УДК 531.36:62–50

© 1994 г. Н.В. Дунская, Е.С. Пятницкий

СИНТЕЗ ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

На примере дискретной модели исследуются управляемые движения упругого стержня. Модель состоит из произвольного конечного числа абсолютно жестких звеньев с упругими соединениями между ними. При достаточно большой жесткости движения упругой системы содержат разнотемповые составляющие: быстрые движения упругой части и медленные движения системы как твердого тела. Движение таких систем описывается сингулярно возмущенными уравнениями. При переходе к стандартной форме систем Пуанкаре с малым параметром в правой части уравнений движения порождающая система, описывающая движение упругой части, может оказаться консервативной, и в системе будут сохраняться колебательные движения упругой части. Предлагается процедура синтеза управлений, позволяющая формировать порождающую систему с требуемыми свойствами. Возникающий эффект носит существенно нелинейный характер. Доказана теорема об асимптотической устойчивости в целом стационарного состояния порождающей системы.

1. Постановка задачи. В качестве объекта управления рассматривается упругий стержень, который может вращаться относительно неподвижной оси под действием управляющего момента $M_1(t)$, развиваемого в неподвижном шарнире. Рассматривая влияние упругих сил на управляемые движения стержня, ограничимся случаем, когда внешние силы, кроме управляющих, отсутствуют. Эта система может служить, в частности, моделью для изучения влияния упругости на движение манипуляторов с гибкими звеньями. Исследование управляемых движений будет проведено на примере дискретной модели упругого стержня с произвольным конечным числом степеней свободы. Это позволит установить общие закономерности и указать на возможные обобщения.

В качестве дискретной модели упругого стержня длины l и массы m рассмотрим плоскую цепочку произвольного конечного числа n абсолютно жестких звеньев длины l_i и массы m_i ($l_1 + ... + l_n = l$, $m_1 + ... + m_n = m$), соединенных между собой цилиндрическими шарнирами. Упругость в j-м ($j = 2,..., n$) соединении будем характеризовать возвращающим моментом $Q_j = -\bar{c}_j q_j$, где q_j – угол между звеньями с номерами $j-1$ и j, а $\bar{c}_j$ – коэффициенты жесткости. Через q_1 обозначим угол, который первое звено образует с некоторой неподвижной осью, лежащей в плоскости вращения звеньев. Так как эта система рассматривается как динамическая модель упругого стержня, то величины $\bar{c}_j$ должны иметь достаточно большие значения, т.е. $\bar{c}_j = c_j / \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, характеризующий упругие свойства.

Моменты сил упругости Q_j являются потенциальными обобщенными силами, соответствующими координатам q_j. Поэтому рассматриваемая механическая система будет иметь потенциальную энергию

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1} \sum_{j=2}^{n} c_j q_j^2 = \varepsilon^{-1}\Pi(q) \qquad (1.1)$$

если принять линейную связь между напряжениями и деформациями. В общем случае потенциальная энергия $\Pi(q)$ будет иметь вид

$$\Pi^*(q) = \varepsilon^{-1}\Pi(q) = \varepsilon^{-1} \sum_{j=2}^{n} \Pi_j(q_j)$$

Функции $\Pi_j(q_j)$ будем считать сильно выпуклыми функциями переменных q_j, принимающих нулевое значение в единственной стационарной точке $q_j = 0$. В этом случае потенциал $\Pi(q)$ будет положительно-определенной функцией переменных $q_2, \ldots, q_n$, для которой каждое из уравнений

$$\partial\Pi/\partial q_j = \partial\Pi_j(q_j)/\partial q_j = 0 \qquad (1.2)$$

будет иметь единственное решение $q_j = 0$. Дополнительно будем полагать, что

$$\Pi(q) \to \infty \quad \text{при} \quad \sum_{j=2}^{n} |q_j| \to \infty$$

В случае (1.1) это свойство будет выполняться автоматически.

Конечность области упругих деформаций может быть учтена переходом к рассмотрению конечных отрезков по переменным q_j, где функции $\Pi_j(q_j)$ будут сильно выпуклыми. При этом установленное ниже свойство асимптотической устойчивости тривиального решения порождающей системы в целом надлежащим образом заменяется на устойчивость в большом, т.е. в пределах ограниченной области начальных отклонений.

