

УДК 539.375

© 1994 г. В.Б. Пеньков

О ЗАЛЕЧИВАЮЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЕ

Построено строгое решение зеркально-симметричной задачи о смыкании берегов трещины под действием сжимающей нагрузки, приложенной на удалении. Обоснована правомерность применения метода возмущений для решения краевой задачи Римана, когда отображающая функция отличается от более простой малой поправкой. Таким путем удалось получить асимптотическое решение задачи о залечивающейся трещине и построить второе приближение для эпюр нормальных напряжений на контуре. Применение метода возмущений неожиданно оказалось весьма удобным, поскольку последовательность краевых задач Римана имеет общий матричный коэффициент и различается лишь векторами свободных членов. По этой причине каноническое решение однородной задачи строится один раз.

1. Метод граничных представлений. Для анализа полей двумерных упругих, вязкоупругих и вязкопластических сред удобен метод граничных представлений основных характеристик напряженно-деформированного состояния на контуре тела [1–3], ориентирующийся на односвязные области, отображаемые на канонические рациональными функциями. Он состоит в следующем: любая линейная комбинация основных механических величин на границе представляет собой условие линейного сопряжения краевых значений аналитических функций. Например, для плоских задач теории упругости справедливо представление

$$\sigma_n = s_1 \Omega_1^+ - s_2 \Omega_2^+ - s_1 \Omega_1^- + s_2 \Omega_2^-, \quad 2i\tau_n = s_1 \Omega_1^+ + s_2 \Omega_2^+ - s_1 \Omega_1^- - s_2 \Omega_2^- \quad (1.1)$$

$$2\sigma_\tau = 3s_1 \Omega_1^+ + s_2 \Omega_2^+ + s_1 \Omega_1^- + 3s_2 \Omega_2^-$$

$$4\mu A \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \theta} \sigma^m |Q|^4 = \kappa A^2 \sigma^m \bar{Q}^2 \Omega_1^+ + Q^2 \Omega_2^+ + A^2 \sigma^m \bar{Q}^2 \Omega_1^- + \kappa Q^2 \Omega_2^-$$

$$v_\vartheta = \text{Im}[A(u + iv)], \quad A = e^{-i\vartheta}$$

где $\sigma_n, \tau_n, \sigma_\tau$ – компоненты тензора напряжений v_ϑ – проекция перемещения $u + iv$ на направление, составляющее с осью y угол ϑ значения s_1, s_2, m определяются конформным отображением (ord означает порядок полинома)

$$\omega(\xi) = \frac{Q_0(\xi)}{Q(\xi)}, \quad \omega'(\xi) = \frac{s(\xi)}{Q^2(\xi)}, \quad s_1 = \frac{1}{s(\sigma)}, \quad s_2 = \frac{\sigma^m}{s(\sigma)} \quad (1.2)$$

$$m_0 = \text{ord } Q_0(\xi), \quad m_1 = \text{ord } Q(\xi), \quad m = \max(m_0 + m_1 - 1, 2m_1 - 2)$$

Пара линейных граничных условий на дуге границы соответствует матричной краевой задаче Римана

$$\Omega_1^+ = G\Omega_1^- + g, \quad \sigma \in \partial D^+; \quad G = [g_{ij}]_{2 \times 2}, \quad g = \{g_1, g_2\} \quad (1.3)$$

Определитель матрицы-коэффициента имеет постоянный модуль, равный единице, вследствие симметрии аналитических функций:

$$\Omega_{1,2}^-(\xi) = \xi^m \overline{\Omega_{2,1}^+(\xi^{-1})} \quad (1.4)$$

Если граница канонической области разбита на систему дуг и на каждой из дуг удержаны индивидуальные линейные граничные условия, то в целом это составляет краевую задачу Римана с разрывным матричным коэффициентом с кусочно-рациональными элементами. Законы распределения механических величин по границе тела могут быть рассчитаны непосредственно по формулам граничного представления.

Одной и той же краевой задаче Римана можно поставить в соответствие множество систем сингулярных интегральных уравнений. Полный индекс уравнений отличается от индекса исходной краевой задачи на величину индекса базовой задачи.

