(\varepsilon_3^2 + 2\omega\varepsilon_3) = \text{const}$$

$$V_{12} = r_1 + C\varepsilon_3(1 - k/2 - k^2/8 - \ldots) + C\omega(-k/2 - k^2/8 - \ldots) = \text{const}$$

$$V_{22} = A^2\varepsilon_1^2 + B^2\varepsilon_2^2 + \mu[B(A-C)\eta_1^2 + A(B-C)\eta_2^2] + C^2(\varepsilon_3^2 + 2\omega\varepsilon_3) = \text{const}$$

Поскольку постоянная интеграла V_{12} в отличие от V_{31} не фиксирована, заметим, что по теореме Финслера [2] для знакоопределенности связки интегралов $V_{02} - \lambda_2 V_{22} - \lambda_1 V_{12}$ необходимо и достаточно знакоопределенности $V_{02} - \lambda_2 V_{22}$ при соответствующих вещественных λ_2 на многообразии $V_{12} = 0$. Поэтому, исключая ε_3 при помощи равенства $V_{12} = 0$ из интегралов V_{02} и V_{22} получим функции:

$$W(\varepsilon, \eta) = V_{22} - CV_{02} = A(A-C)\varepsilon_1^2 + B(B-C)\varepsilon_2^2 + \mu(A-C)(B-C)k = \text{const}$$

$$W_0(\varepsilon, \eta) = V_{02}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3(\varepsilon, \eta)) = \sum_{i=1}^{\infty} W_{2i}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2)$$

Здесь

$$W_2 = AC\varepsilon_1^2 + BC\varepsilon_2^2 + \mu C[(A-C)\eta_1^2 + (B-C)\eta_2^2] - 2C\omega r_1 + C^2\omega^2 k,$$

$$W_4 = (C\omega k - r_1)^2, \quad W_6 = kW_4, \ ..., \ W_{2j+2} = kW_{2j}$$

Из этих функций составим связку

$$K(\varepsilon,\eta,\lambda) = CW_0(\varepsilon,\eta) - \lambda W(\varepsilon,\eta)$$

при произвольной вещественной величине λ.

Анализ показывает, что квадратичная форма последней связки вырождается при $\omega = \omega_*$, $\lambda = \lambda_*$, таких, что

$$C^2\omega_*^2 = \mu S^2, \quad \lambda_* = -1 + k_1 k_2$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{A}{C-B}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{B}{C-A}}$$

и принимает вид

$$S^2(k_1\varepsilon_1 - \sqrt{\mu}\eta_1)^2 + S^2(k_2\varepsilon_2 - \sqrt{\mu}\eta_2)^2$$

Так как квадратичная часть ряда $K(\varepsilon, \eta, \lambda_*)$ при $\omega = \omega_*$ знакопостоянна, то для исследования знакоопределенности связки необходимо привлечь члены $W_4(\varepsilon, \eta)$ и критерии знакоопределенности неоднородных форм. Вводя новые переменные $t_i = k_i\varepsilon_i - \sqrt{\mu}\eta_i$, $t_{i+2} = \eta_i (i = 1,2)$, получим $\varepsilon_i = (t_i + \sqrt{\mu}t_{i+2})/k_i$.

В результате подстановки ε_1, ε_2 в выражение $K(\varepsilon, \eta, \lambda_*)$ приведем его к виду

$$K_2(t) = S^2(t_1^2 + t_2^2) + (m_1 t_3^2 + m_2 t_4^2 + m_3 t_1 t_3 + m_4 t_2 t_4)^2 + ...$$

$$m_i = \sqrt{\mu} m_{i+2}, \quad i = 1,2; \quad m_3 = \sqrt{B(C-A)}/S^{-1}, \quad m_4 = \sqrt{A(C-B)}/S^{-1}$$

где многоточием обозначены члены шестого и последующих порядков.

