

УДК 536.24:532.546

© 1994 г. М.М. Алимов, К.Г. Корнев, Г.И. Мухамадуллина

**РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ЛЕДОПОРОДНОГО ТЕЛА,
ОБРАЗОВАВШЕГОСЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЖИДКОСТЬЮ
СИСТЕМЫ ДВУХ ЗАМОРАЖИВАЮЩИХ СКВАЖИН.**

Методами работы [1] строится решение плоской задачи застывания фильтрационного потока вокруг системы двух замораживающих колонок. Найдены равновесные конфигурации единого ледопородного тела в широком диапазоне изменения определяющих физических параметров. На основании полученных результатов показана несостоятельность некоторых критериев смыкания.

В большинстве приложений [2, 3] замороженная область имеет малый характерный поперечный размер по сравнению с продольным и задача об определении формы ледопородного тела в первом приближении может быть сформулирована как двумерная. Характерной чертой проблемы является возможность существования предельного равновесного ледопородного тела. При этом приток тепла со стороны талого грунта компенсируется кондуктивным теплоотводом к колонке.

Одной из основных проблем искусственного замораживания является определение критерия смыкания ледопородных тел, образующихся вокруг отдельных колонок. За базовую оценку принимают решение задачи о двух замораживающих колонках. Известное приближенное решение этой задачи [2], основанное на моделировании отдельного ледопородного тела круговым цилиндром, даёт критерий смыкания, в несколько раз превышающий наблюдаемый на практике. Другой известный критерий [4] построен на основе асимптотического решения задачи для уже сомкнувшегося тела и фактически является критерием "неразмыкания". При этом вопрос правомерности использования последнего в качестве критерия смыкания не анализировался.

1. Постановка задачи. Предполагая, что процесс протекает в плоскости $Z = X + iY$ (фиг. 1,а), фильтрация подчиняется закону Дарси, жидкость несжимаема, теплофизические характеристики фильтрующей среды постоянны, математическую модель изучаемого явления в безразмерной форме можно представить в виде

$$v = -\nabla p, \quad \text{div } v = 0, \quad z \in D_z^-; \quad |v| = 1, \quad |z| \rightarrow \infty \tag{1.1}$$

$$\text{Re}(v \nabla \theta^-) = \Delta \theta^-, \quad z \in D_z^-; \quad \theta^- = 1, \quad |z| \rightarrow \infty \tag{1.2}$$

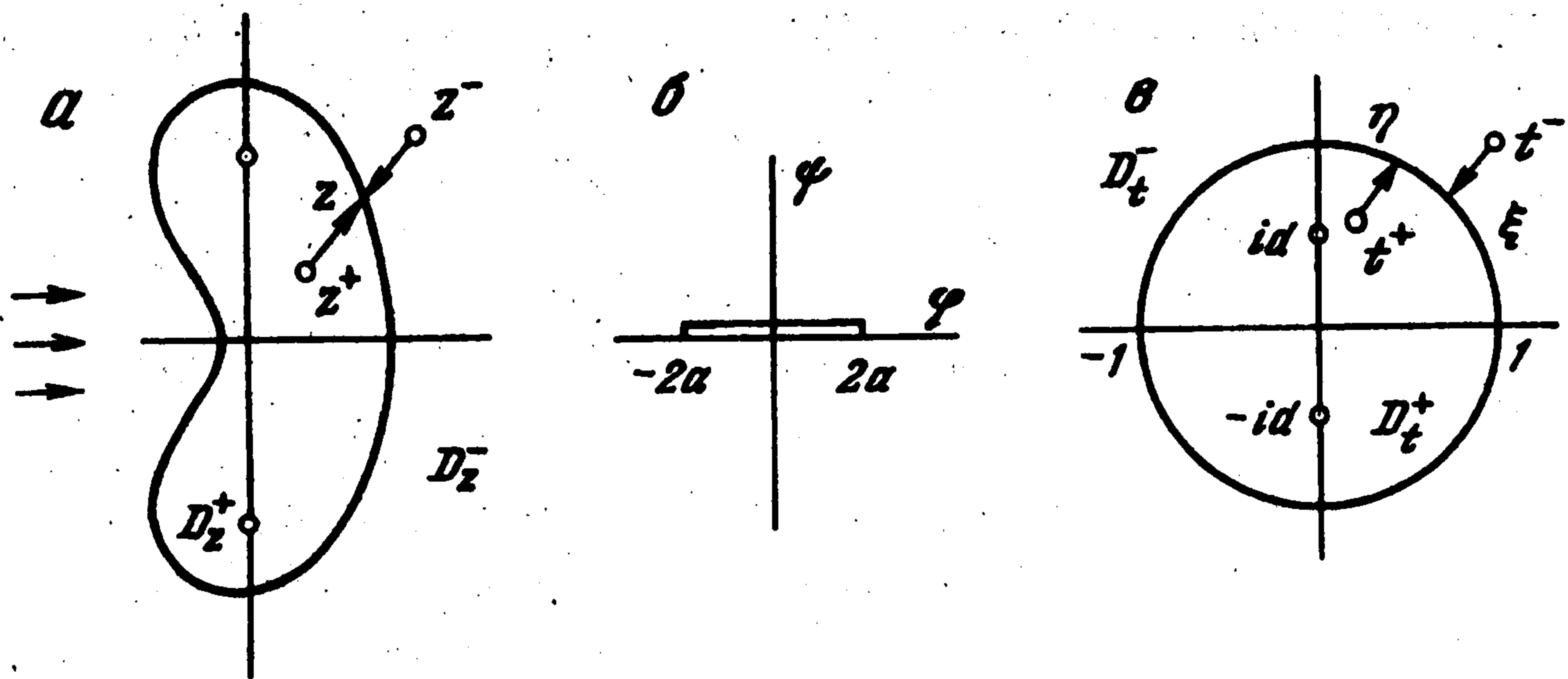
$$\Delta \theta^+ = 0, \quad z \in D_z^+; \quad \partial \theta^+ / \partial n = \partial \theta^- / \partial n, \quad \theta^+ = \theta^- = 0, \quad z \in \Gamma_z \tag{1.3}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \partial \theta^+ / \partial r = q, \quad z = z_k \quad (k = 1, 2) \tag{1.4}$$

где безразмерные характеристики и независимые переменные введены следующим образом:

$$z = \frac{Z}{H}, \quad \theta^- = \frac{T^- - T_0}{T_\infty - T_0}, \quad \theta^+ = \frac{(T^+ - T_0)\lambda^+}{(T_\infty - T_0)\lambda^-}$$

$$p = \frac{Kp}{HV_\infty}, \quad \text{Pe} = \frac{K_c V_\infty H}{\alpha^-}, \quad v = \frac{V}{V_\infty}, \quad q = \frac{Q}{(T_\infty - T_0)\lambda^-}$$



Фиг. 1

Здесь Re – число Пекле, D_z^- – область фильтрации, D_z^+ – область, занятая образовавшимся твердым телом, $\Gamma_z = \partial D_z^+ = \partial D_z^-$ – его граница, V – скорость фильтрации, P – давление, T^-, T^+ – температуры в областях D_z^- и D_z^+ соответственно, n – нормаль к Γ_z , внешняя по отношению к области D_z^+ , Z_k ($k = 1, 2$) – координаты хладоисточников K_c – отношение теплоемкостей жидкости и фильтрующей среды, λ^-, λ^+ – коэффициенты теплопроводности в областях D_z^- и D_z^+ соответственно, α^- – коэффициент температуропроводности в D_z^- , K – коэффициент фильтрации, T_0 – температура затвердевания потока, T_∞, V_∞ – значения температуры и скорости в бесконечно удаленной точке, Q – мощность хладоисточников, H – половина расстояния между хладоисточниками (при этом замораживающая скважина, представленная в плоскости z окружностью малого радиуса, стягивается в точку с сохранением теплового расхода).

Введем характерный размер l , безразмерные параметры h и Re_* , а также нормированную на l физическую плоскость ζ :

$$l = \frac{(2q)^2 \alpha^-}{K_c V_\infty}, \quad h = \frac{H}{l}, \quad Re_* = \frac{Re}{h}, \quad \zeta = \frac{Z}{l} = zh \quad (1.5)$$

Объектам $\Gamma_z, D_z^+, D_z^-, z_k$ в плоскости z будут соответствовать $\Gamma_\zeta, D_\zeta^+, D_\zeta^-, \zeta_k$ в плоскости ζ .

Уравнения (1.1) позволяют стандартным образом ввести комплексный потенциал течения $W^- = \varphi + i\psi$, где $\varphi = -p$, ψ – функция тока, а уравнения (1.3) – комплексный тепловой потенциал $W^+ = -\theta^+ + i\psi^+$, где ψ^+ – функция тока тепла. В плоскости W^- контуру Γ_z соответствует горизонтальный разрез Γ_w длины $4a$, где a – параметр, подлежащий определению (фиг. 1,б). Введем в рассмотрение также плоскость $W_* = \varphi_* + i\psi_*$, связанную с W^- соотношением

$$W_* = W^- h, \quad a_* = ah \quad (1.6)$$

Применим к первому уравнению в (1.2) преобразование Буссинеска, что эквивалентно переходу от $\theta^-(z)$ к $\theta^-(W_*)$ с помощью пока неизвестной функции $W_*(z)$, реализующей конформное отображение плоскости z на плоскость W_* . В результате из (1.1)–(1.4) выделится замкнутая задача о теплообмене пластины с равномерным

набегающим потоком в плоскости W_* :

$$\operatorname{Re}_* \partial \theta^- / \partial \varphi_* = \partial^2 \theta^- / \partial \varphi_*^2 + \partial^2 \theta^- / \partial \psi_*^2 \quad (1.7)$$

$$\theta^- = 1, \quad |W_*| \rightarrow \infty; \quad \theta^- = 0, \quad W_* \in \Gamma_w$$

Поскольку полученная задача симметрична относительно действительной полуоси в W_* на верхней и нижней сторонах пластины Γ_w плотности потока тепла $\partial \theta^- / \partial \psi_*$ различаются лишь знаком. Если ввести функцию

$$\mu(\varphi_* / 2a_*) = 2a_* |\partial \theta^- / \partial \psi_*|_{W_* \in \Gamma_w}$$

то методами работ [5, 6] задача (1.7) сводится к граничному интегральному уравнению

$$\pi = \int_{-1}^1 \mu(\xi) K_0(P|t - \xi|) \exp[P(t - \xi)] d\xi, \quad t \in [-1, 1] \quad (1.8)$$

$$q = \int_{-1}^1 \mu(\xi) d\xi, \quad P = 4a_* q^2 \quad (1.9)$$

Вспомогательные параметры a_* , P , очевидно, через искомую функцию $\mu(\xi)$ связаны с физическим параметром q . Задание любого из этой совокупности трех параметров определяет два остальных.

