УДК 539.3

© 1994 г. Н.Ф. Морозов, В.Г. Осмоловский

О ПОСТАНОВКЕ И ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Рассматривается модель фазовых переходов в задачах механики сплошной среды, восходящая к Гиббсу [1] и получившая дальнейшее развитие в [2–5]. Предлагается такое расширение вариационной постановки задачи, в рамках которого удается доказать теорему существования глобального минимума функционала энергии термоупругой среды, при определенных ограничениях на удельную плотность энергии.

1. Обсуждение физической постановки задачи. Математическая особенность обсуждаемой вариационной задачи заключается в необходимости одновременно варьировать вектор-функцию смещений u и места расположения фаз $\Omega^{\pm}$. Физическая природа задачи о возникновении и развитии зародышей новой фазы, обладающих достаточно сложной структурой, вызывает необходимость рассматривать характери-стические функции множеств $\Omega^{\pm}$, принадлежащие специальному функциональному пространству – пространству функций с ограниченной вариацией. Вышеуказанные причины приводят к усложнению математической задачи.

Упругая среда, заполняющая ограниченную область $\Omega \subset R^m$, ($m = 2, 3$), характеризуется полем смещения – вектор-функцией $u(x)$, равной нулю на границе области, и температурой T, постоянной во всем теле. Предполагается, что вещество упругой среды может быть в двухфазовом состоянии. Каждая из фаз характеризуется своей плотностью энергии деформации $F^{\pm}(\dot{u}(x), u(x), x, T)$ (индексы плюс и минус отвечают первой и второй фазе соответственно, а $\dot{u}(x) \equiv \nabla u(x)$ – матрица первых производных вектор-функции $u(x)$) и местом своего расположения в недеформированном состоянии – множествами $\Omega^{\pm}$, причем $\Omega^+ \cap \Omega^- = \phi$, $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$. В качестве полной энергии деформации естественно взять функционал

$$I[u,\Omega^+,T] = \int_{\Omega^+} \rho^+ F^+(\dot{u},u,x,T)dx + \int_{\Omega^-} \rho^- F^-(\dot{u},u,x,T)dx, \tag{1.1}$$

$$\Omega^- = \Omega \setminus \Omega^+, \quad u = u(x)$$

Здесь $\rho^{\pm}$ – плотности вещества фазы плюс и минус соответственно. Функционал (1.1) нужно минимизировать среди всех допустимых векторных полей $u(x)$ и множеств Ω^+. Функция $u(x)$ и множество Ω^+, минимизирующие функционал (1.1), определяют состояние равновесия упругой двуфазовой среды. Если множество Ω^+ или Ω^- пусто, то в равновесии упругая среда состоит лишь из одной фазы.

К сожалению, функционал (1.1) может и не достигать своего минимума.

Для пояснения этого утверждения рассмотрим одномерный модельный пример, в котором $\Omega \subset R^3$ – шаровой слой $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < \infty$, $u(r)$ – скалярная функция (смещение вдоль радиуса), $\dot{u}(r)$ – ее производная. Ненулевые компоненты тензора деформации при наличии лишь радиальных смещений в сферических координатах имеют вид $e_{rr} = \dot{u} + u/r$, $e_{\phi\phi} = u/r$.

Зададим функции $F^{\pm}$ равенством

$$F^{\pm}=F^{\pm}(e_{rr},e_{\varphi\varphi})=(e_{rr}\mp1)^2+e^2_{\varphi\varphi}=(\dot u+u/r\pm1)^2+(u/r)^2 \tag{1.2}$$

Будем минимизировать функционал (1.1), (1.2) с $\rho^+=\rho^-=1$

$$I[u,\Omega^+]=4\pi\int\limits_{\Omega^+}r^2[(\dot u+u/r-1)^2+(u/r)^2]dr+4\pi\int\limits_{\Omega^-}r^2[(\dot u+u/r+1)^2+(u/r)^2]dr$$

на множестве функций $u(r)\in \overset{0}{W}{}^1_2[r_1,r_2]$ и измеримых множествах Ω^+. При каждом $u\in \overset{0}{W}{}^1_2[r_1,r_2]$ и измеримом множестве Ω^+ функционал (1.1), (1.2) положителен. Однако $\inf I[u,\Omega^+]$ по всем $u\in \overset{0}{W}{}^1_2[r_1,r_2]$ и измеримым множествам Ω^+ из отрезка $[r_1,r_2]$ равен нулю.