Поскольку для рассматриваемой задачи $\beta = 1$, $n = l = 2$, то, полагая по теореме 3 значения $M = 1$, $L = 2$, представим t_1, t_2 в виде рядов по параметрам t_3 и t_4:

$$t_1 = a_1 t_3^2 + a_2 t_3 t_4 + a_3 t_4^2 + ...$$

$$t_2 = b_1 t_3^2 + b_2 t_3 t_4 + b_3 t_4^2 + ...$$

с неизвестными вещественными коэффициентами a_j, $b_j (j = 1, 2, 3)$, при этом многоточием обозначены члены выше второго порядка по t_3 и t_4. В результате подстановки последней параметризации в $K_2(t)$ получим наименьший порядок разложения $Q(L) = 4$, а соответствующая форма низшего порядка принимает вид

$$A_4(a_{jP}, t, L, M) = (m_1 t_3^2 + m_2 t_4^2)^2 + S^2(a_1 t_3^2 + a_2 t_3 t_4 + a_3 t_4^2)^2 + S^2(b_1 t_3^2 + b_2 t_3 t_4 + b_3 t_4^2)^2 \tag{2.3}$$

Чтобы применить теорему 2, будем искать вещественные a_j, $b_j (j = 1, 2, 3)$, обращающие при $t_3^2 + t_4^2 > 0$ форму A_4 в нуль. Так как последняя представляет собой сумму квадратов, то это равносильно решению системы, полученной приравниванием нулю выражений в круглых скобках правой части равенства (2.3). Поскольку $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, то эта система совместна лишь при $t_3 = t_4 = 0$. При требовании $t_3^2 + t_4^2 > 0$ и произвольных вещественных a_j, $b_j (j = 1, 2, 3)$, имеем $A_4 \gg 0$. Таким образом, форма $A_4(a_j, b_j; t_3, t_4; 2; 1)$ положительно определена. По теореме 2 неоднородная форма $K(\varepsilon, \eta, \lambda_*)$ также положительно определена. Следовательно, теорема 1 доказана.

Автор благодарит В.Д. Иртегова за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В.* Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновом поле сил // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 749–758.
2. *Кузьмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 206 с.
3. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 236 с.
4. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
5. *Солеев А.* Выделение ветвей аналитической кривой и многогранники Ньютона // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1305–1307.
6. *Новиков М.А.* О знакоопределенности аналитических функций. // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 256–261.

Иркутск

Поступила в редакцию
12.III.1993

УДК 531.8

© 1994 г. **В.Г. Вербицкий, Л.Г. Лобас**

БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ ПРИ ПОСТОЯННЫХ СИЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Исследуются механические системы, в которых взаимодействие катящихся упругих тел с опорной плоскостью описывается известной аксиоматикой [1]. При отсутствии внешних силовых воздействий они относятся к динамическим системам с симметрией [2]. Боковая сила, приложенная в центре масс, и момент сил относительно вертикальной оси рассматриваются как дефекты симметрии. Анализируются бифуркационные множества двух-, трех- и четырехпараметрических семейств стационарных состояний. Предлагается процедура построения бифуркационной поверхности в явной или параметрической формах без построения множества стационарных состояний. Показано, что при различных значениях управляющих параметров бифуркационное множество может иметь особенности, идентифицируемые как катастрофы сборки, ласточкин хвост и бабочка [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из корпуса с неповоротной колесной осью и управляющего колесного модуля, угол поворота которого относительно корпуса есть θ. Обозначим через x и y декартовы координаты центра масс C в инерциальной системе, ϑ – курсовой угол. Введем угловую скорость рысканья $\omega = \vartheta^{\cdot}$ и квазискорости $\upsilon = x^{\cdot}\cos\vartheta + y^{\cdot}\sin\vartheta$, $u = -x^{\cdot}\sin\vartheta + y^{\cdot}\cos\vartheta$, являющиеся продольной и поперечной проекциями скорости точки C. Система находится под воздействием боковых реакций опорной плоскости Y_i, являющихся в рамках феноменологического подхода [1] эмпирическими функциями так называемых углов бокового увода (в англоязычной литературе – углов скольжения) δ_i. В случае монотонности функции $Y_i(\delta_i)$ удовлетворяют условиям

$$Y_i(0) = 0, \quad Y_i(-\delta_i) = -Y_i(\delta_i)$$

$$Y_i'(0) = k_i > 0, \quad \lim_{\delta_i \to +\infty} Y_i(\delta_i) / G_i = \varphi_i$$

$$(G_1 = mgbl^{-1}, \quad G_2 = mgal^{-1}, \quad l = a + b)$$