УДК 539.3

© 1994 г. Д.А. Пожарский

# О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА, ИМЕЮЩЕГО ПОЛОСОВОЙ РАЗРЕЗ

Получены интегральные уравнения задач об упругом равновесии пространственного клина, ослабленного плоским полосовым разрезом, который расположен в срединной полуплоскости клина, при разных граничных условиях на гранях клина. К берегам разреза приложена известная нормальная нагрузка, симметричная относительно плоскости разреза. Для случая выхода разреза на ребро клина решение задачи при помощи метода парных интегральных уравнений сведено к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с симметричными ядрами. Показана возможность расклинивания клина по ребру [1]. Для коэффициента интенсивности нормальных напряжений на одном конце полосы найдена простая и удобная для приложений формула, по которой сделаны расчеты при разных углах раствора клина.

Ранее изучалась задача о разрезе в виде полосы в однородном или деформирующемся по степенному закону бесконечном пространстве [2]. При помощи интегрального преобразования Меллина рассматривались задачи о щелях в плоском клине [1, 3]. В случае пространственного клина применялось интегральное преобразование Фурье–Конторовича–Лебедева в комплексной плоскости [4–7].

1. Рассмотрим упругий трехмерный клин с углом раствора $2\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant \pi)$ в цилиндрической системе координат $r, \varphi, z$, направив ось $z$ по ребру клина. В срединной полуплоскости клина $\varphi = 0$ имеется полосовой разрез, занимающий область $\Omega$: $\{0 \leqslant r \leqslant b,\ |z| < \infty\}$. Разрез находится в раскрытом состоянии под действием нагрузки $\sigma_\varphi = -q(r, z)$, $\varphi = \pm 0$, $(r, z) \in \Omega$, периодической по $z$ с периодом $2l$. Предполагается, что грани клина либо свободны от напряжений (задача *а*), либо лежат без трения на жестком основании (скользящая заделка, задача *б*), или жестко защемлены (задача *в*). Требуется найти форму раскрытия разреза $u_\varphi = f(r, z)$, $\varphi = \pm 0$, $(r, z) \in \Omega$, затем может быть определен коэффициент интенсивности нормальных напряжений. В дальнейшем в силу симметрии задачи по $\varphi$ будем изучать лишь область $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, граничные условия в которой можно записать в виде

$$\begin{gathered}\varphi = 0:\quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0;\quad u_\varphi = 0\quad (r,z) \notin \Omega\quad \sigma_\varphi = -q(r,z)\quad (r,z) \in \Omega \\ \varphi = \alpha:\quad \text{а})\ \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0,\quad \text{б})\ u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0,\quad \text{в})\ u_r = u_\varphi = u_z = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Будем считать для простоты, что функция $q(r, z)$ четна по $z$ и представима рядом Фурье. Тогда достаточно решить задачу для случая

$$q(r,z) = q(r)\cos\beta z,\quad \beta = \pi n / l \tag{1.2}$$

и составить суперпозицию решений, полученных при разных значениях $n \geqslant 1$, а также решения задачи для клина о плоской деформации $(n = 0)$ [3].

Разыскивая три гармонические функции, входящие в представление Папковича–Нейбера, в виде интегралов Фурье–Конторовича–Лебедева в комплексной плоскости

[4, 5], сведем сформулированную выше задачу к интегральному уравнению относительно $f(r)$:

$(f(r,z)=f(r)\cos\beta z)$

$$\int_0^b f(x)K(r,x)dx=\frac{1-\nu}{G}q(r),\quad 0\leq r\leq b \tag{1.3}$$

$$K(r,x)=\frac{2}{\pi^2 rx}\int_0^\infty \frac{u\,\mathrm{sh}\,\pi u}{\mathrm{ch}(\pi u/2)}K_{iu}(\beta r)\left[I-(1-2\nu)A_m^u\right]\left\{\frac{s\,\mathrm{ch}(\pi s/2)}{W_m(s)}K_{is}(\beta x)\right\}du \tag{1.4}$$