Действительно, разобьем отрезок $[r_1,r_2]$ на 2^n равных отрезков. Занумеруем полученные отрезки, начиная от точки r_1. В качестве последовательности $\overset{+}{\Omega}_n$ возьмем объединение всех отрезков с нечетными номерами, а $\overset{-}{\Omega}_n$ – с четными. Пусть $u_n(r)$ – непрерывная, кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, для которой $\dot u_n(r)=1$ при $x\in\Omega^+_n$, $\dot u_n(r)=-1$ при $x\in\overset{-}{\Omega}_n$, причем $u_n(r_1)=u_n(r_2)=0$. Тогда функция $u_n(r)$ имеет вид "пилы" и принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}^1_2[r_1,r_2]$. Видно, что для функционала (1.1), (1.2) справедливо соотношение $I[u_n,\overset{+}{\Omega}_n]\to0$ при $n\to\infty$.

Данный пример построен с помощью приема, использованного в [6]. Заметим, что плотность энергии (1.2) удовлетворяет принципу материальной индифферентности [7].

Отметим, что в приведенном выше примере минимизирующая последовательность $u_n(r)$, $\overset{+}{\Omega}_n$ для функционала (1.1), (1.2) содержала 2^{n-1} точку раздела фаз, при этом функционал I, допускающий энергетическую трактовку, стремится к нулю.

Естественно ввести в (1.1) дополнительное антагонистическое слагаемое, подобное поверхностной энергии Гриффитса, пропорциональное площади образующихся поверхностей раздела. Тогда функционал энергии (1.1) заменится на

$$I[u,\Omega^+,T]=\int\limits_{\Omega^+}\rho^+F^+(\dot u,u,x,T)dx+\int\limits_{\Omega^-}\rho^-F^-(\dot u,u,x,T)dx+\sigma|S| \tag{1.3}$$

где S – граница раздела Ω^+ и Ω^-, $|S|$ – ее площадь, а σ – положительная постоянная. Добавка $\sigma|S|$ физически интерпретируется как поверхностная энергия, распределенная на границе раздела фаз и обуславливаемая разной природой вещества каждой фазы.

2. Функции ограниченной вариации и множества Каччопполи. Поскольку в качестве допустимых множеств Ω^+ не исключаются множества довольно сложной структуры, то понятие $|S|$ в (1.3) нуждается в уточнении и расширении. Расширение понятия площади границы множества производится традиционным для теории минимальных поверхностей приемом [8], основанным на теории функций ограниченной вариации.

Пусть $\Omega\subset R^m$, $m\geqslant2$ – ограниченная область и $f(x)\in L_1(\Omega)$. Положим (всюду в дальнейшем интегрирование ведется по области Ω)

$$\int|Df|=\sup\{\textstyle\int f(x)\operatorname{div}g(x)dx:\ g\in C^1_0(\Omega,R^m),\ |g(x)|\leqslant1\ \text{ при }\ x\in\Omega\} \tag{2.1}$$

Будем говорить, что $f\in L_1(\Omega)$ имеет ограниченную вариацию в Ω, если $\int|Df|<\infty$.

Введенное определение вариации является естественным обобщением одномерного случая. Напомним, что функция одной переменной имеет ограниченную вариацию, если она раскладывается в сумму непрерывной функции и функции скачков.

Линейное пространство функций из $L_1(\Omega)$ с ограниченной вариацией обозначается через $BV(\Omega)$. Пространство $BV(\Omega)$ является банаховым относительно нормы $\|f\|_{BV} = \|f\|_{L_1} + \int|Df|$.

Очевидно, что $W_1^1(\Omega) \subset BV(\Omega)$.

Обратное включение, как показывает следующий пример, неверно. Пусть $\omega \subset R^m$, $\partial\omega \in C^2$, а $\chi(x)$ – характеристическая функция множества $\omega \cap \Omega$. Если $\omega \cap \Omega \neq \Omega$, то $\chi \not\subset W_1^1(\Omega)$, однако

$$\int|D\chi| = |(\partial\omega) \cap \Omega| \tag{2.2}$$

где $|(\partial\omega) \cap \Omega|$ – площадь части границы ω, лежащей в Ω.