Не останавливаясь на особенностях численной реализации, будем пока считать, что функция $\mu(\xi)$ и, следовательно, $\partial \theta^- / \partial \psi_*$ на Γ_w известны. Тогда исходную задачу (1.1)–(1.4) можно сформулировать как задачу сопряжения для аналитических функций $W_*(\zeta)$ и $W^*(\zeta)$: найти $W_*(\zeta)$, аналитическую всюду в D_ζ^- и удовлетворяющую условию

$$dW_* / d\zeta = 1, \quad |\zeta| \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

и функцию $W^*(\zeta)$, аналитическую всюду в D_ζ^+ , кроме точек ζ_k , в которых она имеет логарифмические особенности, по краевым условиям на контуре Γ_ζ

$$\operatorname{Im} W_* = \operatorname{Re} W^+ = 0, \quad \frac{dW^+}{d\zeta} = i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi_*} \frac{dW_*}{d\zeta}, \quad \zeta \in \Gamma_\zeta \quad (1.11)$$

Решение задачи сопряжения в такой постановке затруднительно, поскольку конфигурация контура, на котором заданы краевые условия, неизвестна. Воспользуемся далее параметризацией, широко применяемой в теории струй идеальной жидкости [7].

Введем плоскость вспомогательного переменного t , в которой контуру Γ_ζ соответствует круг Γ_t единичного радиуса с центром в начале координат. Внутренность круга будем обозначать D_t^+ , внешность – D_t^- (см. фиг. 1, в).

Конформное отображение $W_*(t^-)$ дает функция Жуковского [7]

$$W_*(t^-) = a_*(t^- + 1/t^-) \quad (1.12)$$

Соответствующее отображение $W^+(t^+)$ находится методами теории струй [8]

$$W^+(t^+) = -\frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \ln \frac{t^+ - t_k}{1 - t^+ \bar{t}_k}$$

Неизвестные комплексные параметры t_k соответствуют образам хладоисточников ζ_k в области D_ζ^+ . Далее ограничимся рассмотрением двух случаев расположения

хладоисточников: строго по потоку и строго перпендикулярно потоку. Соответственно образами ζ_k в области D_t^+ будут точки $t_k = \pm d$ и $t_k = \pm id$, где d – вспомогательный параметр, подлежащий определению.

Подробные выкладки проведем для поперечного расположения хладоисточников. В этом случае имеем

$$W^+(t^+) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{(t^+)^2 + d^2}{1 + d^2(t^+)^2} \quad (1.13)$$

Следует отметить, что при приближении точки z к контуру Γ_z (соответственно точки ζ к Γ_ζ) изнутри и снаружи соответственно в плоскости t будем получать образы точки $\eta \in \Gamma_+$ и $\xi \in \Gamma_-$. В общем случае $\xi \neq \eta$ (фиг. 1, а, в). Однако краевые условия (1.11) при учете (1.12), (1.13) позволяют установить связь $\eta = \eta(\xi)$, называемую сдвигом [9, 10].

Действительно, условие (1.11) можно записать в виде

$$\frac{dW^+}{dt^+}(\eta)F^+(\eta) = i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi_*} [W_*(\xi)] \frac{dW_*}{dt^-}(\xi)F^-(\xi); \quad F^\pm = \left[\frac{d\zeta}{dt^\pm} \right]^{-1}, \quad t^\pm \in D_t^\pm \quad (1.14)$$

откуда следует, что

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dW^+}{dt^+}(\eta) d\eta = i \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi_*} [W_*(\xi)] \frac{dW_*}{dt^-}(\xi) d\xi \quad (1.15)$$

Последнее соотношение определяет сдвиг $\eta = \eta(\xi)$. Найдем его конкретный вид. Пусть

$$\eta = e^{i\beta}, \quad \xi = e^{i\sigma} \quad (1.16)$$

Тогда, приняв $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 1$, из (1.12), (1.13), (1.15) будем иметь

$$-\frac{q}{2\pi} \ln \left[\frac{e^{2i\beta} + d^2}{1 + d^2 e^{2i\beta}} \right] = a_* \int_0^\sigma \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi_*} [W_*(e^{i\sigma})] (e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}) d\sigma$$

и после ряда элементарных преобразований получим

$$\beta(\sigma) = \alpha(\sigma) + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin 2\alpha(\sigma)}{d^{-2} - \cos 2\alpha(\sigma)} \right], \quad \alpha(\sigma) = \frac{\pi}{q} \int_0^\sigma \mu(\cos \sigma) \sin \sigma d\sigma \quad (1.17)$$

Выражение (1.17) при учете (1.16) дает искомую формулу сдвига.

Теперь сформулированную выше задачу сопряжения в физической плоскости можно сформулировать как задачу Римана со сдвигом [9, 10]: найти функцию $F^+(t^+)$, аналитическую всюду в D_t^+ , и функцию $F^-(t^-)$, аналитическую всюду в D_t^- , по краевому условию на контуре Γ_t :

$$F^+[\eta(\xi)] = \Omega(\xi)F^-(\xi), \quad \xi \in \Gamma_t \quad (1.18)$$

и дополнительному условию на бесконечности

$$F^-[t^-] \Big|_{|t^-| \rightarrow \infty} = 1/a_* \quad (1.19)$$

Здесь $\eta(\xi)$ – функция сдвига, определяемая (1.16), (1.17), а $\Omega(\xi)$ в соответствии с (1.11) имеет вид

$$\Omega(\xi) = i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi_*} [W_*(\xi)] \frac{dW_*}{dt^-}(\xi) \left(\frac{dW^+}{dt^+}[\eta(\xi)] \right)^{-1} \quad (1.20)$$

Задача Римана со сдвигом (задача Газемана) достаточно полно исследована [9, 10]. Ее решение имеет вид

$$\ln \left[a_* \left(\frac{d\zeta}{dt^-} \right)^{-1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\sigma)}{\xi - t^-} d\xi \Big|_{\xi=e^{i\sigma}}, \quad t^- \in D_t^- \quad (1.21)$$

$$\ln \left[a_* \left(\frac{d\zeta}{dt^+} \right)^{-1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi[\beta_{-1}(\sigma)]}{\xi - t^+} d\xi \Big|_{\xi=e^{i\sigma}}, \quad t^+ \in D_t^+ \quad (1.22)$$

Здесь $\varphi(\sigma)$ – комплекснозначная функция, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \varphi(s) + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \beta'(\sigma) \left[\operatorname{ctg} \frac{\beta(\sigma) - \beta(s)}{2} + i \right] - \left[\operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} + i \right] \right\} \varphi(\sigma) d\sigma = \\ = \ln G(s), \quad s \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$G(\sigma) = \beta'(\sigma) \exp[i(\beta(\sigma) - \sigma)], \quad \sigma \in [-\pi, \pi] \quad (1.24)$$

а $\beta(\sigma)$ и $\alpha(\sigma)$ представлены формулами (1.17). В результате решения уравнения (1.23) нетрудно восстановить форму ледопородного тела с помощью выражения

$$\frac{d\zeta}{ds} = ia_* \exp \left\{ \frac{\varphi(s)}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma) d\sigma + i[\Gamma(\varphi(\sigma)|s) + s] \right\} \quad (1.25)$$

получающегося из (1.21) с использованием формулы Сохоцкого–Племеля и обозначения $\Gamma(\varphi(\sigma)|s)$ для интеграла Гильберта от функции $\varphi(\sigma)$ [9]. Наконец, чтобы перейти к плоскости z , необходимо вычислить величину

$$h = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ \zeta(t^+) |_{t^+=id} - \zeta(t^+) |_{t^+=-id} \} \quad (1.26)$$

и поделить на нее ζ : $z = \zeta/h$. Знание величины h позволяет также определить связь вспомогательного параметра d с физическим параметром Pe . Действительно, из (1.5), (1.6), (1.9) имеем $P = \operatorname{Re}_* a_*$ откуда следует, что

$$\operatorname{Re} = Ph / a_* \quad (1.27)$$

Таким образом, исходная задача (1.1)–(1.4) расщепилась на две задачи: решение уравнения (1.8) с условием (1.9) и решение уравнения (1.23). Первая задача достаточно полно была исследована [1, 5, 11].

Приведенное в [5] решение в виде разложения по функциям Матье неудобно для численных расчетов, однако позволяет сделать важный вывод о непрерывности по Гельдеру функции $[\mu(\cos\sigma)\sin\sigma]$, а следовательно, и функции $\alpha'(\sigma)$ (см. (1.17)). Был предложен [1] эффективный численный алгоритм решения уравнения (1.18). Проведенный анализ [11] показывает, что функция $\alpha'(\sigma)$ удовлетворяет условию $0 < \alpha'(\sigma) < \infty$ всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, существует обратная к $\alpha(\sigma)$ функция $\alpha_{-1}(\sigma)$.

Уравнение (1.23) является безусловно и однозначно разрешимым интегральным уравнением Фредгольма второго рода [12]. Однако его численная реализация методом коллокаций на равномерной сетке [13] вызывает затруднения в самой интересной области изменения параметра $d = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, которой соответствует малая толщина перемычки, соединяющей ледопородные тела. Это связано с тем, что функция

$$\beta'(\sigma) = \alpha'(\sigma) \frac{1 - d^4}{1 - 2d^2 \cos 2\alpha(\sigma) + d^4}$$

а следовательно, и ядро интегрального уравнения при обходе контура в окрестностях точек $\sigma = 0, \sigma = \pm\pi$ получает приращение порядка $1/\epsilon$, в то время как правая часть (1.23) получает приращение порядка $\ln \epsilon$. Тем не менее математический анализ возникшей ситуации позволяет значительно продвинуться в решении поставленной задачи и построить простой численный алгоритм, использующий аналитические свойства решения.

2. Малые P . Этот предел является базовым для изучения аналитических свойств и построения приближенного решения уравнения (1.23). Для отличия от общего случая условимся обозначать соответствующие функции нулевым индексом. Решение задачи (1.8), (1.9) при $P \ll 1$ имеет вид [14]

$$\mu_0(\xi) = \frac{q}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + Q(P^2 \ln 2P); \quad q = \frac{\pi}{\ln(4/P) - \gamma} \quad (2.1)$$

(γ – постоянная Эйлера). Ограничиваясь главным членом в (2.1), из (1.9), (1.17) получим [11]

$$\alpha_0(\sigma) = \sigma \quad (2.2)$$

В приложении А показано, что в данном случае можно решить задачу сопряжения непосредственно в физической плоскости и получить формулу

$$z_0(t^-) = \sqrt{(t^-/d)^2 - 1}$$

позволяющую при $t^- = e^{i\sigma}$ найти конфигурацию контура Γ_z . Ее анализ показывает, что при $d = 1$ контур имеет особую точку $z = 0$, ответственную за появление сингулярных членов в уравнении (1.23) при $\epsilon \rightarrow 0$. Кроме того, эта формула оказывается полезной как в случае малых P в качестве теста, так и в случае произвольных P для получения точек контура в окрестности перемишки при $\epsilon \ll 1$ (см. приложение Б). Однако с точки зрения определения функции $\phi_0(\sigma)$ она мало что дает, поскольку восстановление последней обратным ходом все равно сопряжено с решением интегрального уравнения. Тем не менее найденное точное решение задачи сопряжения позволяет надеяться на существование решения уравнения (1.23) в элементарных функциях.