Для дальнейшего изложения существенна независимость потенциальной энергии $\Pi(q)$ от координаты q_1, т.е. тождество

$$\partial\Pi/\partial q_1 \equiv 0 \qquad (1.3)$$

Так как в системе отсутствуют иные силы, кроме упругих сил, то рассматриваемая система при $M_1 \equiv 0$ будет консервативной. Поскольку в описанной модели управление действует только на первое звено, движение системы в обобщенных координатах $\{q_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ будет описываться уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = M_1\delta_{1i} - \varepsilon^{-1}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (1.4)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k \triangleq \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}A(q)\dot{q}$$

где δ_{1i} – символ Кронекера, T – кинетическая энергия, представляющая собой положительно определенную квадратичную форму обобщенных скоростей.

Относительно функции $M_1(t)$, которая определяет управляющий момент, действующий на первое звено, в первой части работы будем полагать, что на эту функцию не накладывается никаких ограничений. Вопрос об учете естественных ограничений на управляющий момент

$$|M_1(t)| \leqslant h, \quad t \geqslant t_0, \quad h > 0 \qquad (1.5)$$

обсуждается в заключительной части работы.

Уравнения (1.4) относятся к классу сингулярно-возмущенных систем [1], содержащих малый параметр при старшей производной. Это отражает существование в системе разнотемповых движений [2]. Быстрым движениям соответствуют движения упругой части системы, а медленным – движение системы как твердого тела.

При $\varepsilon \to 0$ дифференциальные уравнения (1.4) формально переходят в конечные соотношения

$$q_2 = \ldots = q_n = 0 \qquad (1.6)$$

определяющие прямолинейную форму абсолютно жесткого стержня. Однако многообразие (1.6), вообще говоря, не является асимптотически устойчивым. Это обстоятельство дополнительно показывает, что для корректности дискретной модели (1.4) необходимо обеспечить асимптотическую устойчивость многообразия (1.6). Очевидно, сделать это можно только за счет надлежащего введения стабилизирующего управляющего воздействия. Чтобы определить требуемое управление, в системе (1.4) перейдем к новому (быстрому) времени τ с помощью преобразования

$$t = \varepsilon^{1/2}\tau \tag{1.7}$$

В соответствии с (1.7) уравнения движения (1.4), записанные в матричной форме, принимают форму уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = \varepsilon M_1(\varepsilon^{1/2}\tau)e^1 - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \tag{1.8}$$

где e^1 – первый столбец единичной матрицы, штрих означает производную по τ. Система (1.8) относится к системам, содержащим малый параметр в правой части.

Если произведение $\varepsilon M_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, что всегда имеет место при ограниченном управлении, то соответствующая (1.8) порождающая система будет иметь вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \tag{1.9}$$

В соответствии с методом малого параметра свойства порождающей системы определяют движения возмущенной системы (1.8).

При $\Pi(q^0) > 0$ консервативная система (1.9) будет совершать незатухающие движения, поскольку в ней отсутствуют диссипативные силы. Это показывает, что предельный переход при $\varepsilon \to 0$ от сингулярно возмущенной системы к многообразию (1.6), вообще говоря, несправедлив, и, следовательно, в результирующем движении будут присутствовать незатухающие упругие колебания. Поэтому решение задач управления может оказаться вообще невозможным.

Приведенные рассуждения показывают, что необходимым элементом процедуры синтеза управления упругими системами является формирование порождающей системы, у которой многообразие (1.6) асимптотически устойчиво. Для этого необходимо найти закон управления, обеспечивающий введение демпфирующего воздействия в порождающую систему. Ниже показано, что такие законы управления существуют, и приводится их аналитическая форма.

2. Законы управления, обеспечивающие стабилизацию стационарного состояния порождающей системы. В соответствии с (1.8) управление будет входить в уравнения порождающей системы только в случае, если управляющий момент M_1 будет содержать составляющую, которая квадратично зависит от обобщенной скорости первого звена $\dot{q}_1$.

В качестве примера такого закона рассмотрим функцию

$$M_1(t) = -\gamma\dot{q}_1^2\psi(\varepsilon^{1/2}\dot{q}_1) + u_1(t) \tag{2.1}$$

где $\psi(\zeta)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию $0 < \psi(\zeta)\zeta$ при $\zeta \neq 0$ и $\psi(0) = 0$ (примером может служить $\psi(\zeta) = \mathrm{arctg}(\zeta)$). Составляющая $u_1(t)$ в соответствии с (1.8) не будет входить в порождающие уравнения. Она предназначена для управления медленным движением. Число $\gamma > 0$ в (2.1) введено с целью обеспечить выполнение ограничения на управление (1.5). Этот вопрос обсуждается в разд. 3.