Определение. Измеримое множество $A \subset \Omega$ называется множеством Каччопполи, если его характеристическая функция $\chi_A(x)$ принадлежит пространству $BV(\Omega)$. Конечная величина $|D\chi_A|$ называется периметром A.

Очевидно, что множество $\Omega\backslash A$ – также множество Каччопполи, а периметры A и $\Omega\backslash A$ совпадают в силу определения (2.1). Заметим также, что $\partial\Omega$ не дает вклада в периметр множества A. В случае кусочно-гладкой границы множества A обобщенное определение площади граничной поверхности совпадает с классическим.

С помощью вышеприведенных математических понятий переформулируем вариационную задачу (1.3). В качестве Ω_+ в функционале (1.3) будем брать произвольное измеримое множество с конечным периметром, а под $|S|$ будем понимать величину его периметра $|S| = \int|D\chi|$, где χ – характеристическая функция Ω_+. В терминах характеристической функции χ и ее вариации функционал (1.3) перепишется в виде

$$I[u,\chi,T] = \int\{\chi\rho^+F^+(\dot{u},u,x,T) + (1-\chi)\rho^-F^-(\dot{u},u,x,T)\}dx + \sigma\int|D\chi| \tag{2.3}$$

Представление (2.3) является естественным расширением (1.3). Преимущество (2.3) состоит в том, что оно имеет чисто аналитический характер и не содержит неудобных для дальнейшего исследования геометрических объектов – множеств $\Omega^\pm$ и площади границы их раздела. Представление (2.3) позволяет подключить к исследованию вариационной задачи о фазовых переходах весь арсенал методов исследования функционалов в банаховом пространстве. Переход от областей $\Omega^\pm$ с гладкой границей к множествам с конечным периметром соответствует операции "пополнения" пространства допустимых областей.

Следует отметить, что необходимость привлекать к рассмотрению множества сложной геометрии отвечает физической природе задач о возникновении и развитии зародышей новой фазы.

В этой работе сформулированы ограничения на плотности $F^\pm$, при которых функционал (2.3) достигает своего минимума на множестве допустимых смещений, исследован процесс возникновения двуфазового состояния в классической теории термоупругости.

Заметим, что различные варианты пространств функций ограниченной вариации находят применение в других разделах механики сплошных сред, например, в теории пластичности [9].

В заключение этого раздела приведем полезное для дальнейшего утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $\Omega \subset R^m$ – ограниченная область с границей, удовлетворяющей условию Липшица. Тогда для всех $p \in [I, m/(m-1))$ и всех характеристических функций $\chi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\int\chi dx \leqslant |\Omega|/2, \quad \int|D\chi| < \infty \tag{2.4}$$

выполняется неравенство

$$\int \chi dx \leqslant \gamma\left(\int \chi dx\right)^{1/p'} \int |D\chi| \tag{2.5}$$

где $1/p' + 1/p = 1$, $|\Omega|$ – мера области Ω, а $\gamma = \gamma(p, \Omega) > 0$ – фиксированная постоянная.

Дадим набросок доказательства леммы. С помощью теоремы о компактности вложения $W_1^1(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и теоремы Д.Ф. Егорова можно доказать неравенство

$$\left(\int |f|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \gamma(p, \Omega) \int |\nabla f| dx \tag{2.6}$$

справедливое для всех функций $f(x) \in W_1^1(\Omega)$ и обращающихся в нуль на множестве (своем для каждой функции), мера которого не меньше, чем $|\Omega|/4$. Неравенство (2.6) допускает распространение на функции класса $VB(\Omega)$. Это распространение имеет вид

$$\left(\int |f|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \gamma \int |Df|, \quad f \in VB(\Omega), \tag{2.7}$$

причем f обращается в нуль на множестве (своем для каждой функции f), мера которого не меньше, чем $|\Omega|/2$. Если $f = \chi$, где χ – характеристическая функция, удовлетворяющая условию леммы, то в силу (2.7) получим

$$\int \chi dx = \int \chi\chi dx \leqslant \left(\int \chi^{p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int \chi^p dx\right)^{1/p} \leqslant \gamma\left(\int \chi dx\right)^{1/p'} \int |D\chi|$$