Проанализируем правую часть уравнения. Для этого введем функцию $f_0(\sigma) = \ln[G_0(\sigma)/(1-d^4)]$. Расписывая ее в соответствии с (1.17), (1.24) и (2.1), получим

$$f_0(\sigma) = -\ln(1 - 2d^2 \cos 2\sigma + d^4) + i \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin 2\sigma}{d^{-2} - \cos 2\sigma} \right] \quad (2.3)$$

Утверждение 1. Для функции $f_0(\sigma)$ имеют место соотношения

$$f_0[(\beta_{-1}(\sigma))] = -[f_0(\sigma)]^* - 2 \ln(1 - d^4) \quad (2.4)$$

$$\Gamma(\operatorname{Re} f_0(\sigma)|s) = -2 \operatorname{Im} f_0(s), \quad \Gamma(\operatorname{Im} f_0(\sigma)|s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} f_0(s) \quad (2.5)$$

где $(\beta_0)_{-1}(\sigma)$ – функция, обратная к $\beta_0(\sigma)$, звездочка означает замену в d^2 на $-d^2$.

Доказательство. Используя представления косинуса и синуса через тангенс половинного угла и учитывая (1.6), (1.24), (2.2), находим

$$1 - 2d^2 \cos 2(\beta_0)_{-1}(\sigma) + d^4 = \frac{1 - d^4}{1 + 2d^2 \cos 2\sigma + d^4}$$

$$\operatorname{arctg} \left[\frac{\sin 2(\beta_0)_{-1}(\sigma)}{d^{-2} - \cos 2(\beta_0)_{-1}(\sigma)} \right] = -\operatorname{arctg} \left[\frac{\sin 2\sigma}{-d^{-2} - \cos 2\sigma} \right]$$

Отсюда непосредственно следует (2.4).

Справедливость соотношений (2.5) вытекает из вида разложения $f_0(\sigma)$ в ряд Фурье [15]

$$f_0(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{2k}}{k} [2 \cos 2k\sigma + i \sin 2k\sigma]$$

и известных соотношений для интегралов Гильберта [16]

$$\Gamma(\cos k\sigma|s) = -\sin ks, \quad \Gamma(\sin k\sigma|s) = \cos ks$$

Перейдем к построению решения интегрального уравнения. Запишем (1.23) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(s) + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\sigma - \beta_0(s)}{2} + i \right] \varphi_0[(\beta_0)_{-1}(\sigma)] d\sigma - \\ - \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} + i \right] \varphi_0(\sigma) d\sigma = f_0(s) + \ln(1 - d^4) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Будем искать решение (2.6) в виде $\varphi_0(\sigma) = f_0(\sigma) + C_0$, где $C_0 = \text{const}$. Обозначая через $[L_0\varphi_0](s)$ интегральный оператор, стоящий в левой части (2.6) при учете (2.4), (2.5) и соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) d\tau = 0 \quad (2.7)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} [L_0\varphi_0](s) &= f_0(s) + C_0 - \frac{1}{2i} \Gamma([f_0(\sigma)]^*|\beta_0(s)) - \frac{1}{2i} \Gamma(f_0(\sigma)|s) - \ln(1 - d^4) = \\ &= C_0 - \ln(1 - d^4) + \frac{3}{4} \operatorname{Re}[f_0(s)] - \frac{1}{4} \operatorname{Re}[f_0[\beta_0(s)]] - i \operatorname{Im}[f_0[\beta_0(s)]] = \\ &= C_0 - \frac{1}{2} \ln(1 - d^4) + f_0(s) \end{aligned}$$

Сравнивая окончательное выражение с правой частью (2.6), находим значение C_0 . Окончательно получаем, что

$$\varphi_0(\sigma) = f_0(\sigma) + \frac{3}{2} \ln(1 - d^4) \quad (2.8)$$

Отметим некоторые особенности полученного решения. При $\varepsilon \ll 1$ вещественная часть функции $\varphi_0(\sigma)$ в окрестностях точек $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\pi$ получает приращение порядка $\ln\varepsilon$. Мнимая часть в этом смысле является функцией более гладкой – она ограничена величиной порядка 1. Однако из (1.25) и (2.5) следует, что большие значения $|dz_0/dt^-|$ в точках $t = 1, -1$ при $\varepsilon \ll 1$, обеспечиваются не только вещественной, но и мнимой частями $\varphi_0(\sigma)$.

3. Решение уравнения (1.23) в общем случае. Естественно предположить, что решение $\varphi(\sigma)$ уравнения (1.23) в общем случае имеет те же качественные особенности, что и $\varphi_0(\sigma)$. Иными словами, при $\varepsilon \ll 1$ вещественная часть функции $\varphi(\sigma)$ имеет логарифмическую особенность в точках $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\pi$, что и обуславливает медленную сходимость численного решения. Мнимая часть $\varphi(\sigma)$ будет функцией более гладкой, однако вместе с вещественной частью обеспечит большие значения $|dz_0/dt^-|$ в точках $t = \pm 1$. Это означает, что при восстановлении контура ледопородного тела путем непосредственного интегрирования функции (dz/dt^-) в окрестностях указанных точек неизбежно будет возникать большая ошибка, даже в том случае, если функция $\varphi(\sigma)$ найдена достаточно точно. Учитывая все это, имеет смысл попытаться выделить особенность у решения интегрального уравнения, используя (2.8).

Будем искать решение уравнения (1.23) в виде

$$\varphi(\sigma) = N\varphi_0[\alpha(\sigma)] + \varphi_1(\sigma) \quad (3.1)$$

где N — пока произвольная постоянная. Если через $[L\varphi](s)$ обозначить интегральный оператор, стоящий в левой части (1.23) и действующий на функцию $\varphi(\sigma)$, и учесть, что

$$\beta(\sigma) = \beta_0[\alpha(\sigma)], \quad \beta_{-1}(\sigma) = \alpha_{-1}[(\beta_0)_{-1}(\sigma)] \quad (3.2)$$

$$G(\sigma) = G_0[\alpha(\sigma)]g(\sigma), \quad g(\sigma) = \alpha'(\sigma)\exp(i[\alpha(\sigma) - \sigma])$$

то подстановка (3.1) в (1.23) дает

$$[L\varphi_1](s) = \Phi(s) \quad (3.3)$$

$$\Phi(s) = \ln g(s) + \ln G_0[\alpha(s)] - N[L\varphi_0](s)$$

Преобразуем $\Phi(s)$ к более удобному виду. Используя подстановку $\sigma = \alpha_{-1}(\tau)$, $s = \alpha_{-1}(t)$, соотношение (2.7), а также тот факт, что функция $\varphi_0(\tau)$ — решение уравнения $[L_0\varphi_0](t) = \ln G_0(t)$, найдем

$$\begin{aligned} \Phi(s) = \ln g(s) + (1 - N) \ln G_0[\alpha(s)] + \\ + \frac{N}{2i} \{ \Gamma(f_0[\alpha(\sigma)]|s) - \Gamma(f_0(\sigma)|\alpha(s)) \} + \frac{N}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0[\alpha(\sigma)] d\sigma \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, получено интегральное уравнение (3.3) относительно $\varphi_1(\sigma)$, где в правой части присутствует пока произвольный параметр N . Естественно ожидать, что более гладкая правая часть уравнения породит и более гладкое решение $\varphi_1(\sigma)$. Поэтому будем подбирать N так, чтобы функция $\Phi(\sigma)$ не содержала особенность порядка $\ln \varepsilon$ в точках $\sigma = 0, \pm\pi$.

Проанализируем полученное для функции $\Phi(s)$ выражение с точки зрения ее гладкости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция $\ln g(s)$, как видно из (3.2), не имеет особенностей. Особенности функции $\ln G_0(s)$ обсуждались в разд. 1: при обходе контура она получает приращение порядка $\ln \varepsilon$ в окрестностях точек $s = 0, \pm\pi$. Введение $\alpha(s)$ не изменяет ее качественного поведения, поскольку $\alpha'(0), \alpha'(\pm\pi)$ конечны и не зависят от ε .

Для разности двух интегралов Гильберта в выражении (3.4) справедливо следующее

Утверждение 2. Функция $\Omega(s) = \Gamma(f_0(\sigma)|\alpha(s)) - \Gamma(f_0[\alpha(\sigma)]|s)$ ни при каких s не имеет особенностей порядка $\ln \varepsilon$. Производная $\Omega(s)$ в окрестности $s = 0, s = \pm\pi$ имеет особенность порядка $1/\varepsilon$.

