УДК 539.3

© 1994 г. В.Я. Терещенко

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Особенности решения некоторых задач теории упругости (типа контактных задач и задач о трещинах) в постановке вариационных задач для граничных функционалов аналитически моделируются при помощи сингулярного решения уравнения Ламе; численное моделирование использует несвязанную вариационную формулировку метода граничных элементов.

В отличие от случая, когда особенность решения краевой задачи вытекает естественным образом из аналитического решения ее, как это происходит в решениях плоских задач теории упругости при помощи аппарата теории функций комплексного переменного (примерами являются: достаточно обширный класс задач с особенностями типа отверстия, вырезы, заострения и т.д. [1, 2], контактные задачи для штампа с прямоугольным основанием [3, 4], задачи о трещинах [4]), моделирование особенности решения связано с построением модели, в которой для реализации особенности предуматривается некоторая аналитическая или численная процедура (например, решение в рядах дополняется разложением в ряд дельта-функции, сосредоточенной в особой точке, или при конечно-элементной (КЭ)-аппроксимации решения используются "сингулярные" элементы в окрестности особой точки). Имеется большое число современных публикаций, посвященных решению задач теории упругости с особенностями с использованием аппарата граничных интегральных уравнений (ГИУ) и численных аппроксимаций типа (КЭ)-аппроксимаций, аппарата ГИУ и асимптотических разложений в окрестности особых точек и др.

В данной работе для моделирования особенности решения на границе некоторых задач теории упругости (как плоских, так и пространственных) предлагается использовать численно-аналитический алгоритм, который приводит к реализации предложенного [5–8] вариационного метода граничных элементов (ВМГЭ) в несвязанной формулировке [9]: перемещения и напряжения несвязаны через определяющие соотношения на границе, что позволяет принять независимую для них гранично-элементную аппроксимацию (ГЭА) (более высокого порядка для напряжений в окрестности особой точки). При этом определяющие соотношения выполняются как уравнения связей при помощи множителей Лагранжа в процессе решения двойственной вариационной задачи.

1. Алгоритм ВМГЭ предусматривает [8] редукцию граничной задачи на границу в виде эквивалентной задачи минимизации граничного функционала (ГФ) на решениях однородного уравнения Ламе в точках области. Если исходная граничная задача нерегулярная, в том смысле, что граница имеет особую точку (например, вершина трещины), то нуждается в обосновании формула Бетти [10] (или формула Грина, если речь идет об абстрактной эллиптической краевой задаче второго порядка), которая используется при редукции задачи на границу. Ссылаясь на анализ, проведенный в [11] (с. 23) для областей с границей непрерывной по Липшицу, можно утверждать, что, если внешняя нормаль к границе существует "почти всюду" (за исключением граничного множества меры нуль – особой точки, или линии) и оператор следа γ: $: W_2^1(G)\ni\varphi \to \gamma\varphi \in W_2^{1/2}(S)$ также существует "почти всюду", то обоснована формула Бетти и возможна постановка вариационной задачи для ГФ.

Для аналитического моделирования особенности предлагается использовать сингулярное решение уравнения Ламе. Идея заключается в том, чтобы результат наличия особой точки рассматривать как поле напряжений, порожденное действием единичной силы, приложенной в особой точке. Тогда нормальная компонента $\mathbf{g}^{(\nu)}(y)$ заданных напряжений в точках границы $y \in S$ (например, на контуре трещины) будет представляться как сумма регулярной составляющей $\mathbf{g}_r^{(\nu)}$ от заданных на границе (контуре трещины) напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{(ij)}(y)$ $(i, j = 1,..., m)$ и сингулярной составляющей $\mathbf{g}_s^{(\nu)} \equiv \mathbf{T}^{(ij)}(y, y_0)$ $(y_0 \in S$ – особая точка границы), которые по сути – сингулярные ядра вектор-потенциала двойного слоя ([12], с. 219). Таким образом, сингулярность функции заданных на границе напряжений

$$\mathbf{g}^{(\nu)} = \mathbf{g}_r^{(\nu)}(\boldsymbol{\sigma}^{(ij)}) + \mathbf{T}^{(ij)} \tag{1.1}$$