2. Постановка задачи о залечивающейся трещине. Совместим план физической плоскости со щелью и комплексную плоскость $z = x + iy$. Контур ∂D щели разбит на пару непересекающихся дуг L_1, L_2 , причем любой точке $t \in L_1$ посредством контакта поставлена во взаимно-однозначное непрерывное соответствие точка $\gamma \in L_2$.

Условия контактирования берегов таковы ($U(t)$ – вектор перемещения в точке t):

$$\sigma_n(t) + i\tau_n(t) = \sigma_n(\gamma) + i\tau_n(\gamma), \quad U(t) - U(\gamma) = \gamma - t \quad (2.1)$$

Рассмотрим класс областей, отображаемых на круг рациональной функцией

$$z = \omega(\xi) = A\xi^{-1} + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n \quad (2.2)$$

В силу требования залечиваемости и ограничений на малость линейных и угловых перемещений щель должна иметь пару точек возврата на контуре; поперечник щели мал по сравнению с ее размахом.

Для одного класса таких щелей коэффициенты можно подобрать из условий: аффиксы точек пересечения контура с осью u имеют модули порядка $\delta \ll A$, где A – параметр размаха; порядок касания берегов в точках возврата таков, что позволяет определить все коэффициенты α_j .

В простейшем случае двоякосимметричной щели отображение (1.2) имеет нечетные действительные коэффициенты [4]. В частности, при $n = 3$ всем перечисленным требованиям удовлетворяет функция

$$\omega(\xi) = A_0 \left[\left(\frac{1}{2} + \delta \right) \xi^{-1} + \left(\frac{1}{2} - 2\delta \right) \xi + \delta \xi^3 \right] \quad (2.3)$$

отображающая контур щели размахом $2A_0$ и поперечником 4δ на окружность.

В случае зеркальной симметрии задача (2.1) выражается в форме краевой задачи Римана:

$$\Omega^+ = \frac{1}{\kappa c - \bar{c}} \begin{vmatrix} -(c + \bar{c}) & -(\kappa + 1)\bar{c}\sigma^\varepsilon \\ (\kappa + 1)\bar{c}\sigma^\varepsilon & \kappa(c + \bar{c}) \end{vmatrix} \Omega^- - 2\mu \frac{c + \bar{c}}{\kappa c - \bar{c}} \begin{vmatrix} c\sigma^{\alpha-1} \\ -\bar{c}\sigma^{\beta+1} \end{vmatrix}, \quad \sigma \in \partial D^+ \quad (2.4)$$

$$c = \sigma\omega'(\sigma), \quad \varepsilon = 2 - \alpha + \beta, \quad \alpha = 2, \quad \beta = \max(0, n - 1)$$

3. О построении строгого решения. Запишем характеристические функции матричного коэффициента G в уравнении (2.4)

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{\kappa\bar{c} - c}{\kappa c - \bar{c}} \quad (3.1)$$

Представление матрицы G в канонической форме Жордана (R – полиномиальная матрица)

$$G = RHR^{-1}, \quad H = \text{diag}\{h_1, h_2\}, \quad R(\xi) = \begin{vmatrix} -\xi & \xi c(\xi) \\ -\xi^n & \xi^n \bar{c}(\xi^{-1}) \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

позволяет построить однородную краевую задачу

$$N^+ = HN^-, \quad N^\pm(\xi) = \det R(\xi) R^{-1}(\xi) \Omega^\pm(\xi)$$

являющуюся совокупностью задач Римана для каждой из кусочно-аналитических функций $N_{1,2}^\pm(\xi)$ с коэффициентами $1, h_2$ на окружности ∂D^+ . Каноническое решение первой есть $x_1^\pm = 1$; для построения канонического решения второй разложим на сомножители многочлен

$$f(\xi) = \xi^n [\kappa \bar{c}(\xi^{-1}) + c(\xi)] = p^+(\xi) p^-(\xi) p^0(\xi).$$

Каждый из сомножителей имеет нули только в идентифицированных символами областях D^\pm , либо на границе ∂D^+ . Тогда рациональная функция h_2 будет иметь представление

$$h_2(\xi) = \xi^r \frac{p^+(\xi) p^-(\xi)}{\bar{p}^-(\xi^{-1}) \bar{p}^+(\xi^{-1})} i^\rho$$

$$r = \rho + r^+ + r^- = 2n, \quad \rho = \text{ord } p^0(\xi), \quad r^\pm = \text{ord } p^\pm(\xi)$$