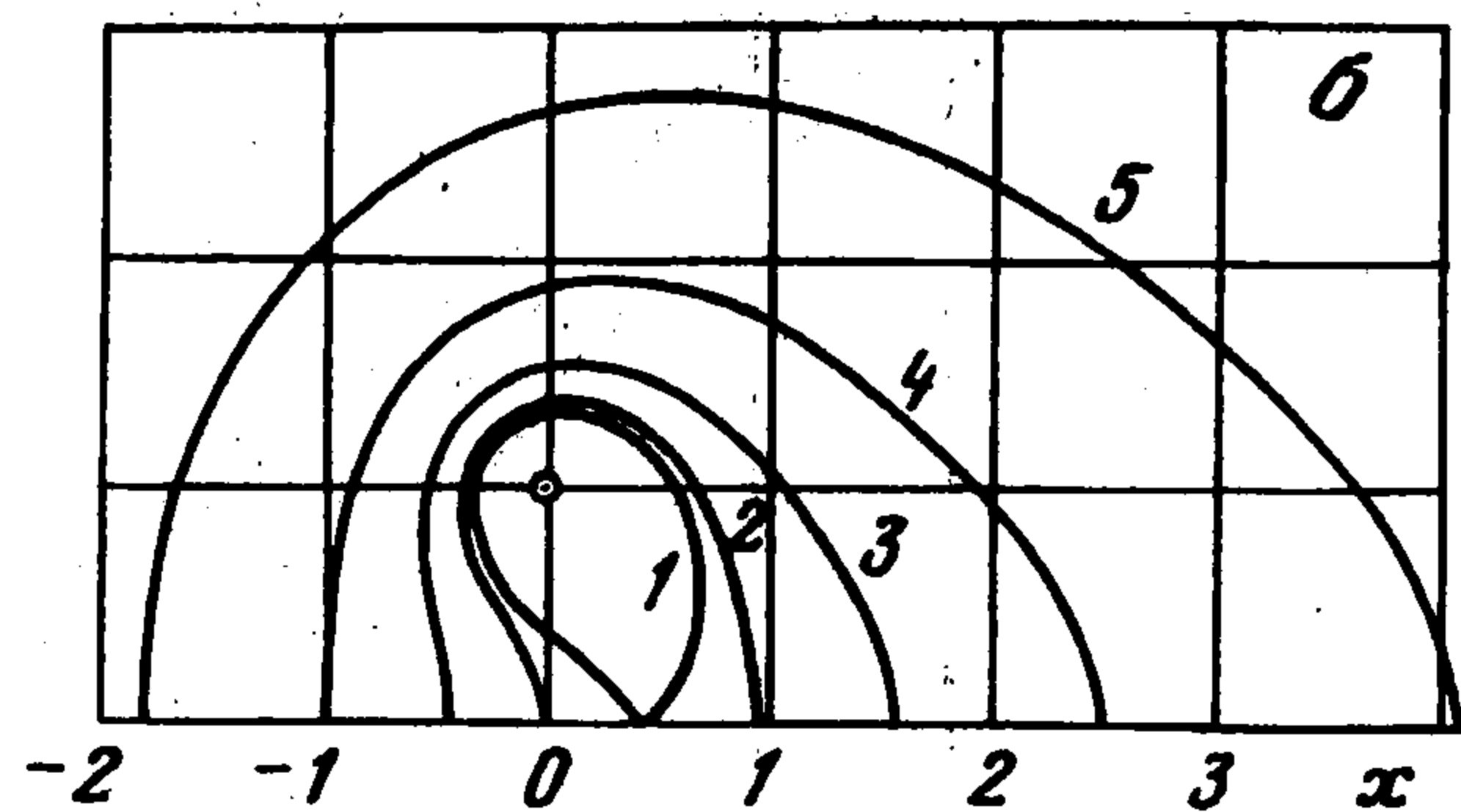
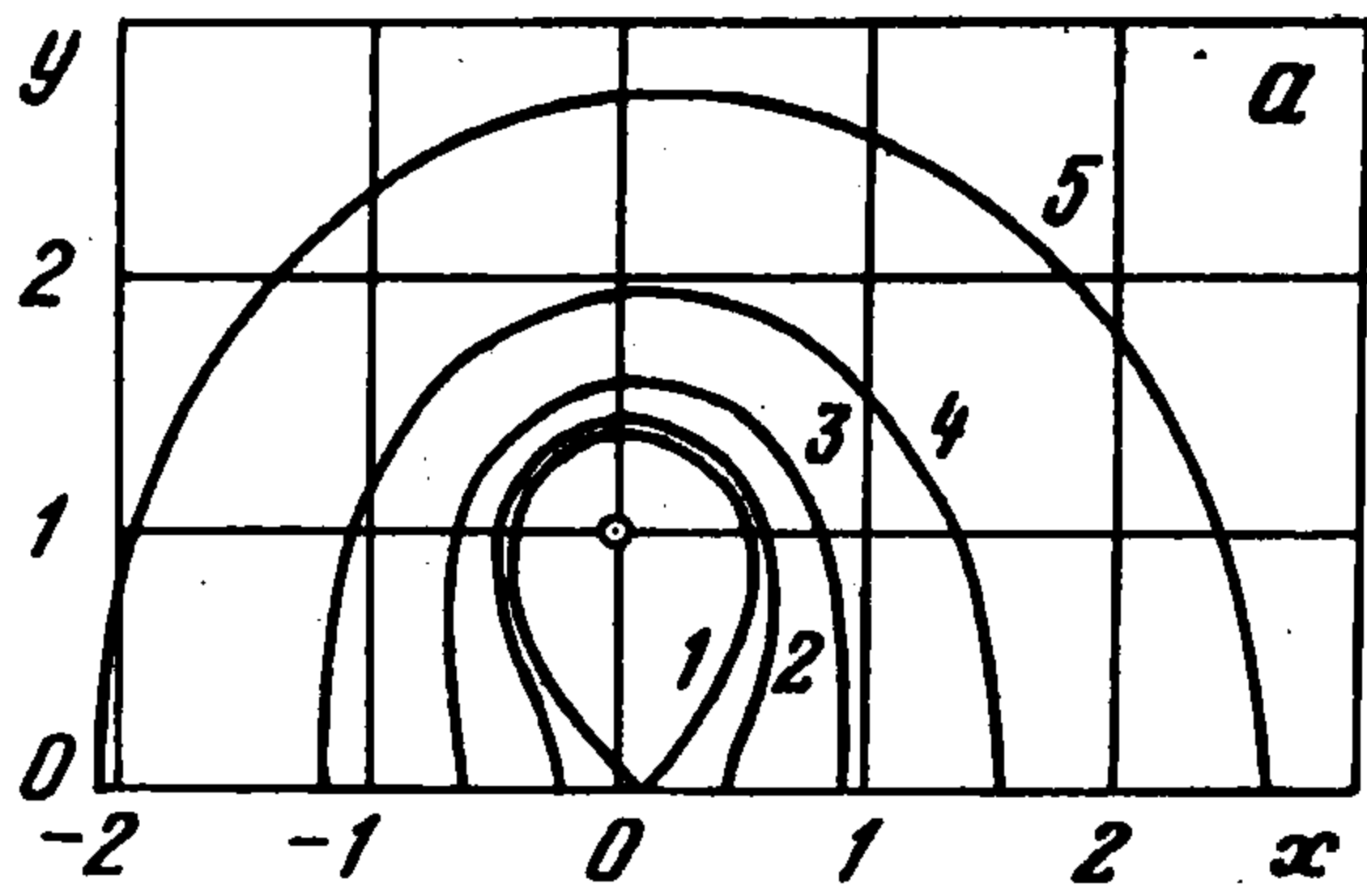
Доказательство проводится стандартными методами анализа интегралов типа Коши [9] с учетом свойств функции $\alpha(\sigma)$, упомянутых в разд. 1.

Таким образом, в выражении для $\Phi(s)$ особенность порядка $\ln \varepsilon$ имеет только функция $\ln G_0[\alpha(s)]$ и, следовательно, наиболее гладкой функцией $\Phi(s)$ можно добиться выбором $N = 1$:

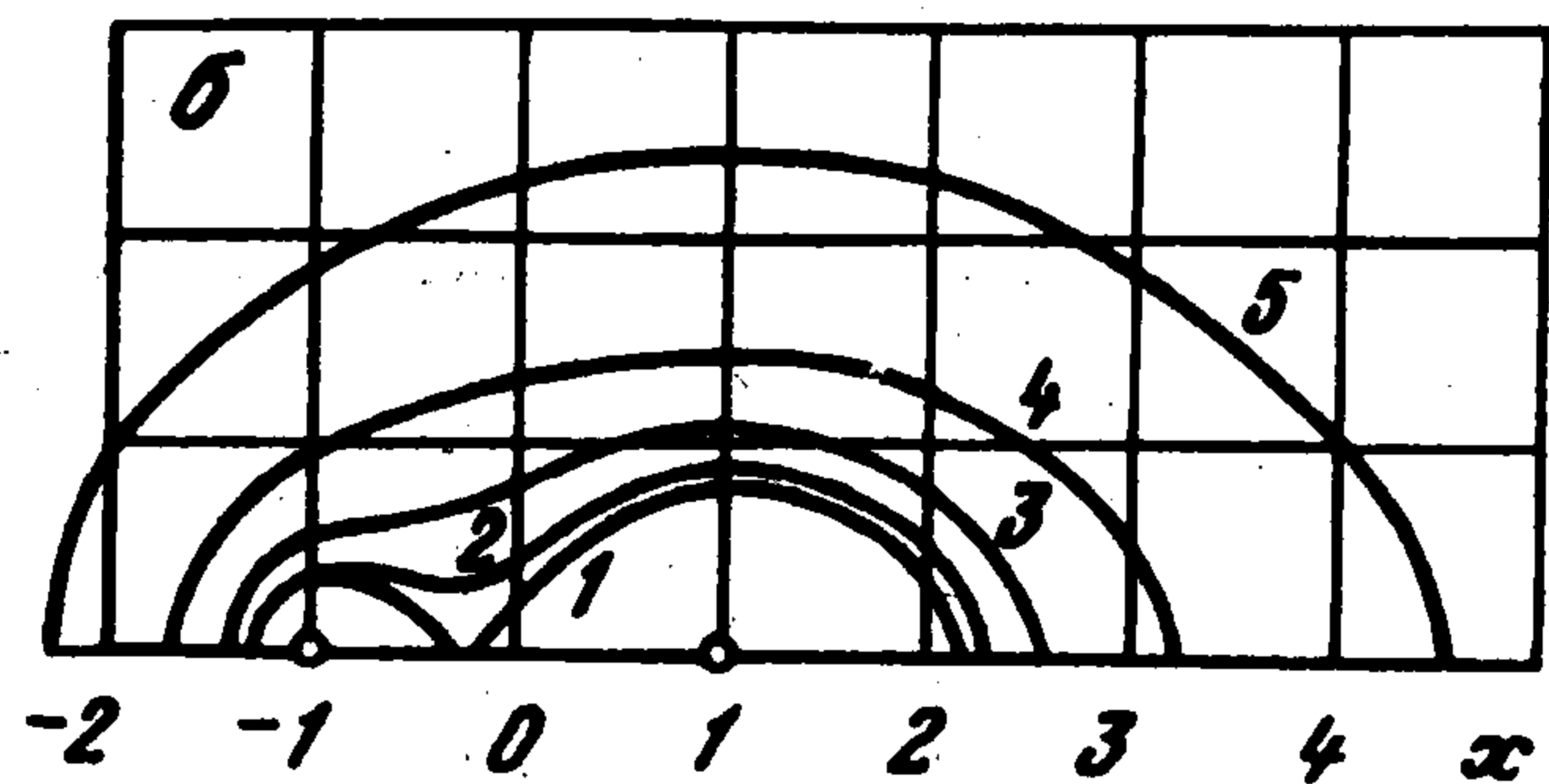
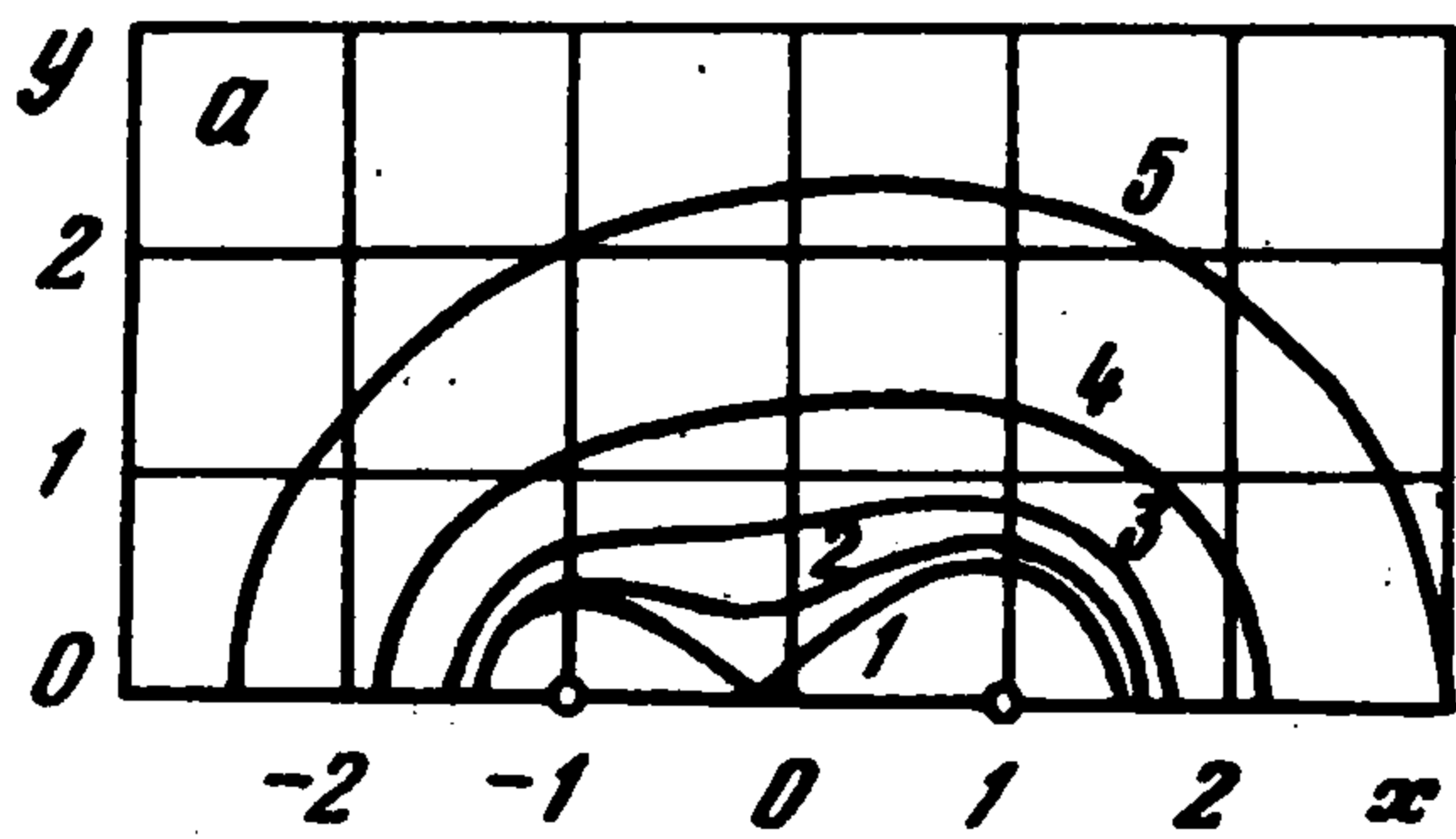
$$\Phi(s) = \ln g(s) + \frac{1}{2i} \{ \Gamma(f_0[\alpha(\sigma)]|s) - \Gamma(f_0(\sigma)|\alpha(s)) \} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} f_0[\alpha(\sigma)] d\sigma \quad (3.5)$$