обусловливает нерегулярность вариационной задачи для ГФ

$$\min_{\mathbf{u}\in D} F(\mathbf{u}), \qquad F(\mathbf{u}) = \int_S \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})ds - 2\int_S \mathbf{u}\mathbf{g}^{(\nu)}ds \tag{1.2}$$

$$D(F) = \{\mathbf{u}\colon \ \mathbf{A}\mathbf{u}(x) = 0, \ x \in G\}$$

где D – множество допустимых векторов перемещений, $\mathbf{A}$ – векторный оператор теории упругости и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ – вектор искомых напряжений в точках границы S, ограничивающей область G.

В связи с нерегулярностью задачи (1.2) возникает вопрос о существовании решения. Достаточно установить ограниченность линейного функционала $l(\mathbf{u}) = \int_S \mathbf{u}\mathbf{T}^{(ij)}ds$ как сингулярного интеграла с плотностью $\mathbf{u}(y) \in L_2(S)$, $y \in S$ и сингулярным ядром $\mathbf{T}^{(ij)}(y, y_0)$, $y, y_0 \in S$, имеющим особенность $O(r_0^{-2})$, $r_0 = |y - y_0|$. Известно [12], что при некоторых условиях на характеристику указанного интеграла (не влияющих на постановку рассматриваемой задачи), сингулярный интегральный оператор, порожденный им, ограничен в $L_2(S)$ ([12], с. 127). Тогда существование решения задачи (1.2) следует из того, что эквивалентная ей [8] вторая задача имеет решение [10].

В связи с обсуждаемым вопросом существования решения вариационной задачи (1.2), который связан с вопросом обоснования сходимости решения аппроксимирующей (дискретной) вариационной задачи, следует отметить, что больший смысл имеет вопрос существования именно дискретной вариационной задачи. Например, при линейной ГЭА контура трещины (круговой или эллиптической в плане) получаем многоугольную границу, которая является непрерывной по Липшицу ([11], с. 95); концепция кратных узлов ([13], с. 196) позволяет "изолировать" особую точку – вершину трещины и в условиях конформного МКЭ [11] (выполняются условия согласованности ГЭ, так что аппроксимирующая решение глобальная интерполяционная функция непрерывна во всех точках дискретной границы) решение соответствующей дискретной вариационной задачи всегда существует ([11], с. 26). При этом узловые значения в кратных узлах сингулярных функций $\mathbf{T}^{(ij)}$ (моделирующих поле напряжений в окрестности вершины трещины) конечны при формировании дискретного функционала $F_\Delta(\mathbf{u}_N)$ (см. ниже).

Если $\mathbf{u}_0$ – решение задачи (1.2), то u_0 удовлетворяет граничному вариационному уравнению

$$\int_S \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)ds - \int_S \mathbf{u}\mathbf{g}^{(\nu)}ds = 0, \qquad \forall \mathbf{u} \in D(F) \tag{1.3}$$

Алгоритм ВМГЭ сводится к аппроксимации и решению уравнения (1.3).

2. Численное моделирование особенности (например, поля напряжений в окрестности вершины трещины) использует, как уже упоминалось, несвязанную формулировку ВМГЭ [9], которая должна быть модифицирована в связи со спецификой решений задач теории упругости с особенностями: в окрестности особой точки (вершины трещины) поле перемещений является регулярным, а поле напряжений – сингулярным (например, решение Гриффитса и др.), тем самым определяющие соотношения локально не выполняются. В таком случае естественно использовать локально-несвязанную формулировку ВМГЭ при аппроксимации этих решений: на части границы (в окрестности особой точки) определяющие соотношения выполняются как уравнения связей в вариационной задаче, а на остальной границе применяются связанные аппроксимации. Соответственно модифицируется алгоритм [9], при этом вариационный принцип [9] остается в силе: независимо от того, задаются ли уравнения связей на всей границе или на части ее, в состоянии равновесия энергия поверхностных напряжений на соответствующих перемещениях имеет одно и то же значение. Сказанное выражается соотношением двойственности, которое имеет место для модифицированного лагранжиана (см. [9], формула (1.4))

$$L_0(\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)},\boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{u}) - \int\limits_{S_0} \boldsymbol{\lambda}[\mathbf{t}^{(\nu)} - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})]ds \tag{2.1}$$