При замене (1.7) и использовании закона управления (2.1) соответствующая порождающая система будет иметь вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\gamma q_1'^2\psi(q_1')e^1 - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \tag{2.2}$$

Покажем, что в системе (2.2) происходит затухание движения по обобщенным координатам $q_2, \ldots, q_n$. Для этого заметим сначала, что уравнения (2.2) не зависят явно от q_1.

Действительно, кинетическая энергия рассматриваемой многозвенной системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} \cos\left(\sum_{s=p}^{\nu} q_s \right) q_i' q_k'$$

$$\gamma_{ik} = l_i l_k \left(m_\nu + 2 \sum_{r=\nu+1}^{n} m_r \right), \quad p = \min(i,k)+1, \quad \nu = \max(i,k) \quad i \neq k$$

$$\gamma_{kk} = l_k^2 \left(\frac{1}{3} m_k + \sum_{r=k+1}^{n} m_r \right)$$

и не зависит явно от q_1, так как $p \geqslant 2$.

Поэтому при учете (1.3) можно понизить порядок этой системы, если в качестве переменных взять $q_1', q_2, q_2', \ldots, q_n, q_n'$, т.е. можно ввести в рассмотрение динамическую систему, состояние которой описывается $(2n-1)$-вектором $x = (q_1', q_2, q_2', \ldots, q_n, q_n')^{\mathrm{T}}$, а процесс смены состояний определяется уравнениями (2.2).

Система (2.2) имеет решение $x = 0$, и оно соответствует стационарному состоянию, причем других стационарных состояний в переменных x не существует.

Действительно, все слагаемые левой части системы (2.2) содержат в качестве сомножителя одну из двух первых производных обобщенных координат. Поэтому в состоянии $x = 0$ левые части уравнений (2.2) равны нулю. Очевидно, что правые части этих уравнений в силу (1.3) и свойства сильной выпуклости $\Pi(q)$ обращаются в нуль при $q' = 0$, $q_2 = \ldots = q_n = 0$.

Теорема. Состояние $x = 0$ в $(2n-1)$-мерном пространстве состояний $x = (q_1', q_2, q_2', \ldots, q_n, q_n')^{\mathrm{T}}$ является асимптотически устойчивым в целом состоянием динамической системы (2.2).

Доказательство. Воспользуемся обобщением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [3]. Согласно этой теореме асимптотическая устойчивость состояния $x = 0$ будет доказана, если будет указана функция Ляпунова $V(x)$, обладающая следующими свойствами. Функция $V(x)$: 1) принимает нулевое значение при $x = 0$, 2) положительно определена при $x \neq 0$, 3) допускает бесконечно большой низший предел, т.е. $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, 4) имеет неположительную производную $V' = dV/d\tau \leqslant \leqslant 0$, 5) множество $\{x\colon V' = 0\}$ содержит точку $x = 0$ и не содержит других положительных полутраекторий при $\tau \geqslant 0$.

В качестве функции Ляпунова рассмотрим полную энергию системы (2.2)

$$V(x) = E(q,q') = T(q,q') + \Pi(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q) q_i' q_k' + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} c_j q_j^2 \qquad (2.3)$$

где a_{ik} – элементы матрицы коэффициентов кинетической энергии $A(q)$. Из выражения для кинетической энергии T, и условия (1.3) следует, что функция Ляпунова (2.3) определена и непрерывно дифференцируема на $(2n-1)$-мерном пространстве $\{x\}$. Функция (2.3) обладает перечисленными выше свойствами.

Покажем это. Свойство 1 очевидно. При учете свойства положительной определенности кинетической энергии T по переменным q'_i и указанных выше свойств потенциала $\Pi(q)$ заключаем, что функция $V(x)$ положительно определена, т.е. обладает свойством 2.

Функция $V(x)$ допускает бесконечно большой низший предел, так как по предположению $\lim\Pi(q) = \infty$ при $|q_2| + ... + |q_n| \to \infty$, и $\lim T(q, q') = \infty$ при $|q'| \to \infty$, что непосредственно следует из известного неравенства для кинетической энергии $T \geq a_0(q_1'^2 + ... + q_n'^2)$, где a_0 – положительное число.

Так как производная полной энергии механической системы $dE/d\tau$ равна мощности непотенциальных сил [4], то в случае системы (2.2) будем иметь

$$dE/d\tau = dV/d\tau = -\gamma q'^3_1 \leq \psi(q_1') \leq 0$$

т.е. рассматриваемая функция Ляпунова обладает свойством 4. Наличие у нее свойства 5 устанавливает следующая лемма.

Лемма. Если на движении системы (2.2) первое звено остается неподвижным в некотором положении, т.е. $q'_1 \equiv 0$, то на таком движении $q_2 = q_3 = ... = q_n \equiv 0$.