Окончательно приходим к следующей задаче для $\varphi_1(\sigma)$: найти решение уравнения (3.3) с тем же интегральным оператором, что и в (1.23), но с правой частью, имеющей вид (3.5). После этого решение уравнения (1.23) восстанавливается непосредственно из (3.1), где постоянную N следует положить равной единице.

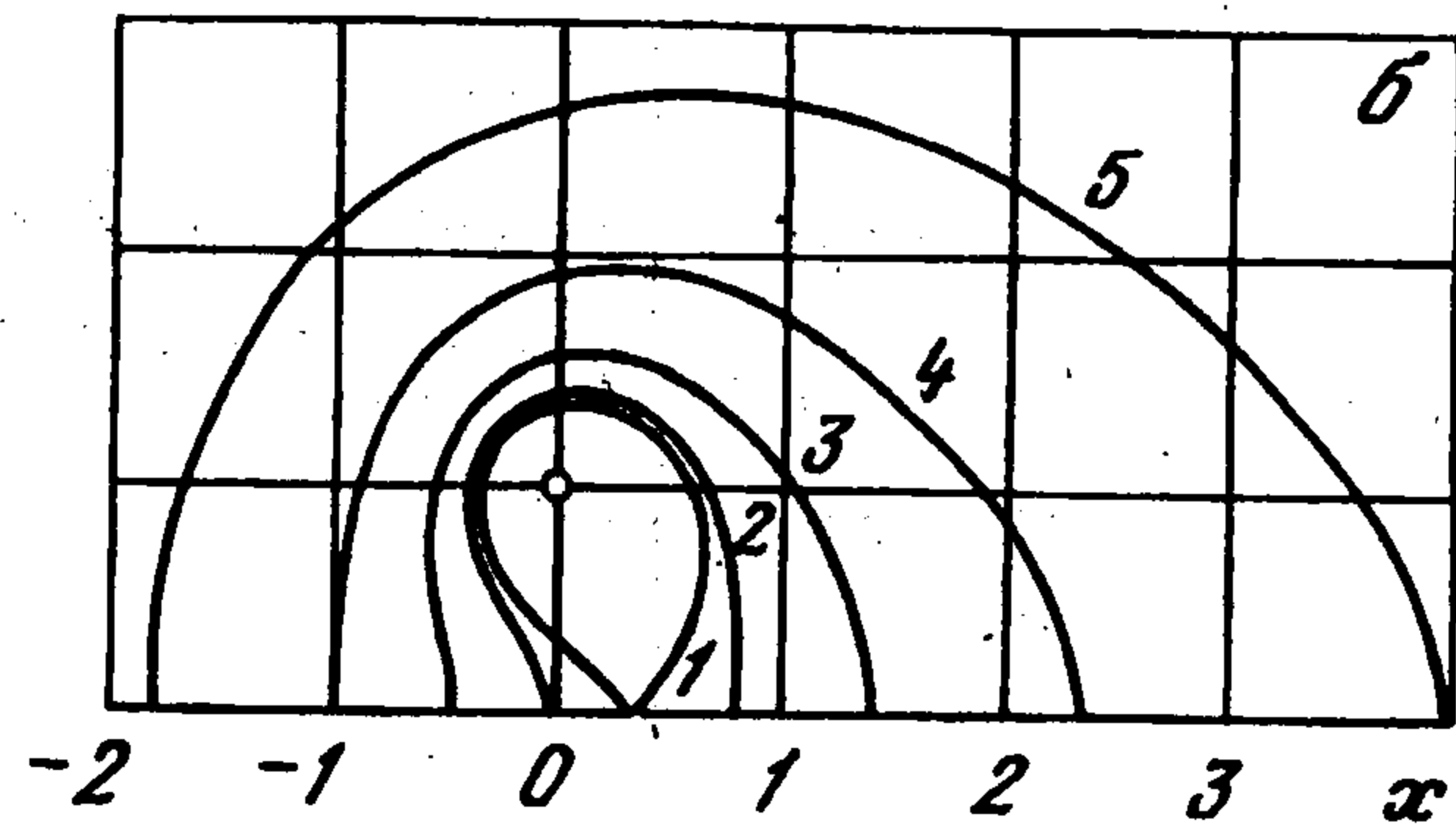
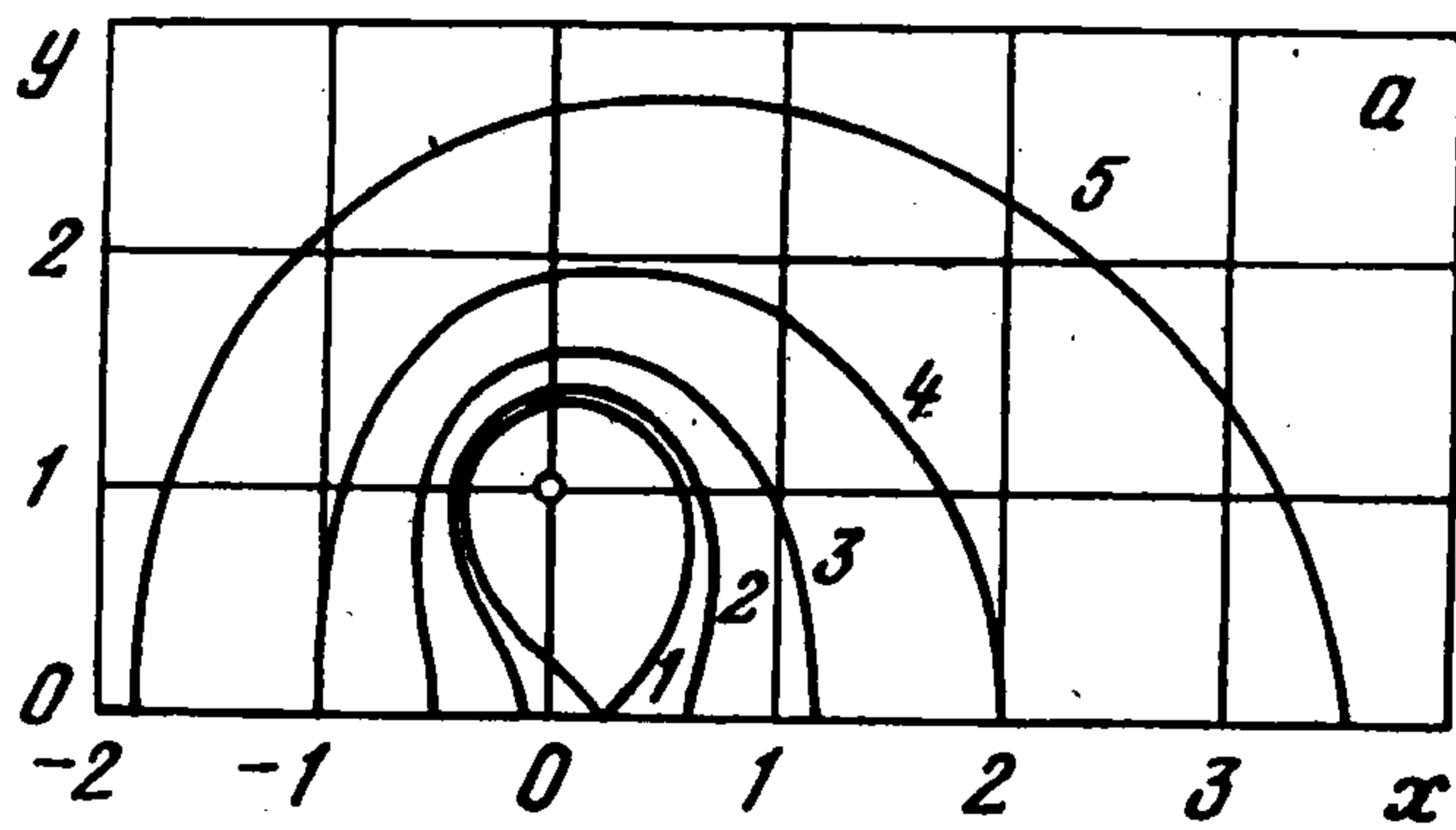
В приложении Б приведены наиболее существенные особенности численной реализации задачи определения $\varphi_1(\sigma)$ и далее конфигурации ледопородного тела. Отметим, что полученные выше, а также в приложениях выводы и формулы для случая поперечного расположения хладисточников остаются справедливыми и для продольного расположения последних, если формально заменить id на d и соответственно d^2 на $(-d^2)$.