3. Теорема существования глобального минимума. Пусть $\Omega \subset R^m$ – ограниченная область с границей, удовлетворяющей условию Липшица, $R^{m\times m}$ – пространство $(m \times m)$-матриц. Для $D \in R^{m\times m}$, $u \in R^m$, $x \in \Omega$ зададим функции $F^{\pm}(D, u, x, T)$. В дальнейшем в качестве u будем брать поле смещений $u(x)$, а матрицы D – матрицу первых производных $u(x)$. Нижним индексом у этих функций будем обозначать производные по соответствующим аргументам, под знаком $|\cdot|$ будем понимать как модуль скалярной или векторной функции, так и норму матрицы. Фиксируем числа p, α и функцию $C(T)$ со свойствами

$$p \in (1, \infty), \quad \alpha > 0, \quad C(T) > 0$$

Будем считать, что функции $F^{\pm}$ непрерывны по совокупности переменных, непрерывно дифференцируемы и выпуклы по компонентам матрицы D и удовлетворяют неравенствам

$$|F^{\pm}(D, u, x, T)| \leqslant C(T)[|D|^p + |u|^p + 1], \quad |F_D^{\pm}(D, u, x, T)| \leqslant C(T)[|D|^{p-1} + |u|^{p-1} + 1] \tag{3.1}$$

$$C^{-1}(T)[|D|^p - |u|^s - \alpha] \leqslant F^{\pm}(D, u, x, T), \quad s \in [1, p)$$

Для характеристической функции $\chi(x)$ множества Каччоппoли $\Omega^+ \subset \Omega$, вектор-функции $u(x) = \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega, R^m)$ и фиксированного значения $T \in R^1$ зададим функционал $I(u, \chi, T)$ равенством (2.3). Этот функционал корректно определен. Функционал (2.3) и будет называться функционалом энергии двухфазной среды.

Сформулируем окончательно вариационную задачу: среди всех функций

$$u(x) = \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega, R^m), \quad \chi(x) \in BV(\Omega) \tag{3.2}$$

($\chi(x)$ – характеристическая функция) найти те, которые дают минимум функционалу $I(u, \chi, T)$ при фиксированном T.

Теорема существования. Функционал $I(u, \chi, T)$ достигает своего глобального минимума на множестве (3.2) при каждом фиксированном T.

Доказательство этой теоремы даже при более общих предположениях содержится в [10].

4. Задача о фазовых переходах в классической теории упругости. Приведенная вариационная постановка позволяет привлекать прямые методы вариационного исчисления при ответе на вопрос о качественном поведении среды в двуфазовом состоянии. Проиллюстрируем эти возможности для случая классической теории упругости. Будем считать, что различные фазы отличаются лишь коэффициентами теплового расширения $\alpha^{\pm} > 0$, имея общие коэффициенты Ламе $\lambda > 0$, $\mu > 0$. В этом случае плотности $F^{\pm}$ задаются равенством [11]

$$F^{\pm}(\dot{u}, T') = -\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)\alpha^{\pm} T \operatorname{div} u + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{div} u)^2 + \frac{\mu}{2}[u^i_{x_j} u^i_{x_j} + u^i_{x_j} u^j_{x_i}] + F^{\pm}(0, T_0) =$$

$$= -\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)\alpha^{\pm} T E_{\mathrm{I}} + \frac{\lambda + 2\mu}{2} E_{\mathrm{I}}^2 - 2\mu E_{\mathrm{II}} + F^{\pm}(0, T_0) \tag{4.1}$$

где E_{I} и E_{II} – первый и второй инварианты тензора деформации, $T = T' - T_0$, а функционал (2.3) при $\rho^+ = \rho^- = 1$ и $F^+(0, T_0) = F^-(0, T_0)$ может быть переписан в виде

$$I[u, \chi, T] = \int\left\{\frac{\lambda + \mu}{2}(\operatorname{div} u)^2 + \frac{\mu}{2} u^i_{x_j} u^i_{x_j}\right\} dx + \sigma \int |D\chi| -$$

$$-\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) T[\alpha] \int \chi \operatorname{div} u\, dx, \quad [\alpha] = \alpha^+ - \alpha^- \neq 0 \tag{4.2}$$

или, после выделения полного квадрата, в виде

$$I[u, \chi, T] = \int\left\{\frac{\lambda + \mu}{2}(\operatorname{div} u - \xi T[\alpha]\chi)^2 + \frac{\mu}{2} u^i_{x_j} u^i_{x_j}\right\} dx +$$

$$+\sigma \int |D\chi| - \frac{\xi}{2} T^2 [\alpha]^2 \int \chi\, dx, \quad \xi = \frac{\lambda + 2\mu/3}{\lambda + \mu} \tag{4.3}$$

Таким образом, задача о фазовых переходах исследуется в окрестности температуры T_0, причем при $T' = T_0$ фазы не различаются между собой.