Доказательство. Для удобства в описании системы (2.2) перейдем к другой системе обобщенных координат $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^{\mathrm{T}}$, где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – абсолютные углы, т.е. углы отклонения звеньев от некоторой неподвижной оси. Обобщенные координаты q выражаются через координаты φ равенствами

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad q_3 = \varphi_3 - \varphi_2, ..., \quad q_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$$

Поэтому потенциальная энергия

$$\Pi = \tilde{\Pi}(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_3 - \varphi_2, ..., \varphi_n - \varphi_{n-1}) = \tilde{\Pi}(\varphi) = \sum_{j=2}^{n} \Pi_j(\varphi_j - \varphi_{j-1})$$

Выражение для кинетической энергии заменяется выражением

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\varphi_i'\varphi_k'$$

и в новых переменных φ уравнения (2.2) принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\varphi_k'' + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \sin(\varphi_i - \varphi_k)\varphi_k'^2 = -\gamma\varphi_1'^1\psi(\varphi_1')e^1 - \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\varphi_i} \tag{2.4}$$

Так как по условию леммы $\varphi_1 \equiv 0$, то на первое звено будет действовать только силы, порожденные движением остальных звеньев. Поскольку первое звено неподвижно, то очевидно, что сила реакции связи, приложенная к первому звену в точке соединения со вторым, будет направлена вдоль оси первого звена. Это означает, что если бы первый шарнир не был неподвижно закреплен, а располагался на конце дополнительного звена (ДЗ), причем в этом соединении, как и в других соединениях, имелась бы пружина с жесткостью c_0, то движение звеньев с номерами $2, ..., n$, при котором звено 1 остается неподвижным, не влияло бы на ДЗ. Таким образом, ДЗ, будучи в начале движения неподвижным и направленным вдоль оси звена 1, при условии $\varphi_1 \equiv 0$ сохраняло бы нулевую скорость и в процессе движения звеньев $2, ..., n$.

Чтобы это показать, рассмотрим систему двух звеньев с номерами 0 и 1. Пусть они имеют длины l_0 и l_1, их положение описывается углами φ_0, φ_1 отклонения звеньев от одного и того же неподвижного направления, например от вертикали. Если к свободному концу звена 1 приложена сила $P(\tau)$, направленная при всех t по вертикали, то виртуальная работа силы $P(\tau)$ будет равна

$$\delta A(\bar{P}) = -P(\tau)l_0 \sin\varphi_0\delta\varphi_0 - P(\tau)l_1 \sin\varphi_1\delta\varphi_1 = Q_0\delta\varphi_0 + Q_1\delta\varphi_1$$

где $Q_0 = -P(\tau)l_0\sin\varphi_0$, $Q_1 = -P(\tau)l_1\sin\varphi_1$ – обобщенные силы в этой системе двух звеньев. В положении $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ обобщенные силы $Q_0 = Q_1 = 0$. Из принципа возможных перемещений [4] следует, что $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ – положение равновесия двузвенной системы, и, следовательно, если в начальный момент времени система находилась в этом положении с нулевыми скоростями, то с течением времени она не выйдет из этого положения.

Таким образом, при условии $\varphi_1 \equiv 0$ добавление к системе из n звеньев, описываемой уравнениями (2.4), ДЗ, направленного вдоль оси звена 1, не изменяет движения звеньев $2,\dots,n$. Присвоим ДЗ номер 0. Уравнения движения системы с ДЗ аналогичны уравнениям (2.4) с той лишь разницей, что индексы i и k пробегают значения не от 1 до n, как в (2.4), а от 0 до n. Потенциальная энергия $\tilde{\Pi}$ системы с ДЗ имеет на одно слагаемое $(\Pi_1(\varphi_1-\varphi_0))$ больше, чем потенциальная энергия системы (2.4).