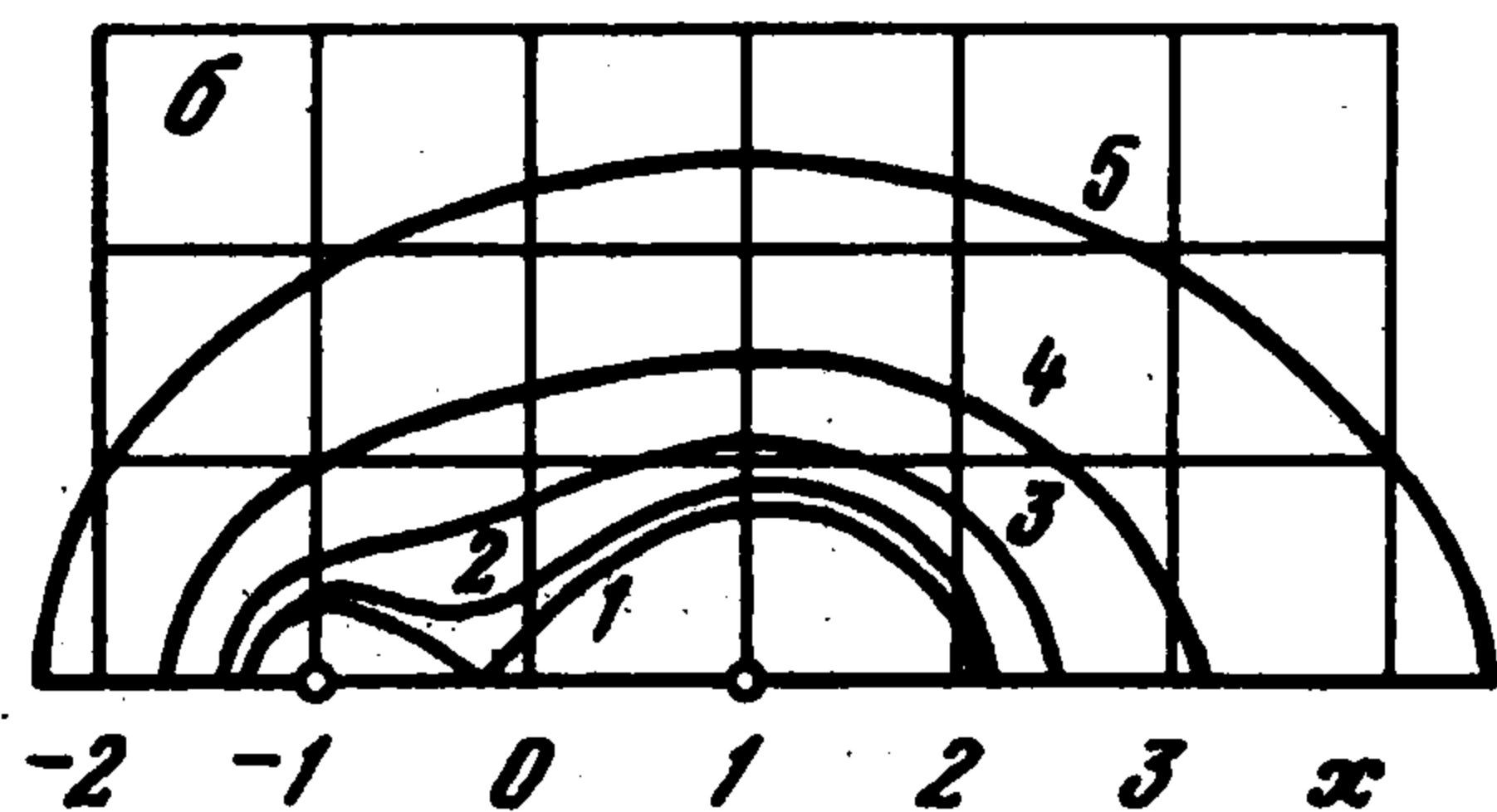
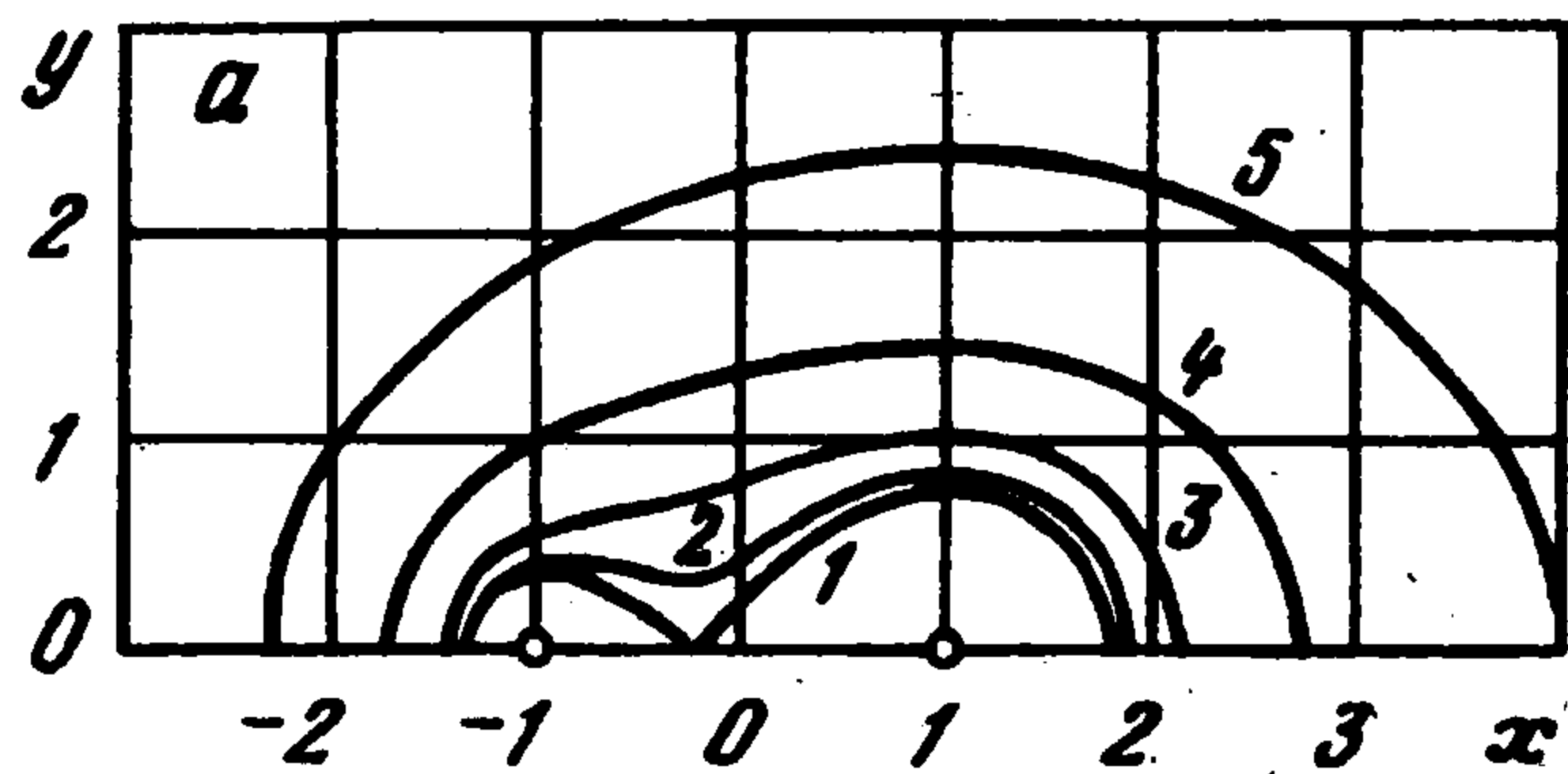
Фиг. 2