поскольку обращаться в нуль $f(\xi)$ может только в стационарных точках отображения, которые находятся на действительной оси в силу действительности коэффициентов отображения. Следовательно, имеет место представление $p^0(\xi) = (\xi^2 - 1)^k$, благодаря которому получаем

$$p^0(\xi) / \bar{p}^0(\xi^{-1}) \equiv (-1)^k \xi^{2k}, \quad 2k = \rho$$

Индекс равен $2r$, а каноническое решение дается формулами [5]:

$$x_2^+(\xi) = \xi^r p^-(\xi) / \bar{p}^+(\xi^{-1}), \quad x_2^-(\xi) = i^\rho \bar{p}^-(\xi^{-1}) / p^+(\xi) \quad (3.3)$$

Фундаментальное решение однородной задачи для уравнения (2.4) можно записать в виде

$$Z^\pm(\xi) = R(\xi) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2^\pm(\xi) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

(R, x_2^\pm определены в соответствии с (3.2), (3.3)). Как известно [6], имея фундаментальное решение, за конечное число шагов можно построить каноническое X^\pm , причем все операции заменимы одним матричным множителем M , действующим на Z^\pm справа [7]:

$$X^\pm = Z^\pm M \quad (3.5)$$

Частные индексы этого решения: $0, 2r$. Поскольку функции $\Omega_{1,2}^\pm$ должны иметь на бесконечности порядки не выше $n + 1$, то общее решение задачи (2.5) таково:

$$\Omega^\pm(\xi) = X^\pm(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{[X^+]^{-1} g}{\sigma - \xi} d\sigma + P(\xi) \right\} \quad (3.6)$$

где столбец многочленов характеризуется порядками $n + 1, n + 1 + 2r$.

Благодаря тому, что матрица X^+ рациональна (так как рациональны Z^+, M) и вектор g (определяемый в соответствии с (2.4)) также имеют рациональные составляющие, подынтегральное выражение разложимо на простейшие слагаемые и квадратуры берутся в конечном виде.

Частное решение выделяется с наложением требований симметрии функций и разложения функций Колосова – Мухелишвили в окрестности начала координат в известной форме.

Таким образом, эффективность построения решения predetermined в каждом конкретном случае. Трудность связана с чисто техническим вопросом разложения многочленов на простейшие сомножители.

4. Асимптотическое решение. Даже в относительно простом случае отображения (2.3) выполнение операций по разложению многочленов на сомножители и решение задачи в параметрической форме (т.е. без фиксирования численных значений для параметров A, a_1, a_2 и др.) проблематично.

Наличие малого параметра δ позволяет применить для решения краевой задачи Римана метод возмущений. Действительно, функция (2.3) может быть представлена в виде

$$\omega(\xi) = \omega_0(\xi) + \delta\omega_1(\xi) \quad (4.1)$$

$$\omega_0(\xi) = \frac{1}{2}A_0(\xi^{-1} + \xi), \quad \omega_1(\xi) = A_0(\xi^{-1} - 2\xi + \xi^3)$$

Как видно, функция $\omega_0(\xi)$ дает отображение плоскости с разрезом $[-1, 1]$ по действительной оси на круг; функция $\omega_1(\xi)$ вносит поправку в форму области.

Покажем, что применение метода возмущений не нарушает класса функций, используемых при решении краевой задачи Римана.

Асимптотическое разложение $U = U_0 + \delta U_1 + \delta^2 U_2 + \dots$ решения бигармонического уравнения приводит к последовательности бигармонических уравнений $\Delta^2 U_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Каждая из функций U_k может быть представлена через парциальные комплексные потенциалы в соответствии с формулой Гурса

$$U_k = \text{Re}\{\bar{z}\varphi_k(z) + \chi_k(z)\}$$

причем в силу линейности удовлетворяются разложения:

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi_1 + \delta^2\varphi_2 + \dots, \quad \chi = \chi_0 + \delta\chi_1 + \delta^2\chi_2 + \dots$$

Поскольку основные потенциалы Φ, Ψ , используемые при обосновании формул граничного представления, выражаются через φ, χ линейным образом, то для них также справедливо:

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi_1 + \delta^2\Phi_2 + \dots, \quad \Psi = \Psi_0 + \delta\Psi_1 + \delta^2\Psi_2 + \dots$$

где каждая парциальная аналитическая функция выражается через свой прототип образом, идентичным для всей суммы в целом.