а) $m=1$

$$A_1^u\{g(s)\}=\int_0^\infty L_1(u,s)g(s)ds+\frac{W_0(u)}{2W_1(u)}B_*^u\{g(s)\}+$$

$$+\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi y g_1(y)\mathrm{sh}(\pi s/2)W_0(s)g(s)}{(\mathrm{ch}\,\pi y+\mathrm{ch}\,\pi u)(\mathrm{ch}\,\pi y+\mathrm{ch}\,\pi s)}dsdy+$$

$$+(1-2\nu)\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi t g_1(t)\mathrm{sh}(\pi y/2)W_2(y)}{(\mathrm{ch}\,\pi t+\mathrm{ch}\,\pi u)(\mathrm{ch}\,\pi t+\mathrm{ch}\,\pi y)}B_*^y\{g(s)\}dtdy$$

$$L_1(u,s)=2\,\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2}\mathrm{sh}\frac{\pi s}{2}W_1(s)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi t g_2(t)dt}{(\mathrm{ch}\,\pi t+\mathrm{ch}\,\pi u)(\mathrm{ch}\,\pi t+\mathrm{ch}\,\pi s)}$$

$$B_*^u\{g(s)\}=\sum_{n=0}^\infty(1-2\nu)^n(A_2^u)^n\circ C^t\{g(s)\} \tag{1.5}$$

$$C^t\{g(s)\}=4\,\mathrm{ch}\frac{\pi t}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi y g_1(y)\mathrm{sh}(\pi s/2)W_1(s)g(s)}{(\mathrm{ch}\,\pi y+\mathrm{ch}\,\pi t)(\mathrm{ch}\,\pi y+\mathrm{ch}\,\pi s)}dsdy+\int_0^\infty L_2(t,s)g(s)\frac{W_0(s)}{W_2(s)}ds$$

$$W_{0,1}(s)=(W_+(s)\pm W_-(s))/2,\quad W_2(s)=-W_+(s)W_-(s)/W_1(s)$$

$$g_{1,2}(t)=(g_+(t)\pm g_-(t))/2$$

$$W_\pm(s)=\pm\frac{\mathrm{ch}\,\alpha s\mp\cos\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha s\pm s\sin\alpha},\quad g_\pm(t)=\begin{Bmatrix}\mathrm{cth}(\alpha t/2)\\ \mathrm{th}(\alpha t/2)\end{Bmatrix}\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha t\mp\cos 2\alpha}$$

б) $m=2$, в) $m=3$

$$A_{2,3}^u\{g(s)\}=\int_0^\infty L_{2,3}(u,s)g(s)ds$$

$$L_{2,3}(u,s)=2\,\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2}\mathrm{sh}\frac{\pi s}{2}W_{2,3}(s)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi t g_{2,3}(t)dt}{(\mathrm{ch}\,\pi t+\mathrm{ch}\,\pi u)(\mathrm{ch}\,\pi t+\mathrm{ch}\,\pi s)}$$

$$W_3(s)=\frac{\kappa\,\mathrm{sh}\,2\alpha s-s\sin 2\alpha}{\kappa\,\mathrm{ch}\,2\alpha s+s^2(1-\cos 2\alpha)+(1+\kappa^2)/2},\quad \kappa=3-4\nu$$

$$g_3(t)=-\frac{\sin^2 2\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha t}{\mathrm{ch}\,2\alpha t+\cos 4\alpha}+\sin^2\alpha\{f_1(t)[2f_2(t)-tf_3(t)]- \tag{1.6}$$

$$-f_4(t)[2f_3(t)+tf_2(t)]\}/f_5(t)-2(1-\nu)\sin\alpha\{f_1(t)(\sin 3\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,2\alpha t)-$$

$$-f_4(t)\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,2\alpha t\}/f_5(t)$$

$$f_1(t)=\kappa\,\mathrm{sh}\,2\alpha t\cos 2\alpha-t\sin 2\alpha,\quad f_2(t)=\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha-\mathrm{ch}\,2\alpha t$$

$$f_3(t)=\sin 2\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha t(1+\cos 2\alpha),\quad f_4(t)=\sin 2\alpha(\kappa\,\mathrm{ch}\,2\alpha t-1)$$

$$f_5(t)=[f_1^2(t)+f_4^2(t)](\mathrm{sh}^2\alpha t+\cos^2 2\alpha)$$

Здесь $G$ – модуль сдвига, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $I$ – тождественный оператор. Из предложения, доказанного [5] для интегрального оператора $A_2^u$, следует, что операторный ряд $B_*^u$ в формулах (1.5) сходится в пространстве непрерывных ограниченных на полуоси функций $C_M(0,\infty)$ хотя бы при $\nu > 0{,}053$ при любом угле $\alpha$.

*Лемма* 1. Ядро интегрального уравнения (1.3) удовлетворяет условию симметрии: $K(r, x) = K(x, r)$.