Последующие математические результаты физически осмысленны для некоторого конечного изменения T в окрестности нуля. Справедливость условий для $p = 2$ теоремы существования для плотностей (4.1) очевидна. Из (4.2) следует, что для u, χ из множества (3.2) имеются равенства

$$I[u, \chi, T] = I[\hat{u}, \hat{\chi}, T], \quad \hat{u} = -u, \quad \hat{\chi} = 1 - \chi; \quad I[u, \chi, T] = I[-u, \chi, -T] \tag{4.4}$$

причем $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ также лежат в множестве (3.2). Поэтому семейство пар $\{u, \chi\}$, дающих минимум функционалу (2.3) на множестве (3.2) состоит по крайней мере из двух пар. Поскольку $\hat{\chi} = 1 - \chi$, то один из интегралов

$$\int \chi\, dx \quad \text{или} \quad \int \hat{\chi}\, dx \tag{4.5}$$

не превосходит половины меры области Ω.

При $T = 0$ функционал (2.3) достигает своего наименьшего значения на множестве (3.2) лишь на парах $\{u, \chi\}$ с $u \equiv 0$ и $\chi \equiv 0$ либо $\chi \equiv 1$, что отвечает однофазовому состоянию упругой среды. Цель данного раздела – исследовать возникновение двуфазового состояния при изменении температуры.

Для каждого значения температуры $T \in R^1$ определим величину

$$\hat{I}[T] = \inf I[u, \chi, T]$$

где инфимум берется по всем парам $\{u, \chi\}$ из множества (3.2). Заметим, что $\hat{I}[T] \leqslant I[0, 0, T] = 0$.

Лемма 4.1. Существует такое число k, $0 < k < \infty$, что

$$\hat{I}[T] = 0 \quad \text{при} \quad |T| \leqslant k, \quad \hat{I}[T] < 0 \quad \text{при} \quad |T| > k$$

Доказательство. Определим множества M и N на вещественной оси равенством

$$M = \{T \in R^1, \ \hat{I}[T] < 0\}, \quad N = \{T \in R^1, \ \hat{I}[T] = 0\}$$

В силу второго равенства в (4.4) T и $-T$ одновременно принадлежат множеству M или N. Доказательство разобьем на ряд этапов.

1°. *Множество N непусто и замкнуто.* Пусть пара $\{u, \chi\}$ дает минимум функционалу (2.3) на множестве (3.2). Докажем, что при достаточно малых $|T|$ функция $\chi(x)$ либо тождественно равна единице, либо совпадает с нулем. Тогда все T с достаточно малым модулем будут принадлежать множеству N. Условие $\chi \equiv 0$ или $\chi \equiv 1$ эквивалентно соотношению

$$\int |D\chi| = 0 \tag{4.6}$$

Поскольку пара $\{\hat{u}, \hat{\chi}\}$ $(\hat{u} = -u, \hat{\chi} = 1 - \chi)$ при фиксированном T также дает минимум функционалу (2.3) на множестве (3.2), то

$$I[u, \chi, T] = I[\hat{u}, \hat{\chi}, T] \leqslant I[0, 0, T] = 0$$

Из последнего соотношения и представления (4.3) для функционала $I[u, \chi, T]$ придем к неравенству

$$\int |D\chi_0| \leqslant \zeta T^2 [\alpha]^2 \int \chi_0 dx, \quad \zeta = (\lambda + 2\mu/3)^2 / [2\sigma(\lambda + \mu)] \tag{4.7}$$

для $\chi_0 \equiv \chi$ и $\chi_0 \equiv \hat{\chi}$.