Благодаря действительности параметра δ , сохраняется форма функций, определяемых по симметрии:

$$\bar{\Phi}(\xi^{-1}) = \bar{\Phi}_0(\xi^{-1}) + \delta\bar{\Phi}_1(\xi^{-1}) + \delta^2\bar{\Phi}_2(\xi^{-1}) + \dots$$

$$\bar{\Psi}(\xi^{-1}) = \bar{\Psi}_0(\xi^{-1}) + \delta\bar{\Psi}_1(\xi^{-1}) + \delta^2\bar{\Psi}_2(\xi^{-1}) + \dots$$

Для мероморфных функций F_1, F_2 [1-3], в определение которых входит кроме функций Колосова – Мусхелишвили еще и отображающая функция (ограничимся случаем, когда функция ω состоит из двух слагаемых, см. (4.1)), имеем следующие асимптотические выражения, в которых для краткости опущены аргументы ξ, ξ^{-1} (аргумент ξ^{-1} в обязательном порядке участвует в функциях, выделенных символом комплексного сопряжения):

$$\begin{aligned} F_s &= F_{s0} + \delta F_{s1} + \delta^2 F_{s2} + \dots \quad (s = 1, 2) \\ F_{10} &= \omega_0\Phi_0, \quad F_{1k} = \omega_1\Phi_{k-1} + \omega_0\Phi_k \quad (k = 1, 2, \dots) \\ F_{20} &= -\omega'_0\Phi_0 + \xi^2\omega_0\Phi'_0 + \xi^2\omega'_0\Psi_0 \\ F_{2k} &= -(\omega'_1\Phi_{k-1} + \omega'_0\Phi_k) + \xi^2(\omega_1\Phi'_{k-1} + \omega_0\Phi'_k) + \xi^2(\omega'_1\Psi_{k-1} + \omega'_0\Psi_k) \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тем не менее аналитические функции

$$\Omega_s^\pm = \Omega_{s0}^\pm + \delta \Omega_{s1}^\pm + \delta^2 \Omega_{s2}^\pm + \dots \quad (s = 1, 2)$$

сохраняют ту форму, в соответствии с которой они определены [1-3]:

$$\Omega_{1k}^+ = \xi^\alpha F_{1k}, \quad \Omega_{2k}^+ = \xi^\beta F_{2k}, \quad \xi \in D^+ \quad (4.3)$$

$$\Omega_{1k}^- = \xi^\alpha \bar{F}_{2k}, \quad \Omega_{2k}^- = \xi^\beta \bar{F}_{1k}, \quad \xi \in D^-$$

причем каждая из функций $\Omega_{sk}^\pm (s = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots)$ имеет на бесконечности порядок $\alpha + \beta$. Остается в силе общая форма условий симметрии:

$$\Omega_{sk}^-(\xi) = \xi^{\alpha+\beta} \bar{\Omega}_{1-s, k}^+(\xi^{-1}) \quad (s = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь условия на границе тела, приведенные к краевой задаче Римана для двух пар функций $\Omega^\pm = \{\Omega_1^\pm, \Omega_2^\pm\}$:

$$\Omega^+ = G\Omega^- + g, \quad \sigma \in \partial D^+$$

Раскладывая матричный коэффициент в асимптотический ряд, можем записать

$$G = G_0 + \delta G_1 + \delta^2 G_2 + \dots, \quad g = g_0 + \delta g_1 + \delta^2 g_2 + \dots$$

после чего краевая задача распадается на последовательность задач:

$$\Omega_0^+ = G_0 \Omega_0^- + g_0, \quad \Omega_1^+ = G_0 \Omega_1^- + (g_1 + G_1 \Omega_0^-) \quad (4.5)$$

$$\Omega_2^+ = G_0 \Omega_2^- + (g_2 + G_2 \Omega_0^- + G_1 \Omega_1^-), \dots \quad (\sigma \in \partial D^+)$$

Таким образом, применение метода возмущений к решению линейной краевой задачи Римана состоит в том, что последовательно строятся решения парциальных краевых задач (4.5), причем выделения частных решений из общих подчинено традиционным условиям симметрии (4.4) и условием представимости функций Φ_0, Ψ_0 в окрестности начала координат в форме:

$$\Phi_0 = \Gamma - J\xi + \dots, \quad \Psi_0 = \Gamma' + \kappa \bar{J}\xi + \dots, \quad (4.6)$$

поскольку параметр δ в фигурирующие здесь коэффициенты не входит. Напоминаем, что постоянные Γ, Γ' задают напряженное состояние на бесконечности, а вектор J пропорционален главному вектору внешних сил, приложенных к контуру D .