Здесь $F(\mathbf{u})$ – функционал из (1.2), а второе слагаемое – интегральное выражение определяющих соотношений для вектора поверхностных напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}$ на участке границы S_0 в окрестности особой точки, при этом множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ имеют смысл перемещений [9] и в дальнейшем отождествляются с ними. Система вариационных уравнений, к решению которой приводится [9] решение двойственной задачи для L_0 записывается в виде

$$2\int\limits_{S} \mathbf{v}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})ds - 2\int\limits_{S} \mathbf{v}\mathbf{g}^{(\nu)}ds + \int\limits_{S_0} \boldsymbol{\lambda}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})ds = 0 \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{S_0} \boldsymbol{\mu}[\mathbf{t}^{(\nu)} - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})]ds = 0 \tag{2.3}$$

$\forall\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu} \in D(F)$ (см. (1.2)), при этом второе из них соответствует уравнению связей.

Предварительно, не используя аппроксимации МГЭ, проведем анализ решений уравнений (2.2), (2.3) на приближениях типа Бубнова–Галеркина (по сути аппроксимации ВМГЭ, предложенные в [9], являются таковыми). Пусть имеются системы координатных функций: полная система вектор-функций $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}$ – однородных решений уравнения теории упругости и система достаточно гладких вектор-функций $\{\boldsymbol{\psi}_j\}$, определенных в точках S_0. Рассмотрим приближения для искомых вектора перемещений и напряжений

$$\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{k} U_i\boldsymbol{\varphi}_i, \quad \mathbf{t}_n^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} T_j\boldsymbol{\psi}_j \tag{2.4}$$

где U_i, T_j – искомые коэффициенты. Отождествим в уравнении (2.2) $\boldsymbol{\lambda}$ с $\mathbf{u}$, а в уравнении (2.3) $\boldsymbol{\mu}$ с $\mathbf{v}$; очевидно, уравнения будут выполняться для всех вектор-функций $\mathbf{v}$ вида $\mathbf{v}_k = \sum V_i\boldsymbol{\varphi}_i$ $(i = 1,..., k)$, где V_i – произвольны, тогда из (2.2), (2.3), используя для известного вектора $\mathbf{g}^{(\nu)}$ разложение вида $\mathbf{g}_k^{(\nu)} = \sum Q_i\boldsymbol{\varphi}_i$ $(i = 1,..., k)$, получим систему разрешающих уравнений относительно U_i и T_j.

Получение численного решения связано с вопросом разрешимости подсистемы уравнений относительно U_i, полученной из уравнения (2.2). Коэффициенты T_j определяются после нахождения U_i из подсистемы, полученной из уравнения (2.3) (сказанное следует из того, что неизвестное $\mathbf{t}^{(\nu)}$ входит только во второе уравнение системы (2.2), (2.3)).

Невырожденность матрицы системы имеет место, если спектр матрицы не содержит нулевого собственного значения.

Для доказательства этого используем спектральный анализ интегро-дифференциальных форм, входящих в уравнение (2.2) (при $\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathbf{u}$). Приведем уравнение к операторному виду, используя аппарат соболевских пространств (с дробным индексом) вектор-функций, определенных в точках S (предполагается достаточная гладкость S), считая, что уравнения связей заданы на всей границе S, т.е. $S_0 \equiv S$; затем вернемся к рассматриваемому случаю, когда $S_0 \subset S$. Указанные пространства $W_2^{1/2}(S)$, $W_2^{-1/2}(S)$ являются пространствами следов на S решений из соболевского класса $W_2^1(G)$ вариационных задач типа (1.2). Будем обозначать скалярные произведения в этих пространствах соответственно $(.,.)_{1/2,S}$, $(.,.)_{-1/2,S}$ и $\langle .,. \rangle$ – отношение двойственности на $W_2^{1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$.