Для задач *б*, *в* лемма 1 очевидна, поскольку функцию $K(r, x)$ при $m = 2, 3$ можно представить в виде

$$K(r,x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \operatorname{sh}\pi u K_{iu}(\beta r)K_{iu}(\beta x)\left[\frac{u^2}{rxW_m(u)}-(1-2\nu)g_m(u)\right]du$$

Для задачи *а* справедливость леммы 1 устанавливается путем анализа каждого члена ряда Неймана, входящего в формулы (1.5), перестановок интегралов и замен переменных интегрирования.

В случае задачи *б* при $\alpha = \pi$ найдем, что ([8], с. 786, 984, 986)

$$K(r,x)=\frac{2}{\pi^2 rx}\int_0^\infty u^2 \operatorname{ch}\pi u K_{iu}(\beta r)K_{iu}(\beta x)du=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{d^2}{dr^2}-\beta^2\right)K_0(\beta|r-x|) \tag{1.7}$$

Ядро (1.7) соответствует задаче о полосовом разрезе в бесконечном пространстве [2].

При $\alpha = \pi/2$ для задачи *б*, вычисляя квадратуры аналогично (1.7), получим ядро интегрального уравнения (1.3) в виде

$$K(r,x)=\frac{2}{\pi^2 rx}\int_0^\infty u^2(\operatorname{ch}\pi u-1)K_{iu}(\beta r)K_{iu}(\beta x)du=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{d^2}{dr^2}-\beta^2\right)\left[K_0(\beta|r-x|)+K_0(\beta(r+x))\right] \tag{1.8}$$

что соответствует симметричной задаче о двух одинаковых полосовых разрезах в бесконечном пространстве.

Для задачи о полосовом разрезе, расположенном перпендикулярно свободной от напряжений границе полупространства (задача *а* при $\alpha = \pi/2$), получим ядро в форме (ряд по степеням $(1 - 2\nu)$ обрывается)

$$K(r,x)=\frac{2}{\pi^2 rx}\int_0^\infty [u^2\operatorname{ch}\pi u-u^2-2u^4]K_{iu}(\beta r)K_{iu}(\beta x)du+$$

$$+\frac{8(1-2\nu)\beta}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi u/2)\operatorname{ch}(\pi y/2)}{\operatorname{ch}\pi u+\operatorname{ch}\pi y}\left(\frac{u^2}{r}+\frac{y^2}{x}\right)K_{iu}(\beta r)K_{iy}(\beta x)dudy-$$

$$-\frac{16(1-2\nu)^2\beta^2}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi u/2)\operatorname{ch}(\pi y/2)\operatorname{ch}^2(\pi t/2)}{(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi u)(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi y)}K_{iu}(\beta r)K_{iy}(\beta x)dudydt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{d^2}{dr^2}-\beta^2\right)K_0(\beta|r-x|)-\frac{1}{\pi}\left[\frac{12rx}{(r+x)^2}-1\right]\times \tag{1.9}$$

$$\times\left(\frac{d^2}{dr^2}-\beta^2\right)K_0(\beta(r+x))-\frac{6\beta^2 rx}{\pi(r+x)^2}K_0(\beta(r+x))+\frac{4}{\pi}(1-2\nu)\beta^2\left[K_0(\beta(r+x))-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{2}(r+x)\left(K_1(\beta(r+x))-\int_{\beta(r+x)}^\infty K_0(t)dt\right)\right]-\frac{2}{\pi}(1-2\nu)^2\beta^2\int_{\beta(r+x)}^\infty\int_t^\infty K_0(t)dtdt$$

Формулы (1.9) могут быть получены из формул (1.14) работы [9].

При $\beta \to 0$ интегральные уравнения (1.3) переходят в интегральные уравнения соответствующих плоских задач для клина [3].

Заметим также, что решение уравнения (1.3) должно подчиняться условию $f(b) = 0$.

**2.** При выводе и решении интегральных уравнений (1.3)–(1.6) важную роль играет

*Теорема.* Операторы $I-(1-2\nu)A_m^u$: $C_M(0,\infty) \to C_M(0,\infty)$ $(m = 1,2,3)$, определенные формулами (1.5)–(1.6), имеют обратные, равные

$$\left[I-(1-2\nu)A_m^u\right]^{-1} = I + B_m^u, \quad B_1^u = \frac{W_+(u)}{2W_1(u)}B_+^u - \frac{W_-(u)}{2W_1(u)}B_-^u$$

$$B_{\pm,2,3}^u = \sum_{n=1}^{\infty}(1-2\nu)^n\left(A_{\pm,2,3}^u\right)^n, \quad A_\pm^u\{g(s)\} = \int_0^\infty L_\pm(u,s)g(s)ds \tag{2.1}$$

$$L_\pm(u,s) = 2\,\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2}\mathrm{sh}\frac{\pi s}{2}W_\pm(s)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi t g_\pm(t)dt}{(\mathrm{ch}\,\pi t + \mathrm{ch}\,\pi u)(\mathrm{ch}\,\pi t + \mathrm{ch}\,\pi s)}$$