Раскладывая коэффициенты задачи (2.4) в асимптотический ряд, получаем в случае отображения (2.3)

$$G_0 = \begin{vmatrix} 0 & -\bar{\sigma}^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad g_0 = 0 \quad (4.7)$$

$$G_1 = \frac{c_1 + \bar{c}_1}{\kappa c_0 - \bar{c}_0} \begin{vmatrix} -1 & -\bar{\sigma}^2 \\ \kappa \sigma^2 & \kappa \end{vmatrix}, \quad g_1 = 2\mu \frac{c_1 + \bar{c}_1}{\kappa c_0 - \bar{c}_0} \sigma \begin{vmatrix} -c_0 \\ \sigma^2 \bar{c}_0 \end{vmatrix}$$

$$c = c_0 + \delta c_1, \quad c_0 = \sigma \omega'_0, \quad c_1 = \sigma \omega'_1$$

Первая из парциальных задач (4.5) однородна:

$$\Omega_1^+ = -\bar{\sigma}^2 \Omega_2^-, \quad \Omega_2^+ = -\sigma^2 \Omega_1^-, \quad \sigma \in \partial D^+ \quad (4.8)$$

и имеет в классе функций четвертого порядка общее решение:

$$\Omega_{10}^+ = P_0^1 + P_2^1 \xi^2, \quad \Omega_{10}^- = -P_0^2 \xi^{-2} + P_2^2 + P_4^2 \xi^2 + P_6^2 \xi^4 \quad (4.9)$$

$$\Omega_{20}^+ = P_0^2 + P_2^2 \xi^2 + P_4^2 \xi^4 + P_6^2 \xi^6, \quad \Omega_{20}^- = -P_0^1 \xi^2 - P_2^1 \xi^4$$

Здесь оставлены только четные действительные коэффициенты (циклическая симметрия кратности 2 и зеркальная симметрия; обоснование этих положений по отношению к функциям Колосова – Мухелишвили дано в [8]).

Условия симметрии (4.3) и представления (4.6), в которых $J = 0$, а Γ, Γ' – действительные из-за указанной симметрии, позволяют заключить:

$$P_2^1 = -P_0^1 = \frac{1}{2} A_0 \Gamma, \quad P_0^2 = P_6^2 = 0, \quad P_4^2 = -P_2^2 = -\frac{1}{2} A_0 \Gamma'$$

что выделяет частное решение:

$$\Omega_{10}^+ = \Gamma f(\xi), \quad \Omega_{20}^+ = \Gamma' \xi^2 f(\xi) \tag{4.10}$$

$$\Omega_{10}^- = -\Gamma' f(\xi), \quad \Omega_{20}^- = -\Gamma \xi^2 f(\xi), \quad f(\xi) = \frac{1}{2} A_0 (\xi^2 - 1)$$

Вторая парциальная задача (4.5) имеет тот же матричный коэффициент, что и первая. Это сразу характеризует ее не как систему, но как совокупность задач Римана. Ее свободный член после элементарных преобразований с участием только что найденного основного приближения принимает вид

$$g_1 + G_1 \Omega_0^- = -\frac{3}{\kappa + 1} A_0 (\sigma^2 - 1) (\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) \left\| \begin{array}{l} 2\mu - (\Gamma' + \Gamma) \\ \sigma^2 [2\mu + \kappa(\Gamma' + \Gamma)] \end{array} \right\| \tag{4.11}$$