В дальнейшем используются некоторые построения из [14, 15]. Следует учесть, что области определения билинейных форм $\langle \mathbf{v}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) \rangle$ и $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \rangle$ (при $\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathbf{u}$), вообще говоря, различны: первая из них, в силу равенства (вытекающего из формулы Бетти, если $\mathbf{Au} = 0$ в G, см. (1.2))

$$\int_S \mathbf{v}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})ds = 2\int_G W(\mathbf{u},\mathbf{v})dG$$

симметрична и положительно определена при выполнении условий однозначной разрешимости задачи (1.2) [10]

$$\int_G \mathbf{u}dG = \int_G \operatorname{rot}\mathbf{u}dG = 0 \qquad (2.5)$$

при этом соответствующее пространство следов $W_2^{*1/2}(S)$ образует [14] подпространство в $W_2^{1/2}(S)$; вторая форма определена на всем пространстве $W_2^{1/2}(S)$. Таким образом, во всяком случае выражение $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \rangle$ (при $\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathbf{u}$) имеет смысл каждый раз, когда имеет смысл выражение $\langle \mathbf{v}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) \rangle$. Далее, для первой формы имеет место представление [14] (на основании теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве)

$$\langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}),\mathbf{v} \rangle = [\mathbf{u},\mathbf{v}]_{1/2,S} = (\mathbf{Tu},\mathbf{v})_{O,S} \qquad \forall \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S)$$

где $[.,.]_{1/2,S}$, $(.,.)_{O,S}$ – скалярные произведения соответственно в $W_2^{*1/2}(S)$, $L_2(S)$, а $\mathbf{T}$ – самосопряженный оператор в $W_2^{*1/2}(S)$. Для второй формы, в силу обобщенного неравенства Шварца

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|_{1/2,S} \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\|_{-1/2,S}$$

имеют место альтернативные представления

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{u},\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}))_{1/2,S} \qquad \forall \mathbf{u} \in W_2^{1/2}(S)$$

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{T}_0\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}))_{-1/2,S} \qquad \forall \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)$$

где $\mathbf{T}_0$ – каноническая изометрия $W_2^{1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$, которая определяется (по названной выше теореме Рисса) соотношением

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{1/2,S} = (\mathbf{T}_0\mathbf{u},\mathbf{v})_{O,S} = (\mathbf{T}_0\mathbf{u},\mathbf{T}_0\mathbf{v})_{-1/2,S} \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in W_2^{1/2}(S)$$

и является вполне непрерывным оператором. Отсюда, используя второе из представлений при $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{T}_0\mathbf{v}$, получим $\langle \mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{T}_0\mathbf{u},\mathbf{v})_{O,S} \quad \forall \mathbf{v} \in W_2^{1/2}(S)$.

Остается представить линейный непрерывный функционал $\langle \mathbf{g}^{(\nu)}, \mathbf{v} \rangle$ (при $\mathbf{g}^{(\nu)} \in W_2^{-1/2}(S)$) в виде $\langle \mathbf{g}^{(\nu)}\mathbf{v} \rangle \doteq (\mathbf{Q},\mathbf{v})_{O,S}$, $\quad \mathbf{Q} \in W_2^{-1/2}(S)$, $\quad \forall \mathbf{v} \in W_2^{1/2}(S)$.