при выполнении неравенства

$$(1-2\nu)\left\|A_{\pm 2,3}^u\right\|_{C_M(0,\infty)} < 1 \tag{2.2}$$

Доказательство этой теоремы, очевидное при $m = 2, 3$ (обращение ряда Неймана), в случае $m = 1$ (обращение комбинации двух рядов Неймана) основано на решении при помощи интегрального преобразования Фурье–Конторовича–Лебедева в комплексной плоскости следующей вспомогательной задачи ($\delta(x)$ – дельта-функция):

$$\begin{aligned} &\varphi = \alpha/2: \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0; \quad u_\varphi = \delta(r-x)\delta(|z|-y) \\ &\varphi = -\alpha/2: \quad \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

а также на известной связи (см., например, [10]) между контактными задачами и задачами теории трещин. При этом заметим, что оператор $B_1^u$ вида (2.1) входит в ядро интегрального уравнения (2.1) контактной задачи *a* из [7].

Как показали проведенные исследования [5–7], неравенство (2.2) для углов $\alpha = \pi n/12$ $(n = 1,2,\ldots,12)$ выполняется, как правило, при всех значениях $\nu$, встречающихся на практике.

Для решения интегрального уравнения (1.3) применим метод парных интегральных уравнений [11]. Введем функцию

$$Q(u) = \frac{\mathrm{sh}\,\pi u W_m(u)}{\mathrm{ch}(\pi u/2)}\left[I-(1-2\nu)A_m^u\right]\left\{\frac{s\,\mathrm{ch}(\pi s/2)}{W_m(s)}\int_0^b \frac{f(x)}{x}K_{is}(\beta x)dx\right\} \tag{2.4}$$

Тогда на основании сформулированной выше теоремы из (2.4) выразим функцию

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi u W_m(u)}{\mathrm{ch}(\pi u/2)}\left[I + B_m^u\right]\left\{\frac{Q(s)\,\mathrm{ch}(\pi s/2)}{\mathrm{sh}\,\pi s W_m(s)}\right\}K_{iu}(\beta x)du \tag{2.5}$$

Запишем эквивалентное уравнению (1.3) парное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty Q(u)\frac{u}{W_m(u)}K_{iu}(\beta r)du = \frac{\pi^2}{2}\frac{1-\nu}{G}rq(r), \quad 0 \leqslant r < b \\ &\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\pi u W_m(u)}{\mathrm{ch}(\pi u/2)}\left[I + B_m^u\right]\left\{\frac{Q(s)\,\mathrm{ch}(\pi s/2)}{\mathrm{sh}\,\pi s W_m(s)}\right\}K_{iu}(\beta r)du = 0, \quad b \leqslant r < \infty \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$Q(u) = N(u) + M(u)$$

$$N(u) = \frac{1-\nu}{G} \operatorname{sh} \pi u W_m(u) \int_0^b q(r) K_{iu}(\beta r) dr \tag{2.7}$$

$$M(u) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \operatorname{sh} \pi u W_m(u) \int_b^\infty \varphi(t) \operatorname{Re} K_{\frac{1}{2}+iu}(\beta t) dt$$

Внося представление (2.7) в уравнение (2.6), тождественно удовлетворим первому уравнению (2.6) [11]. Второе же уравнение (2.6) преобразуется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) + \int_b^\infty \varphi(s) R(s,t) ds = F(t), \quad b \leq t < \infty \tag{2.8}$$

$$R(s,t) = \frac{4\beta}{\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi u \Big[ \big( W_m(u) - \operatorname{cth} \pi u \big) \operatorname{Re} K_{\frac{1}{2}+iu}(\beta s) +$$

$$+ \frac{W_m(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} B_m^u \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} \operatorname{Re} K_{\frac{1}{2}+iy}(\beta s) \right\} \operatorname{Re} K_{\frac{1}{2}+iu}(\beta t) du \tag{2.9}$$

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{1-\nu}{G} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi u W_m(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} \left[ I + B_m^u \right] \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} \int_0^b q(x) K_{iy}(\beta x) dx \right\} \operatorname{Re} K_{\frac{1}{2}+iu}(\beta t) du$$

*Лемма* 2. Ядро интегрального уравнения (2.8) вида (2.9) симметрично, т.е. $R(s, t) = R(t, s)$.