Общее решение задачи (здесь Ω_1^\pm – вектор второго приближения)

$$\Omega_1^+ = G_1 \Omega_1^- + (g_1 + G_1 \Omega_0^-), \quad \sigma \in \partial D^+$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}^+ &= -b_1 (\xi^4 - \xi^2 - 1) + Q_0^1 + Q_2^1 \xi^2 \\ \Omega_{21}^- &= -b_1 - Q_0^1 \xi^2 - Q_2^1 \xi^4, \quad b_1 = 3A_0 (2\mu - \Gamma' - \Gamma) / (\kappa + 1) \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{21}^+ &= -b_2 (\xi^6 - \xi^4 - \xi^2 + 1) + Q_0^2 + Q_2^2 \xi^2 + Q_4^2 \xi^4 + Q_6^2 \xi^6 \\ \Omega_{11}^- &= -Q_0^2 \xi^{-2} - Q_2^2 - Q_4^2 \xi^2 - Q_6^2 \xi^4, \quad b_2 = 3A_0 (2\mu + \kappa\Gamma' + \kappa\Gamma) / (\kappa + 1) \end{aligned}$$

Из условий (4.3), (4.6) получаем коэффициенты

$$\begin{aligned} Q_0^1 &= A_0 [6\mu - 3\Gamma' + (\kappa - 2)\Gamma] / (\kappa + 1), \quad Q_2^1 = A_0 \Gamma \\ Q_0^2 &= 3A_0 [2\mu + \kappa\Gamma' + (2\kappa + 1)\Gamma] / (\kappa + 1), \quad Q_4^2 = A_0 (\Gamma' - 2\Gamma) \\ Q_2^2 &= -A_0 [6\mu - (4\kappa + 1)\Gamma' + (\kappa - 2)\Gamma] / (\kappa + 1), \quad Q_6^2 = -3A_0 \Gamma \end{aligned} \tag{4.13}$$

чем завершается процесс выделения частного решения в задаче второго приближения.

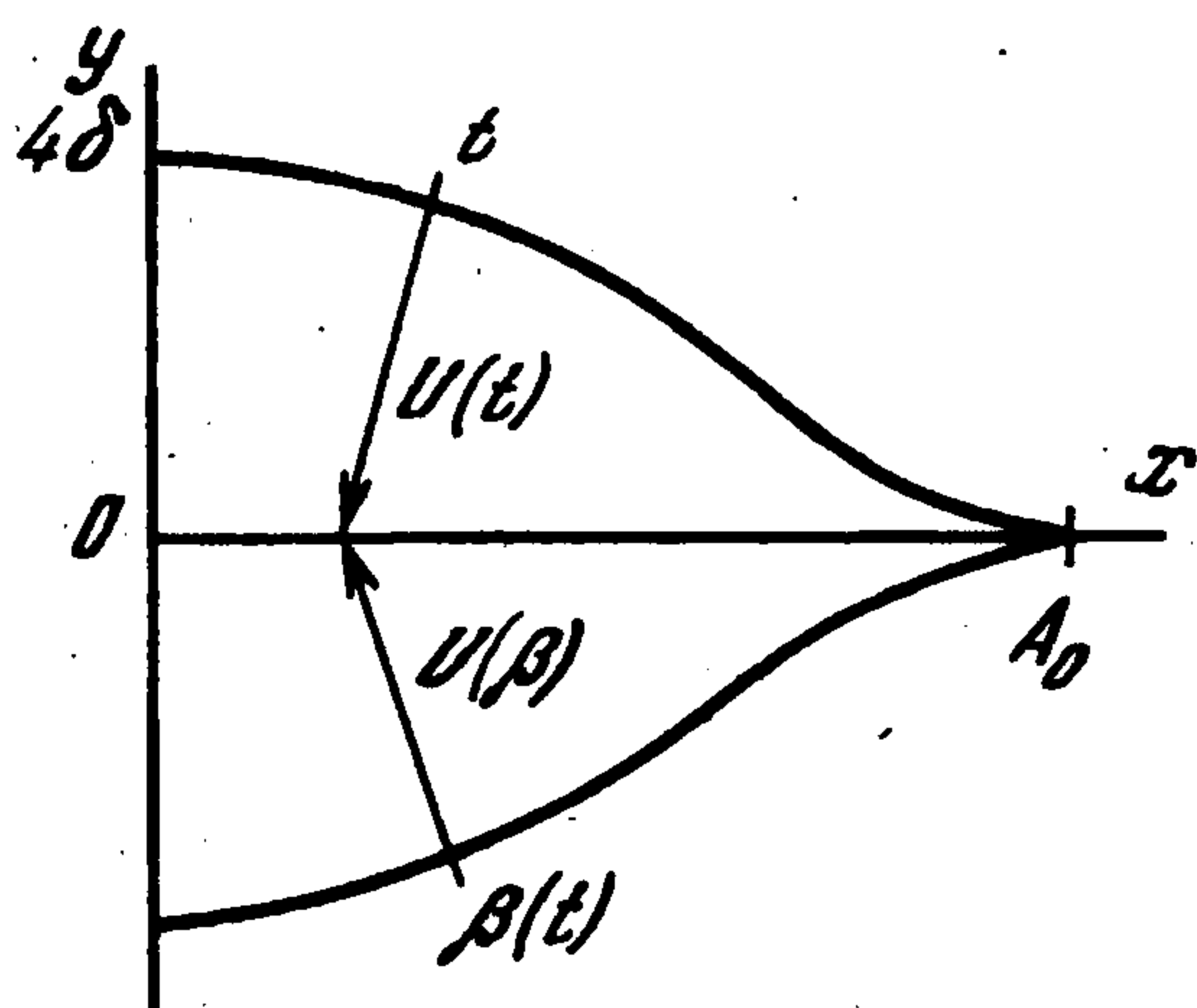
Парциальная краевая задача последующего (и так далее) приближения имеет тот же матричный коэффициент G_0 и в очередной раз имеем не систему, но совокупность задач Римана. Процесс построения ее решения прост, несущественные трудности встречаются лишь на стадии выделения частного решения и только из-за относительной громоздкости выражений. Ограничимся найденными приближениями и будем считать, что асимптотическое решение построено:

$$\Omega_s^\pm \approx \Omega_{s0}^\pm + \delta\Omega_{s1}^\pm \tag{4.14}$$

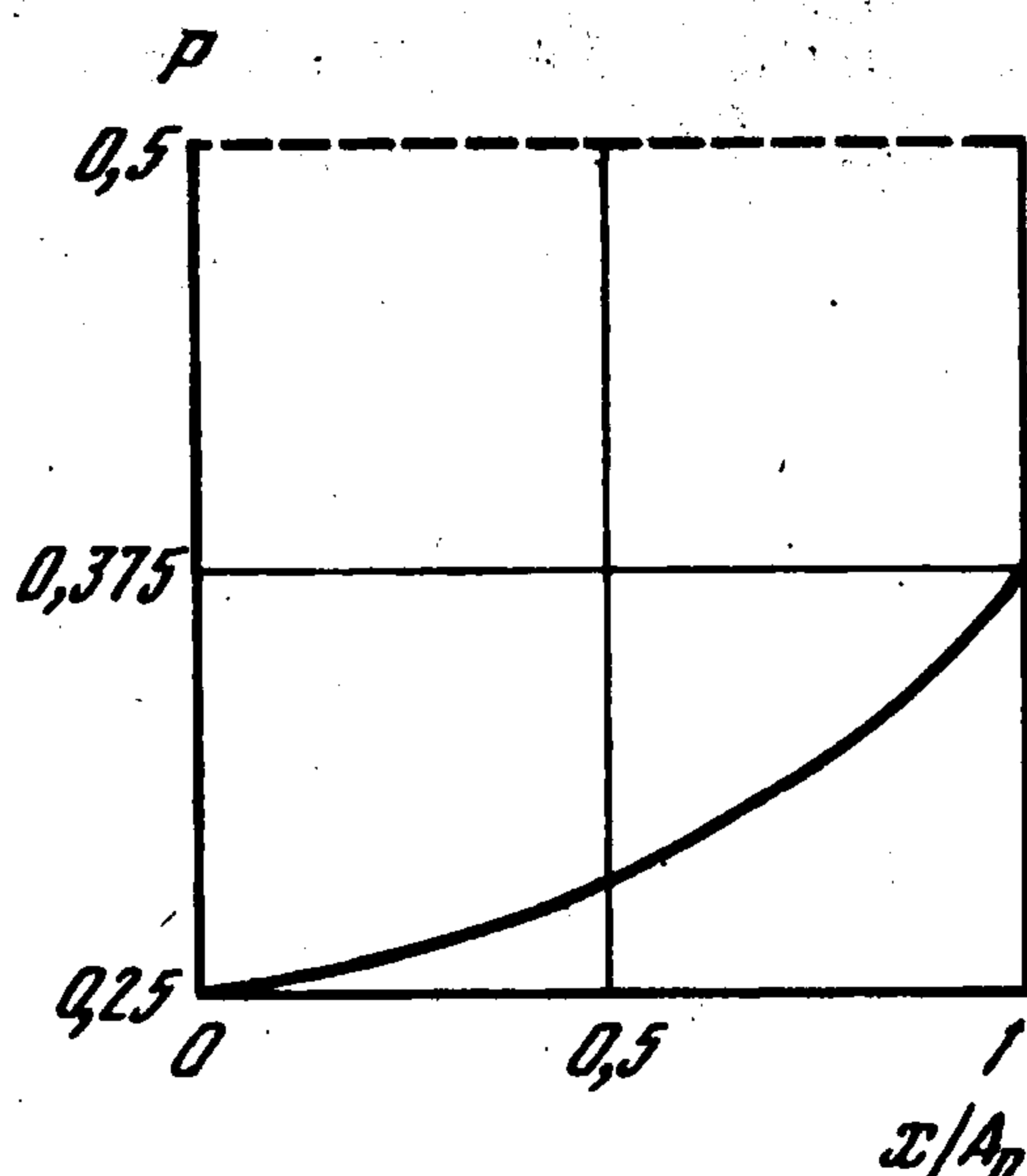
Построение упругого поля далее можно вести традиционными методами. Эпюры напряжений на границе можно строить, исходя из формул граничного представления.