Фиг. 3



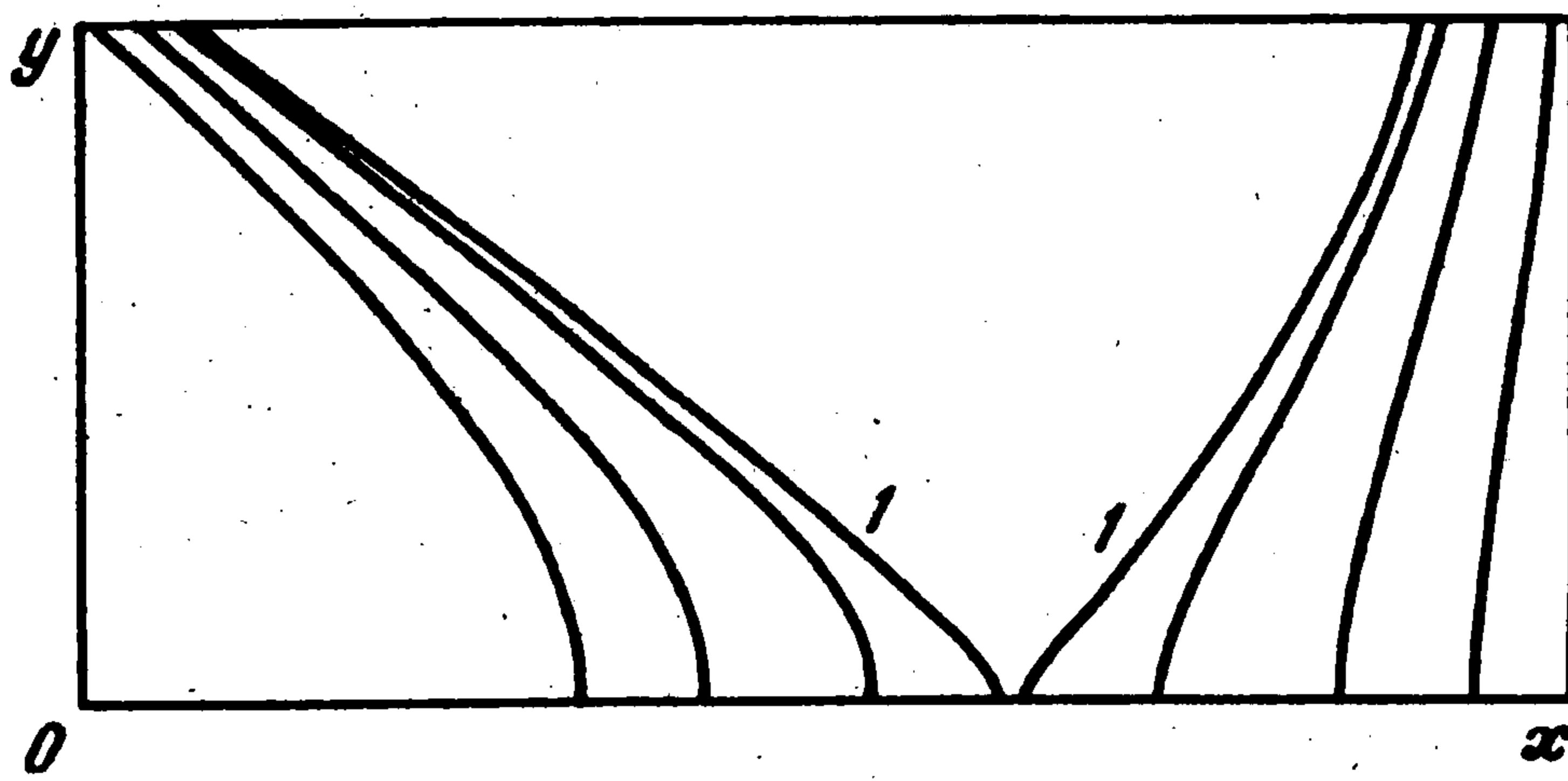
Фиг. 4



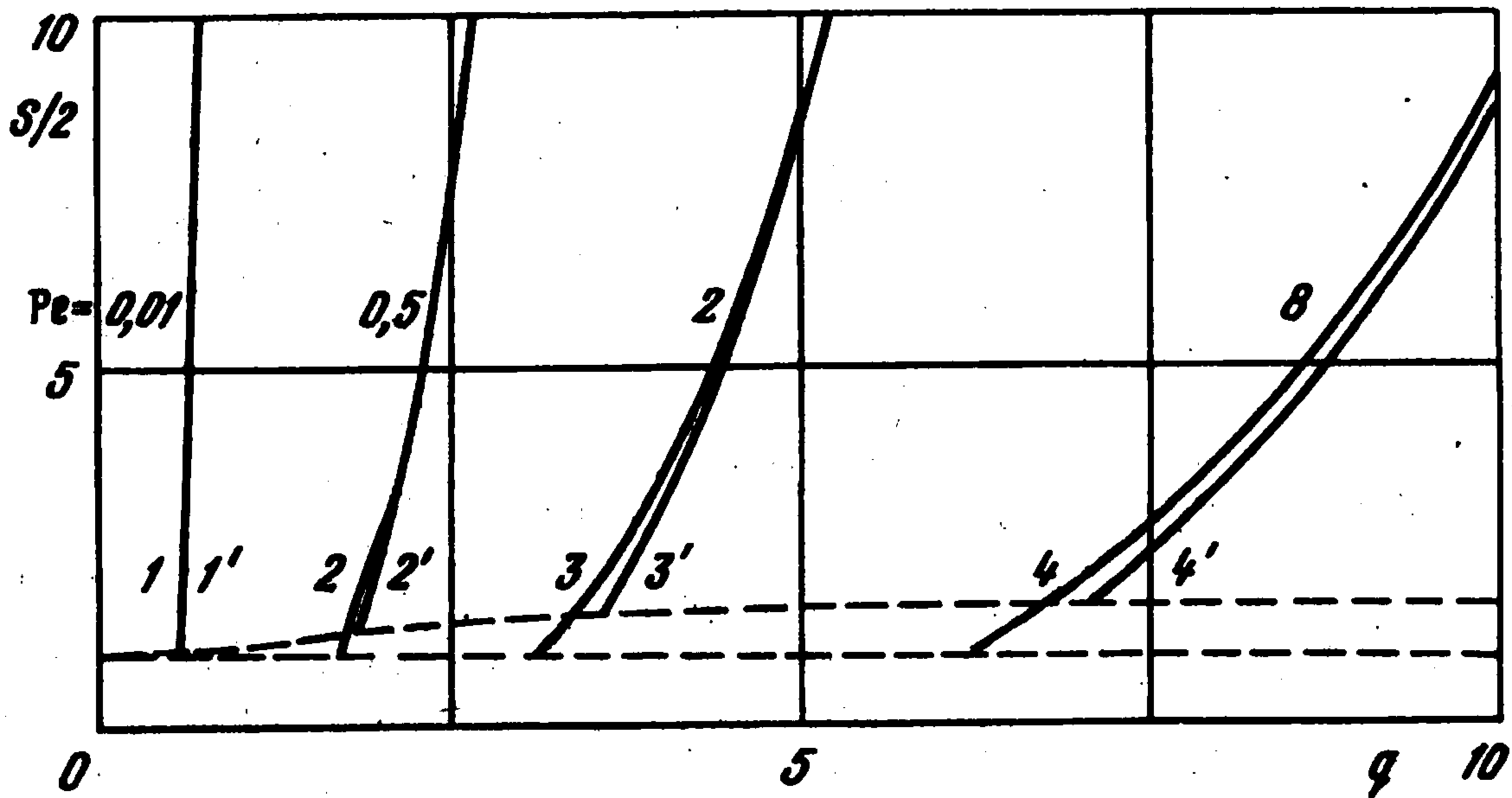
Фиг. 5

Несколько слов о предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$. Этому случаю соответствует бесконечно малая толщина перемычки. Будем называть его критическим режимом. Соответствующие значения физических характеристик также будем называть критическими. Поскольку в расчетах невозможно было положить $\varepsilon = 0$, брали $\varepsilon = 10^{-5}$. Толщина перемычки при этом получалась $\approx 0,01$.

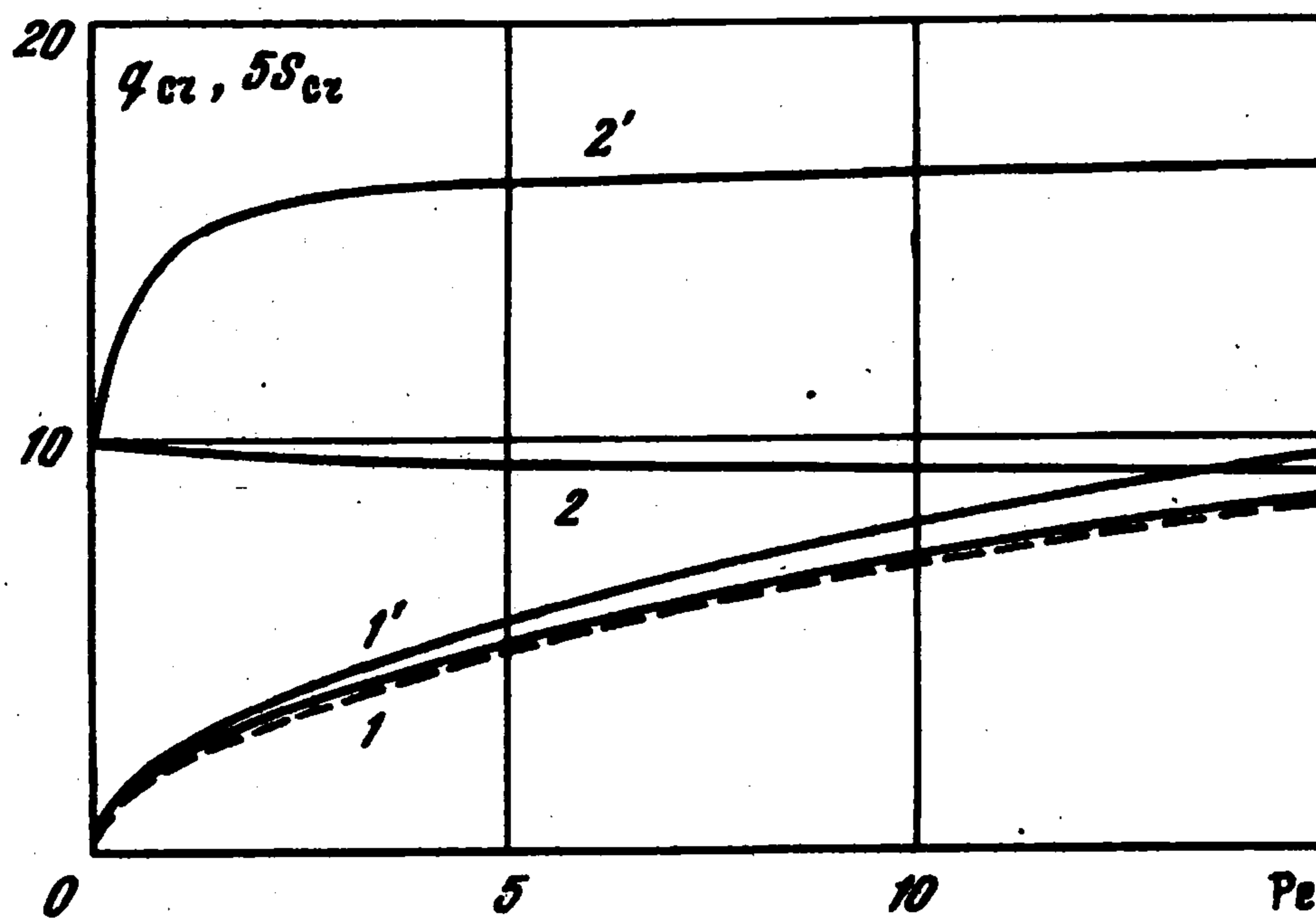
N	Pe				q			
	Фиг. 2,а	2,б	3,а	3,б	4,а	4,б	5,а	5,б
1	0,1000	10,32	0,0976	8,196	1,77	3,25	1,84	3,57
2	0,0991	10,18	0,0928	7,846	1,80	3,36	1,90	3,64
3	0,0950	9,530	0,0784	6,726	1,97	3,75	2,03	3,94
4	0,0797	7,630	0,0590	5,146	2,24	4,38	2,29	4,49
5	0,0596	5,510	0,0395	3,485	2,75	5,39	2,77	5,47



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

4. Обсуждение результатов. Была проведена серия расчетов по определению конфигурации ледопородного тела, образуемого системой двух хладоисточников при заданной их мощности q (см. фиг. 2, 3, где $q = 0,996$ (а) и $q = 7,18$ (б)) и при заданном Re (см. фиг. 4, 5 при $Re = 0,5$ (а) и $Re = 2$ (б)). Ввиду симметрии процесса относительно оси x здесь, а также в дальнейшем изображены лишь верхние половины тел. Соответствие между номерами кривых и значениями физических параметров приведено в таблице. Видно, что при режимах, близких к критическому, тело имеет

сложную форму, существенным образом зависящую от ориентации пары хладоисточников относительно набегающего потока. В то же время при критических режимах локальное поведение контура ледопородного тела в окрестности точки смыкания универсально: контур образует здесь крестообразное пересечение под прямым углом. При режимах, далеких от критического, форма тела слабо зависит от ориентации хладоисточников и близка к форме тела, образуемого одиночным источником той же суммарной мощности $2q$ [1].

Фиг. 6 на примере поперечного расположения хладоисточников демонстрирует поведение контура ледопородного тела в окрестности перемычки при приближении к критическому режиму (здесь кривая 1 соответствует кривой 1 фиг. 2,б). Видно, что упомянутый контур всегда является гладкой кривой, но кривизна его в точке пересечения с осью $y = 0$ неограниченно возрастает при приближении к критическому режиму. Только в пределе при критическом режиме у контура есть точка излома – она же точка смыкания отдельных ледопородных тел.

На фиг. 7 приведены зависимости площади ледопородного тела S от мощности хладоисточников q для разных чисел Пекле. Штриховые линии – соответствующие зависимости $S_{cr}(q)$. Здесь и далее номера без штриха – для поперечного, со штрихом – для продольного расположения хладоисточников. Видно, что для малых Pe площадь тела не зависит от ориентации хладоисточников даже при режимах, близких к критическому. Для больших Pe при одинаковой мощности хладоисточников поперечное их расположение дает несколько большую площадь тела. Вместе с тем продольное расположение дает большую критическую площадь S_{cr} (фиг. 8, кривые 2, 2') за счет того, что больше соответствующее значение q_{cr} (кривые 1, 1'). Этот же график показывает, что в случае поперечного расположения хладоисточников значение S_{cr} примерно постоянно и не зависит от Pe , хотя, как показали расчеты форма тела претерпевает заметные изменения вплоть до последнего расчетного значения $Pe \approx 100$. В случае продольного расположения хладоисточников величина S_{cr} получает значительное приращение на отрезке $Pe \in [0, 4]$, причем в основном за счет малых Pe и далее уже практически не меняется. При этом конфигурация переднего тела устанавливается уже при $Pe = 0,85$. Соответственно конфигурация заднего тела с увеличением Pe продолжает изменяться главным образом в окрестности задней точки.