Условие неподвижности звеньев с номерами 0 и 1 выражается тождествами

$$\varphi_0=\varphi_1\equiv 0,\quad \varphi_0'=\varphi_1'\equiv 0,\quad \varphi_0''=\varphi_1''\equiv 0 \tag{2.5}$$

Предположим, что остальные звенья совершают некоторое движение. Из (2.5) следует, что

$$\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\varphi_0}=\frac{\partial\tilde{\Pi}_1(\varphi_1-\varphi_0)}{\partial\varphi_0}=0$$

$$\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\varphi_1}=\frac{\partial\tilde{\Pi}_1(\varphi_1-\varphi_0)}{\partial\varphi_1}+\frac{\partial\tilde{\Pi}_2(\varphi_2-\varphi_1)}{\partial\varphi_1}=\frac{\partial\tilde{\Pi}_2(\varphi_2-\varphi_1)}{\partial\varphi_1}$$

При учете этого первые два уравнения системы с ДЗ будут иметь вид

$$\sum_{g=2}^{n}\gamma_{0g}\varphi_g''\cos\varphi_g-\sum_{g=2}^{n}\gamma_{0g}\varphi_g'^2\sin\varphi_g=0 \tag{2.6}$$

$$\sum_{g=2}^{n}\gamma_{1g}\varphi_g''\cos\varphi_g-\sum_{g=2}^{n}\gamma_{1g}\varphi_g'^2\sin\varphi_g=\frac{\partial\tilde{\Pi}_2(\varphi_2-\varphi_1)}{\partial\varphi_1} \tag{2.7}$$

В этих уравнениях суммирование проводится при $g=2,\dots,n$, так как при $g=0,1$ в силу условий (2.5) соответствующие слагаемые равны нулю. Поскольку $\gamma_{0g}=(l_0/l_1)\gamma_{1g}$ при $g\geqslant 2$, то левые части уравнений (2.6), (2.7) различаются постоянным множителем l_0/l_1. Поэтому из них следует, что $\partial\tilde{\Pi}_2(\varphi_2-\varphi_1)/\partial\varphi_1\equiv 0$, откуда в силу (1.2) вытекает тождество $\varphi_2=\varphi_1\equiv 0$. Применяя аналогичные рассуждения последовательно к остальным уравнениям системы с ДЗ, получим тождества $\varphi_3\equiv 0,\dots,\varphi_n\equiv 0$. Как указывалось выше, движение по координатам $\varphi_2,\dots,\varphi_n$, описываемое уравнениями системы с ДЗ при условии (2.5), тождественно движению по этим координатам, описываемому уравнениями (2.4) при условии $\varphi_1\equiv 0$. Поэтому тождества $\varphi_2\equiv 0,\dots,\varphi_n\equiv 0$, полученные для системы с ДЗ при условии (2.5), выполняются также и для системы (2.4) при условии $\varphi_1\equiv 0$. Лемма доказана.

Таким образом, все условия обобщенной теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости выполнены. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что управление (2.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом многообразия (1.6) для порождающей системы (2.2). Система (1.8) с управлением (2.1) отличается от порождающей системы (2.2) наличием слагаемого $\varepsilon u_1(\varepsilon^{1/2}\tau)e^1$ в правой части.

В силу теоремы И.Г. Малкина [5], состояние $x=0$ $(x=\{q_1',q_2,q_2',\dots,q_n,q_n'\}^{\mathrm{T}})$ при ограниченном управлении $u_1(t)$ и достаточно малом ε будет устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Это значит, что энергия упругих сил будет оставаться малой, если она была малой в начальный момент. Возникает возможность реализовать медленные программные движения по переменной q_1. Для этого можно воспользоваться разложением решения указанной выше системы по малому параметру. Управление u_1 будет входить в уравнение первого приближения, решения которого и будут определять движение в соответствии с целью управления.

Отметим, что эффект демпфирования упругих колебаний с помощью управляющего воздействия носит нелинейный характер. Если вместо управления (2.1) взять управление, линейно зависящее от $\dot{q}_1$, то соответствующая порождающая система не будет содержать демпфирующих сил, т.е. будет консервативной. Это, как уже отмечалось выше, приведет к тому, что энергия упругих сил будет сохраняться, и в порождающей системе будут существовать незатухающие движения.

3. Условие ограниченности управления. Рассмотрим вопрос, связанный с ограничением на управление в форме неравенства (1.5). Из выражения (2.1) следует, что формально управление должно быть неограниченным, если иметь в виду стремление параметра к нулю. Как вытекает из установленной теоремы, управление будет обеспечивать демпфирование упругих колебаний сколь угодно большой частоты. Поэтому, если частоты упругих колебаний ограничены, что реально имеет место, то величина h в (1.5) в соответствии с (2.1) будет иметь порядок квадрата максимальной частоты. Этот факт показывает, что с помощью ограниченного управления нельзя обеспечить демпфирование упругих колебаний в далекой части спектра. Из физических соображений ясно, что амплитуда таких колебаний будет достаточно малой, так что форма упругого стержня будет мало отличаться от прямолинейной формы абсолютно жесткого стержня.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16251).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1981. № 5. С. 142–152.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966 300 с.
5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.II.1994