Благодаря тому, что касательные напряжения на границе отсутствуют, для нормального напряжения получаем простое выражение

$$\sigma^2 \omega' \sigma_n = \Omega_1^+ - \Omega_1^-, \quad \sigma \in \partial D^+$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Нормальное напряжение также разложим в асимптотический ряд

$$\sigma_n = \sigma_{n0} + \delta\sigma_{n1} + \dots$$

после чего из (4.10) находим

$$\sigma^2 \omega'_0 \sigma_{n0} = \Omega_{10}^+ - \Omega_{10}^-, \quad \sigma^2 \omega'_0 \sigma_{n1} = \sigma^2 \omega'_1 \sigma_{n0} = \Omega_{11}^+ - \Omega_{11}^-$$

Подставляя решение, найденное выше, определяем

$$\sigma_{n0} = \Gamma + \Gamma', \quad \sigma_{n1} = -10\Gamma + 6 \frac{2\mu + \kappa\Gamma' + (2\kappa + 1)\Gamma}{\kappa + 1} (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2)$$

При переходе к плоскости z получаем:

$$\sigma_n \approx \Gamma + \Gamma' - \delta \{10\Gamma + 6[2\mu + \kappa\Gamma' + (2\kappa + 1)\Gamma] \frac{\kappa^2 / A^2 - 2}{\kappa + 1}$$

На фиг. 1 изображен профиль щели, существенно растянутый для наглядности по оси y . На фиг. 2 приведена эпюра нормальных напряжений в контакте. Штрихами выделено первое приближение, соответствующее однородному полю на бесконечности. Принято, что на бесконечности действует всестороннее сжимающее напряжение P_∞ ; $\kappa = 2$, $\mu = 1000 P_\infty$, $A_0 = 1$, $4\mu\delta = P_\infty/8$; график $P = \sigma_n/P_\infty$ имеет четную симметрию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пеньков В.Б. О построении квадратурных решений для изгибаемых пластинок // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Тула: Тульск. политехн. ин-т, 1985. С. 89–94.
2. Пеньков В.Б., Толоконников Л.А. Аналитические функции в теории упругости // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1986. № 2. С. 72–77.
3. Толоконников Л.А., Пеньков В.Б. Некоторые эффективные решения задачи о скольжении металла в слое // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 9. С. 75–82.
4. Толоконников Л.А., Султанов И.С. Деформирование бесконечной пластинки с трещиной // Прикл. механика. 1976. № 5. С. 85–90.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7. Вып. 4. С. 3–54.
8. Толоконников Л.А., Султанов И.С. О свойствах комплексных потенциалов в плоских задачах теории упругости, имеющих оси симметрии // Сборник работ по теории упругости. Тула: Тульск. политехн. ин-т, 1968. С. 115–119.

Тула

Поступила в редакцию
18. I. 1993