В итоге суммированием полученных результатов уравнение (2.2) приводится к операторному уравнению $\mathbf{T}u + \mathbf{T}_0 u = \mathbf{Q}$. Полученный результат с точки зрения спектрального анализа выводит на применение известной теоремы Вейля (см., например, [16]) о сохранении предельного спектра самосопряженного оператора при возмущении его вполне непрерывным самосопряженным оператором. Именно предельный спектр самосопряженного ограниченного оператора $\mathbf{T}$ ($\|\mathbf{Tu}\|_{-\frac{1}{2},S} \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{\frac{1}{2},S}$, $c > 0$, см. [14]) содержится в отрезке $[c_0, \|\mathbf{T}\|_{-\frac{1}{2},S}]$, где $c_0 > 0$ – постоянная из условия положительной определенности [14] $(\mathbf{Tu}, \mathbf{u})_{0,S} \geqslant c_0\|\mathbf{u}\|^2_{0,S}$. Тогда в силу упомянутой теоремы Вейля предельный спектр оператора $\mathbf{T} + \mathbf{T}_0$ также содержится в указанном отрезке. Следовательно, нуль не принадлежит спектру этого оператора, соответственно матрица, порожденная им на аппроксимациях $\{\mathbf{u}_k\}$, невырождена, что и требовалось доказать.

Как уже отмечалось, после определения коэффициентов U_i ($i = 1,..., k$) коэффициенты T_j ($j = 1,..., n$) (см. (2.4)) определяются из подсистемы, полученной из уравнения (2.3), матрица которой формируется из коэффициентов вида $\int \varphi_l \psi_j ds$ ($l = 1,..., k$; $j = 1,..., n$) и невырожденность ее может быть обеспечена при выборе аппроксимирующих систем функций (см. (2.4)). Возвращаясь к рассматриваемому случаю, когда $S_0 \subset S$ отметим, что проведенные выкладки для билинейной формы $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\rangle$ (при $\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathbf{u}$) имеют место и для сужения ее на S_0. При этом учитывается, что $\|\mathbf{v}\|_{\frac{1}{2},S_0} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{\frac{1}{2},S}$ $\forall \mathbf{v} \in W_2^{\frac{1}{2}}(S)$ и знак равенства имеет место, если $\mathbf{v}|_{S\setminus S_0} = 0$.

Можно провести анализ решений системы (2.2), (2.3). Используя (2.4) для каждых $i \in [1, k]$ и $j \in [1, n]$, из уравнений (2.2), (2.3) получим

$$U_i = Q_i a_{il}(b_{il} + b^0_{il})^{-1}, \quad T_j = U_i b^0_{il}(c^0_{jl})^{-1}$$

где коэффициенты a_{il}, b_{il} ($i, l = 1,..., k$) определяются через интегралы по S от произведения функций φ_i, φ_l (и их производных), а коэффициенты b^0_{il}, c^0_{jl} ($i, l = 1,..., k$; $j = 1,..., n$) определяются через интегралы по S_0. Очевидна связность решений через коэффициент b^0_{il} – результат реализации уравнения связей (2.3) в точках S_0, при этом, если $b^0_{il} = 0$ ($S_0 = 0$ в случае отсутствия особой точки), то решение $\mathbf{u}_i = U_i \varphi_i$, $U_i = Q_i a_{il} b^{-1}_{il}$ ($i, l = 1,..., k$), есть решение "по Ритцу" регулярной второй задачи теории упругости.

Отметим, что аппроксимации, подобные (2.4), рассматривались ранее [17, 18] при реализации алгоритмов двойственности для решения задач минимизации обобщенных функционалов Трефтца эллиптических краевых задач второго порядка; установлена их сходимость к точному решению вариационной задачи.

3. Переходя к аппроксимациям МГЭ, опишем схему алгоритма ВМГЭ (подробно алгоритм изложен в [8]). При связанной аппроксимации поле перемещений в точках граничного элемента (ГЭ) интерполируется по узловым значениям "локальная интерполяция"; глобальная интерполяционная функция в точках дискретной границы составляется с учетом условия согласованности ГЭ: в общих узлах смежных элементов узловые значения равны, что соответствует конформному варианту МКЭ [11]; поле напряжений является производным от поля перемещений. Множество D (см. (1.2)) аппроксимируется последовательностью дискретных граничных потенциалов с плотностью в виде интерполяционных функций, узловые значения которых определяются из конечномерного вариационного уравнения (аппроксимирующего уравнение (1.3)), которое преобразуется в систему дискретных граничных уравнений (ДГУ).