Эта лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 1, позволяет применить к исследованию уравнения (2.8) теорию Гильберта–Шмидта [12].

Можно показать, что для функции $f(x)$ вида (2.5), (2.7) выполняется условие $f(b) = 0$.

Поведение функции $f(x)$ на ребре клина $(x \to 0)$, как следует из формул (2.5), (2.7) и того, что $K_{iu}(0) = \pi\delta(u)$, зависит от значения предела $\lim \operatorname{sh} \pi u \, W_m(u) = A$ $(u \to 0,$ $m = 1, 2, 3)$. Для задачи *б* при $\alpha = \pi$ (бесконечное пространство) и для задачи *в* при любом $\alpha$ имеем $A = f(0) = 0$. В остальных случаях $A \neq 0$, $f(0) \neq 0$, т.е. происходит расклинивание упругого клина по ребру.

При численном решении уравнения (2.8) эффективным является метод механических квадратур с использованием квадратурной формулы Гаусса [12]. Его применение облегчают имеющиеся таблицы функций $K_{\frac{1}{2}+iu}(x)$ [13]. При вычислении функций $R(s, t)$ и $F(t)$ по формулам (2.9) вместо суммирования рядов Неймана $B_m^u$ удобнее решать соответствующие интегральные уравнения Фредгольма второго рода методом механических квадратур.

Задача имеет точное решение в случае *а* при $\alpha = \pi$, когда $R(s, t) \equiv 0$.

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений при $r = b$, отнесенный к $\cos \beta z$, можно найти по формуле

$$K_I = -\lim_{r \to b+0} \left[ \sqrt{r-b} \, q(r) \right] \tag{2.10}$$

$$q(r) = \frac{G}{1-\nu} \int_0^b f(x) K(r,x) dx, \quad r > b \tag{2.11}$$

Выделяя в (2.11) главную часть ядра $K(r, x)$ в виде (1.7), используя формулы (2.5), (2.7) и интегрируя по частям, окончательно получим

$$K_I = \frac{2G\varphi(b)}{\pi^2(1-\nu)\sqrt{\beta}} \tag{2.12}$$

где $\varphi(t)$ – решение уравнения (2.8)

Для проведения конкретного расчета введем следующие безразмерные величины:

$$r' = \frac{r}{b}, \quad x' = \frac{x}{b}, \quad \beta' = \beta b, \quad f'(x') = \frac{f(x)}{b}, \quad q'(r') = \frac{q(r)}{G}, \quad K_I' = \frac{K_I}{\sqrt{bG}} \text{ и т.д.} \tag{2.13}$$

Ниже для задачи *а* при $\alpha = \pi n/8$, $\nu = 0{,}3$, $q'(r') = q = \text{const}$ даны результаты расчетов величины $K_I'/q$ по формулам (2.12), (2.13) при разных значениях $\beta'$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta' = 1$ | 3,20 | 1,28 | 0,747 | 0,554 | 0,519 | 0,493 | 0,482 |
| $\beta' = 2$ | 2,29 | 0,790 | 0,478 | 0,403 | 0,395 | 0,387 | 0,383 |
| $\beta' = 3$ | 1,37 | 0,481 | 0,352 | 0,327 | 0,325 | 0,323 | 0,322 |

Автор благодарит В.М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сметанин Б.И.* О расклинивании упругого бесконечного клина // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 935–940.
2. *Мхитарян С.М.* К напряженному состоянию деформирующегося по степенному закону бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости // Докл. АН АрмССР. 1982. Т. 74. № 1. С. 30–36.
3. *Сметанин Б.И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Инж. журн. МТТ. 1968. № 2. С. 115–122.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
5. *Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И.* Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
6. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Действие полосового штампа на упругий пространственный клин // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 1. С. 56–62.
7. *Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И.* Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. *Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Растяжение упругого полупространства с трещиной, расположенной перпендикулярно к его поверхности // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 940–943.
10. *Довнорович В.И., Яшин В.Ф.* Некоторые пространственные задачи теории упругости. Гомель: Изд-во Белорус. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1961. 55 с.
11. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* Парные интегральные уравнения, связанные с преобразованием Конторовича–Лебедева // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1090–1097.
12. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
13. *Раппопорт Ю.М.* Таблицы модифицированных функций Бесселя $K_{1/2+i\beta}(x)$. М.: Наука, 1979. 337 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
29.XI.1993