Пусть функция χ_0 совпадает с той функцией (χ или $\hat{\chi}$), для которой выполняется неравенство

$$\int \chi_0 \, dx \leqslant |\Omega|/2 \tag{4.8}$$

Комбинируя (4.7) с (2.5) и учитывая (4.8), получим

$$\int |D\chi_0| \leqslant \zeta \gamma T^2 [\alpha]^2 \left(\int \chi_0 dx\right)^{1/p'} \int |D\chi_0| \tag{4.9}$$

Так как для χ_0 справедливо неравенство (4.8), то при

$$\zeta \gamma T^2 [\alpha]^2 (|\Omega|/2)^{1/p'} < 1 \tag{4.10}$$

из (4.9) вытекает соотношение

$$\int |D\chi_0| = 0 \tag{4.11}$$

Если $\chi_0 = \chi$, то (4.11) совпадает с (4.6). Если $\chi_0 = \hat{\chi}$, то (4.6) следует из (4.11) и равенства $\int |D\hat{\chi}| = \int |D\chi|$.

Докажем теперь замкнутость множества N. Пусть $T_n \in N$, $(n = 1, 2, ...)$ $T_n \to T_*$ при $n \to \infty$. Нужно доказать, что $\hat{I}[T_*] = 0$. Предположим противное. Пусть $\hat{I}[T_*] < 0$. Функционал $I[u, \chi, T_*]$ достигает своего минимума на множестве (3.2) на некоторой паре $\{u_0, \chi_0\}$. Тогда $I[u_0, \chi_0, T_*] = \hat{I}[T_*] < 0$. Поскольку функционал $I[u_0, \chi_0, T]$ – непрерывная функция T, то при достаточно большом n придем к противоречию $\hat{I}[T_n] \leqslant I[u_0, \chi_0, T_n] < 0$.

2°. *Множество M непусто. Если $T_* \in M$, то каждое T с $|T| \geqslant |T_*|$ также принадлежит M.* Докажем сначала, что множество M непусто. Фиксируем несоленоидальное векторное поле $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$. Пусть на подобласти $\omega \subset \Omega$ с гладкой границей $\operatorname{div} u > 0$. Возьмем в качестве χ характеристическую функцию ω. Тогда при достаточно больших T функционал (2.3) будет отрицательным на выбранных u и χ. Поэтому достаточно большие $T \in M$.

Перейдем к доказательству второй части утверждения. Поскольку $T = 0$ лежит в N, то $T_* \neq 0$. Пусть $T_* > 0$, $\pm T_* \in M$ и функционал $I[u, \chi, {}^{\pm}T_*]$ достигает своего минимума на множестве (3.2) на паре $\{\pm u_0, \chi_0\}$, т.е.

$$I[\pm u_0, \chi_0, \pm T_*] = \hat{I}[+T_*] = \hat{I}[-T_*] < 0$$

Из последнего соотношения и (4.2) вытекает неравенство

$$[\alpha]\int \chi_0 \operatorname{div} u_0 dx > 0 \tag{4.12}$$

Поэтому

$$I[u_0, \chi_0, T] < I[u_0, \chi_0, T_*] < 0 \quad \text{при} \quad T > T_* \tag{4.13}$$

$$I[-u_0, \chi_0, -T] < I[-u_0, \chi_0, -T_*] < 0 \quad \text{при} \quad T < -T_*$$

Тогда и $\hat{I}[T] < \hat{I}[T_*] = \hat{I}[-T_*] < 0$ при $|T| > T_*$.

Из утверждений 1° и 2° и следует справедливость леммы.

Лемма 4.2. При $|T| < k$ функционал (2.3) достигает своего минимума на множестве (3.2) лишь на парах $\{u, \chi\}$ с $u \equiv 0$ и $\chi \equiv 0$ или $\chi \equiv 1$. При $|T| > k$ функционал (2.3) достигает своего минимума на множестве (3.2) лишь на парах $\{u, \chi\}$ с $u \not\equiv 0$ и $\chi \not\equiv 0$ и $\chi \not\equiv 1$.

Доказательство. Пусть при $|T_*| < k$ минимум достигается на паре $\{u_0, \chi_0\}$ с $\chi_0 \not\equiv 0$, $\chi_0 \not\equiv 1$. Будем считать, что $T_* > 0$, поскольку при $T_* = 0$ минимум реализуется лишь на парах с $u_0 \equiv 0$, $\chi_0 \equiv 0$, $\chi_0 \equiv 1$, а замена T_* на $-T_*$ приводит (в силу второго неравенства (4.4)) лишь к замене u_0 на $-u_0$. Так как $I[u_0, \chi_0, T_*] = \hat{I}[T_*] = 0$, то из (4.2) следует неравенство (4.12), из которого, как и раньше, получаем соотношение (4.13), противоречащее определению k и выбору T_*. Полученное противоречие показывает, что либо $\chi_0 \equiv 0$, либо $\chi_0 \equiv 1$. В этом случае $u_0 \equiv 0$.