Рассмотрим схему реализации локально-несвязанной формулировки ВМГЭ для численного учета особенности поля напряжений в окрестности особой точки $y_0^f \in S$. Пусть $S_\Delta = U\Delta s_n$ ($n = 1,..., N$) – дискретная граница, Δs_n – граничные элементы и

$$y^{(i)}_\Delta = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} Y^{(i)}_{nk} \psi_k, \quad i = 1,\ldots,m \tag{3.1}$$

– параметрическое уравнение S_Δ, где $Y_{nk}^{(i)}$ – декартовые (глобальные) координаты узлов $k \in \Delta s_n$, а $\psi_k(\eta)$ – базисные функции МГЭ и η – локальная координата точек Δs_n. При использовании изложенного выше принципа суперпозиции для вектора заданных напряжений: на регулярное поле напряжений накладывается сингулярное поле напряжений (как результат влияния особой точки), дискретизация границы и ГЭА искомого поля напряжений также должна соответствовать этому принципу: на изопараметрическую аппроксимацию локально налагается субпараметрическая (в окрестности особой точки). При этом один из узлов изопараметрической интерполяции совмещается с особой точкой, а субпараметрическая интерполяция использует кратные узлы в окрестности особой точки. Таким образом, локально-несвязанная ГЭА решения записывается

$$\mathbf{u}_N = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_{nk}\psi_k, \quad \boldsymbol{\lambda}_N \equiv \mathbf{u}_N, \quad \mathbf{t}_N^{(\nu_N)} = \sum_{k'=1}^{K'} \mathbf{T}_{Nk'}\psi'_{k'} \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{u}_N$ – изопараметрическая аппроксимация вектора перемещений в точках S_Δ, где $\mathbf{U}_{nk}$ – вектор узловых значений в узлах $\{k\}$ изопараметрической интерполяции, при этом связанная ГЭА вектора $\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)$ определена на всей границе S_Δ, $\mathbf{t}_N^{(\nu_N)}$ – локальная интерполяция поля напряжений в точках "сингулярного" ГЭ Δs_N (в окрестности особой точки), где $\mathbf{T}_{Nk'}$ – вектор узловых значений субпараметрической интерполяции при помощи базисных функций $\psi'_{k'}$ более высокого порядка, чем ψ_k, множество узлов $\{k'\}$ включает кратные узлы k'_-, k'_+ в окрестности особой точки. Таким образом, элемент Δs_N соответствует дискретной части $S_{o\Delta}$. Здесь просматривается некоторая аналогия со специальными элементами, которые использовались [19] для моделирования особенности в окрестности вершины трещины.

ГЭА (4.2) являются [9] приближением решения двойственной задачи для аппроксимирующего лагранжиана $L_{o\Delta}(\mathbf{u}_N, \mathbf{t}_N^{(\nu_N)}, \boldsymbol{\lambda}_N)$ (см. (2.1)), которая эквивалентна конечно-мерной вариационной задаче для ГФ $F_\Delta(\mathbf{u}_N)$, аппроксимирующей задачу (1.2). Решение указанной задачи приводится [9] к решению системы ДГУ

$$2\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_{nk} b_{kl}^{n} + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_{Nk} b_{lk}^{N} = 2\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \mathbf{Q}_{nk} a_{kl}^{n} \tag{3.3}$$

$$\sum_{k'=1}^{K'} \mathbf{T}_{Nk'} c_{k'l}^{N} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_{Nk} b_{kl}^{N}, \quad l = 1,\ldots,K \tag{3.4}$$

где коэффициенты a_{kl}^{n}, b_{kl}^{n}, c_{kl}^{n} определяются [8] как вклады смежных элементов Δs_n, для которых узел k является общим.

Очевидно структура уравнений (3.3), (3.4) соответствует структуре уравнений (2.2), (2.3) на приближениях (2.4). Алгоритм решения (3.3), (3.4) также соответствует рассмотренному выше: решается "глобальная" система ДГУ относительно $\{\mathbf{U}_{nk}\}_{k=1,\ldots,K_N}$ (K_N – число узлов изопараметрической аппроксимации поля перемещений в точках S_Δ, см. (3.2)); затем решается "локальная" система ДГУ относительно $\{\mathbf{T}_{Nk'}\}_{k'=1,\ldots,K'}$ (K' – число узлов субпараметрической интерполяции поля напряжений в точках $S_{o\Delta} \subset S_\Delta$). Разрешимость "глобальной" системы следует из изложенного выше (разд. 2) при выполнении [5] условий (см. (2.5))

$$\int_{G_\Delta} \bar{\mathbf{u}}_N dG_\Delta = \int_{G_\Delta} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}_N dG_\Delta = 0$$

где $\bar{\mathbf{u}}_N$ – решение дискретной вариационной задачи в области G_Δ с границей S_Δ (аппроксимирующей задачу (1.2)), построенное по аппроксимациям на границе $\mathbf{u}_N$, $\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)$ согласно алгоритма ВМГЭ [8].

При выборе интерполяционного полинома ГЭА поля перемещений используется известное соотношение между числом s_u степеней свободы КЭ (в терминах компонент узловых перемещений) и порядком p полинома: $s_u = {}^1/_2(p + 1)(p + 2)$ (записанное здесь для двумерного элемента), которое определяет полный полином. Тогда возможное число степеней свободы s_t в терминах компонент узловых напряжений должно удовлетворять условию $s_t \geqslant s_u - s_0$, где s_0 – число КЭ как жесткого целого.

4. Рассматривалась модельная плоская задача о напряженно-деформированном состоянии упругой однородной изотропной среды с трещиной под действием равномерно распределенных на контуре трещины напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{(22)} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\sigma}^{(12)} \equiv -\boldsymbol{\tau}_0$, вызывающих деформации нормального отрыва и поперечного сдвига, постановка задачи имеется в [19]. Использовался изложенный выше численно-аналитический алгоритм моделирования особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины (см. (1.1)), где $\mathbf{g}_r^{(\mathrm{v})} = (-\boldsymbol{\tau}_0)l^{(1)} + (-\boldsymbol{\sigma}_0)l^{(2)}$, $l^{(i)}$ – направляющие косинусы внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$ к контуру трещины S. Для реализации решения задачи (1.2) использовалась линейная изопараметрическая ГЭА поля перемещений в точках контура трещины, на которую в окрестности вершины трещины в точках "сингулярного" элемента Δs_N накладывалась субпараметрическая аппроксимация в следующих вариантах: сгущались узлы линейной аппроксимации поля перемещений; на линейном элементе Δs_N использовался кубический полином для аппроксимации поля перемещений; использовалась локально-несвязанная ГЭА вида (3.2), где ψ_k – функции линейные, а $\psi'_{k'}$ – функции кубические. Численный эффект оценивался: для первых двух связанных аппроксимаций на всей границе S_Δ при помощи апостериорной оценки [8], правая часть которой может быть записана в дискретном виде (ориентируясь на обозначения системы (3.3))

$$I_{S_\Delta} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{l=1}^{K} \mathbf{U}_{nl}\left(\sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_{nk} b_{kl}^{n} - \sum_{k=1}^{K} \mathbf{Q}_{nk} a_{kl}^{n} \right)$$

где $\mathbf{Q}_{nk} = \mathbf{Q}_{rnk} + \mathbf{T}_{nk}^{(ij)}$, $\mathbf{Q}_{rnk}$, $\mathbf{T}_{nk}^{(ij)}$ – векторы узловых значений соответственно регулярной и сингулярной составляющих заданных на контуре трещины напряжений (см. (1.1)); для третьего варианта локально-несвязанной аппроксимации I_{S_Δ} дополняется слагаемым (см. (3.4)) при $K = 2$, $K' = 4$

$$\sum_{l=1}^{K} \mathbf{U}_{Nl}\left(\sum_{k'=1}^{K'} \mathbf{T}_{Nk'} c_{k'l}^{N} - \sum_{k'=1}^{K'} \mathbf{T}_{Nk'}^{(ij)} c_{k'l}^{N} \right)$$