Так как при $\chi \equiv 0$ или $\chi \equiv 1$ функционал (4.2) неотрицателен, то при $|T_*| > k$ минимум реализуется на паре $\{u_0, \chi_0\}$ с $\chi_0 \not\equiv 0$, $\chi_0 \not\equiv 1$, $u_0 \not\equiv 0$.

Лемма 4.3. Пусть $|T_*| > k$ и пара $\{u_0, \chi_0\}$ дает минимум функционалу (2.3) при $T = T_*$ на множестве (3.2). Тогда

$$1 < \zeta\gamma T_*^2 [\alpha]^2 \left(\int \chi_0 dx\right)^{1/p'} \tag{4.14}$$

где γ – постоянная из леммы 2.1, $1/p + 1/p' = 1$, $1 < p < m/(m-1)$.

Доказательство. Заменяя, если нужно, u_0 на $-u_0$, χ_0 на $1 - \chi_0$, будем считать, что χ_0 удовлетворяет неравенству (4.8). Пользуясь неравенством (4.7) (справедливым для функции χ_0 из минимизирующей пары), оценкой из леммы 2.1 (справедливой в силу неравенства (4.8)) и сокращая на ненулевой (в силу леммы 4.2 и предположения $|T_*| > k$) множитель $\int |D\chi_0|$, получим (4.14).

Дадим физическую интерпретацию лемм 4.1–4.3. Поскольку при $|T| < k$ возможны лишь однофазовые состояния с нулевым полем смещения, то они дают функционалу энергии два изолированных минимума. Пусть при $T = 0$ реализовалось состояние с плотностью F^- (т.е. $\chi \equiv 0$). Тогда это состояние сохранится для температур $T \in (-k, k)$. При переходе температурой критического значения $^{\pm}k$ возникает двухфазовое состояние ($\chi \not\equiv 0$, $\chi \not\equiv 1$) с ненулевым полем смещений, причем (неравенство (4.14)) появления фазы с плотностью F^+ носит скачкообразный характер.

Проследим за однофазовым состоянием $u \equiv 0, \chi \equiv 0$ при $|T| > k$. Докажем, что оно остается локальным минимумом функционала энергии в следующем смысле:

Лемма 4.4. При каждом T существует такое положительное число $\delta = \delta(T) \leqslant |\Omega|/2$, что для всех $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$ и характеристических функций $\chi(x) \in BV(\Omega)$ с

$$0 < \int \chi(x)dx \leqslant \delta(T) \tag{4.15}$$

выполняется неравенство

$$I[u, \chi, T] > I[0, 0, T] = 0. \tag{4.16}$$

Доказательство. Пусть для некоторых u_0, χ_0 с $\chi_0 \not\equiv 0, \int \chi_0 dx \leqslant |\Omega|/2$ выполняется неравенство, противоположное (4.16). Тогда для этой пары справедливо соотношение (4.7) и его следствие (4.9). Если

$$\zeta \gamma T^2[\alpha]^2(\int \chi_0 dx)^{1/p'} < 1 \tag{4.17}$$

то для χ_0 выполняется (4.11), что противоречит первому неравенству в (4.15). Постоянную $\delta(T)$ определим из (4.17).

Последние две леммы показывают, что явление возникновения новой фазы напоминает процесс "прощелкивания" в теории оболочек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01393).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиббс Дж.Б.* Термодинамические работы. М.: Гостехиздат, 1950. 492 с.
2. *Гринфельд М.А.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1988. Т. 251. № 4. С. 824–828.
3. *Кандауров В.И., Никитин Л.В.* О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348–1351.
4. *Кубланов Л.Б., Фрейдин А.Б.* Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 493–501.
5. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Условия фазового равновесия в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 6. С. 1052–1056.
6. *Ball J.M., James R.D.* Fine phase mixtures as minimizers of energy // Arch. Rat. Mech. Anal. 1987. V. 100. № 1. P. 13–52.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Джусти Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.
9. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
10. *Осмоловский В.Г.* Вариационная задача о возникновении двуфазового состояния в механике сплошной среды // Записки научных семинаров ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 131–150.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
8.VI.1993