При фиксированном числе $N = 12$ (на половине контура трещины) измельчение линейной аппроксимации (вводились три дополнительных узла) и использование интерполяционного кубического полинома дает примерно равноценный численный эффект: $I_{S_\Delta} = 0{,}605$; $0{,}545$; использование локально-несвязанной ГЭА дает значительно лучший результат $I_{S_\Delta} \approx 0{,}22$.

Таким образом, и при изопараметрической ГЭА возможно численное моделирование особенности напряжений в окрестности особой точки при помощи сингулярного решения, но с недостаточной точностью. Точность зависит от порядка аппроксимации в дополнительных узлах $\{k'\}$, т.е. от порядка базисных функций $\psi'_{k'}$, однако следует учесть, что увеличение порядка не всегда приводит к увеличению точности аппроксимации. Например, отмечалось ([11], с. 142), что если решение эллиптической краевой задачи не очень гладкое, то использование для аппроксимации его интерполяционных полиномов степени $p > 4$ не улучшает точность аппроксимации.

Изложенный численно-аналитический алгоритм моделирования особенностей решения применим также для решения традиционных задач теории упругости с особенностями типа отверстия, вырезы, заострения. В контактных задачах и в задачах о трещинах (как плоских, так и пространственных) алгоритм позволяет реализовать особенность поля напряжений порядка r_0^{-2}, так как указанную особенность имеют (см. выше) компоненты тензора напряжений $\mathbf{T}^{(ij)}$, при помощи которых моделируется поле напряжений в окрестности особых точек, существующие алгоритмы моделирования особенностей в задачах о трещинах [19] реализуют особенность напряжений порядка $r_0^{-1/2}$ и r_0^{-1}.

В связи с указанным сравнением охарактеризуем некоторые осложнения при реализации предложенного алгоритма. Естественно алгоритм решения задачи с особенностью усложняется по сравнению с алгоритмом решения регулярной задачи: в данном случае как измельчение разбиения в окрестности особой точки на изопараметрические элементы, так и использование локально субпараметрической интерполяции приводит к увеличению порядка системы разрешающих уравнений, однако и использование сингулярных элементов (элемент Уилсона [19]) также приводит к увеличению числа степеней свободы и, следовательно, к увеличению порядка системы уравнений. Осложнение, связанное с плохой обусловленностью матрицы системы, может возникнуть при выборе размера окрестности кратных узлов (см. выше); здесь использованы рекомендации [13]: размер составляет 0,05 длины элемента Δs_N, указанный момент влияет также на точность определения коэффициента интенсивности напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
3. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
4. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 219 с.
5. *Терещенко В.Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.
6. *Терещенко В.Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118–125.
7. *Терещенко В.Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.
8. *Терещенко В.Я.* Алгоритм реализации и оценки погрешности вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 442–451.
9. *Терещенко В.Я.* Двойственные несвязанные формулировки вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 729–736.
10. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
11. *Сьярле Ф.* Методы конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
12. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
13. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
14. *Терещенко В.Я.* Метод ортогональных разложений на границе области в трехмерных задачах линейной теории упругости // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 688–697.
15. *Терещенко В.Я.* Ортогональные разложения на границе области в эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 3. С. 476–486.
16. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969. 232 с.
17. *Терещенко В.Я.* О решении задачи минимизации обобщенных функционалов Трефтца как вариационной задачи с ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 11. С. 1710–1717.
18. *Терещенко В.Я.* Вариационно-разностная схема реализация алгоритма двойственности в задачах минимизации обобщенных функционалов Трефтца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 30. № 2. С. 320–324.
19. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
30.IX.1992