Интересно сравнить полученные результаты с результатами работы [4], где рассматривалась подобная задача в предположении, что $Pe \gg 1$ и кондуктивным переносом тепла вдоль линий тока можно пренебречь. Как уже отмечалось [11], подобный подход, примененный к одиночному телу дает искаженную картину в окрестности задней точки тела (вместо гладкого контура получается острая кромка). В случае двух хладоисточников, ориентированных поперек потока, полученные ранее [4] формулы при критическом режиме дают искаженную картину в окрестности точки смыкания – все углы, составляемые контуром тела с осью x отличны от полученных в результате расчетов.

Однако основной интерес представляет приведенное в [4] условие смыкания отдельных тел. Из решения задачи для единого ледопородного тела, образуемого парой хладоисточников, расположенных поперек потока, при упомянутом выше предположении было получено условие

$$q > 3^{-3/4} \sqrt{8\pi Pe} \quad (4.1)$$

Ясно, что полученное справа в (4.1) выражение является оценкой зависимости $q_{cr}(Pe)$, и приведенные на фиг. 8 графики показывают, что эта оценка довольно точная (штриховая кривая).

Вместе с тем по построению очевидно, что приближенное условие (4.1) и более точное условие

$$q > q_{cr}(Pe) \quad (4.2)$$

фактически являются условиями "неразмыкания", поскольку получены при условии существования единого ледопородного тела. Возникает вопрос о правомерности использования критерия "неразмыкания" в качестве критерия смыкания.

Полный анализ этого вопроса может быть проведен, когда будет решена задача для двух отдельных тел. Но уже сейчас можно провести частичный анализ хотя бы для больших Re . В этом случае естественно допустить, что изолирующая стенка между телами (плоскость симметрии течения) не оказывает влияния на конфигурацию тел, пока размеры последних малы по сравнению с расстоянием от хладоисточника до этой стенки. Следовательно, можно считать каждое из тел одиночным и получить их конфигурацию по известной методике [1].

На фиг. 9 для $Re = 5$ показана конфигурация единого ледопородного тела при $q = q_{cr} = 5,01$ (сплошной линией) и отдельных тел при $q = 5,21 > q_{cr}$ (штриховой линией).

Несмотря на то что условие (4.2), а тем более условие (4.1), выполнены, до смыкания еще далеко. Может показаться, что принятое допущение не верно. Однако расчеты показывают, что если взять еще одну изолирующую стенку, симметричную первой относительно точки расположения хладоисточника (обтекание линейной цепочки хладоисточников, работа еще не опубликована), то контуры ледопородного тела практически совпадут с одиночным телом, приведенным на фиг. 9.

Таким образом, приходим к выводу, что по крайней мере для больших Re в качестве критерия смыкания ледопородных тел, получающихся от отдельных хладоисточников, нельзя пользоваться ни предложенным ранее условием [4], ни любым другим, построенным на основании решения задачи для уже сомкнувшегося тела.

Приложение А. В сжатом виде решение задачи сопряжения для малых R было опубликовано в тезисах конференции [17]. Приведем его подробное изложение.

Ограничимся в (2.1) только главным членом. Будем иметь

$$\frac{\partial \theta^-}{\partial \psi_*} = \frac{q}{2a_*\pi} \left[1 - \left(\frac{\varphi_*}{2a_*} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (A1)$$

Здесь корень положителен на верхнем берегу разреза в W_* и отрицателен на нижнем.

Условие сопряжения можно записать в виде (1.11). Последнее после перехода от ζ к z и учета (A1) даст

$$\frac{iq}{2a_*\pi} \left[1 - \left(\frac{W_*}{2a_*} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{dW_*}{dz} = \frac{dW^+}{dz}, \quad z \in \Gamma_z \quad (A2)$$

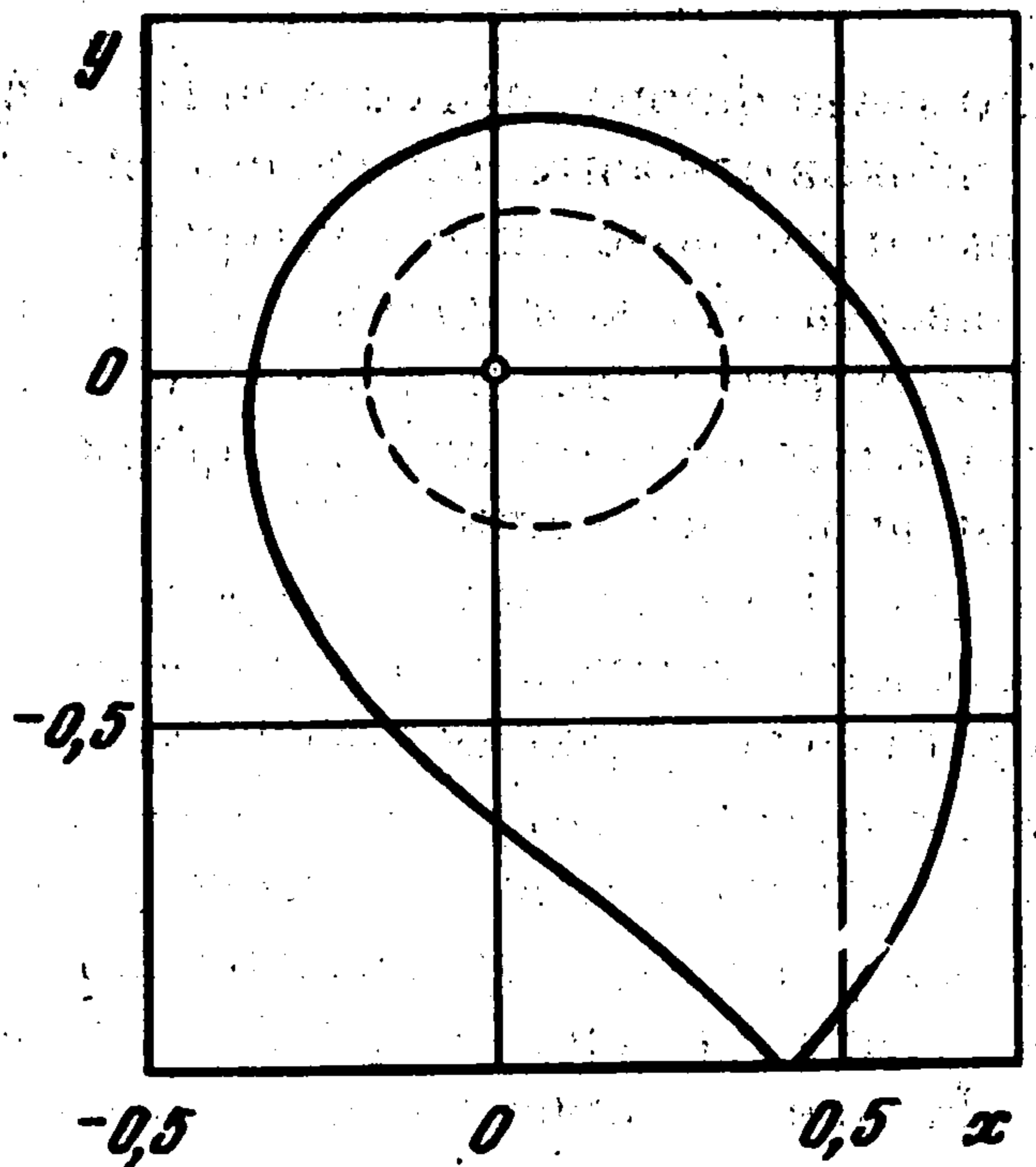
Можно убедиться, что после умножения на dz левую часть последнего соотношения можно записать в виде

$$i \left(\frac{q}{\pi} \right) \left[1 - \left(\frac{W_*}{2a_*} \right)^2 \right]^{-1/2} d \left(\frac{W_*}{2a_*} \right) = \pm \left(\frac{q}{\pi} \right) d \ln \chi(W_*) \quad (A3)$$

если в качестве функции $\chi(W_*)$ взять

$$\chi(W_*) = it^- = i \left[\left(\frac{W_*}{2a_*} \right) + \sqrt{\left(\frac{W_*}{2a_*} \right)^2 - 1} \right] \quad (A4)$$

Таким образом, условие на Γ_z примет еще более простой вид



Фиг. 9

$$\left(-\frac{q}{\pi}\right) \frac{d}{dz} \ln \chi = \frac{dW^+}{dz}, \quad z \in \Gamma_z \quad (\text{A5})$$

Исследуем особенности функций, стоящих в правой и левой частях (A5). Функция dW^+/dz в области D_z^+ , очевидно, имеет особенности:

$$\left. \frac{dW^+}{dz} \right|_{z \rightarrow \pm i} = -\frac{q}{2\pi} \frac{1}{z \mp i} + O(1) \quad (\text{A6})$$

Сравнение области D_z^- с областью значений функции $\chi(z)$, или при учете (A4) с областью D_z^- показывает, что $\chi(z)$ регулярна и отлична от нуля всюду в D_z^- . Кроме того, при учете (1.5), (1.6), (1.10) из (A4) получим

$$\left. \frac{d\chi}{dz} \right|_{|z| \rightarrow \infty} = \frac{i}{a}; \quad \chi(z)|_{|z| \rightarrow \infty} = \frac{i}{a} z + O(1) \quad (\text{A7})$$

Следовательно, функция $d \ln \chi / dz$ не имеет особенностей в D_z^- , а в точке $|z| \rightarrow \infty$ имеет нуль первого порядка

$$\left. \frac{d}{dz} \ln \chi \right|_{|z| \rightarrow \infty} = \frac{1}{z} \quad (\text{A8})$$

Таким образом, у функций, стоящих в правой и левой частях (A5) нет иных особенностей, кроме полюсов. Поэтому можно говорить об одной мероморфной функции $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \begin{cases} -(q/\pi) d \ln \chi / dz, & z \in D_z^-, \\ dW^+ / dz, & z \in D_z^+, \end{cases} \quad (\text{A9})$$

имеющей в плоскости z два простых полюса и правильное поведение на бесконечности. Известно [7], такую функцию можно восстановить по ее особенностям: $\omega(z) = A(z+B)/(z^2+1)$

Комплексные постоянные A и B определяются из (A6), (A8): $A = -q/\pi$; $B = 0$. Окончательно получаем

$$\omega(z) = -(q/\pi) z / (z^2 + 1) \quad (\text{A10})$$

Теперь при учете (A9) найдем, что

$$W^+(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln[(z^2+1)C^+], \quad \chi(z) = C^- \sqrt{z^2+1} \quad (\text{A11})$$

Постоянные интегрирования C^+ , C^- определяются из (A7), (A9), (A10) при учете (1.13):

$$C^- = i/a, \quad C^+ = d^2 = 1/a^2 \quad (\text{A12})$$

Подставляя их в (A11) и учитывая (A5), (1.13), можно определить форму контура Γ_z

$$z = \sqrt{\left(\frac{t^-}{d}\right)^2 - 1}, \quad t^- = e^{i\sigma}; \quad z = \sqrt{\frac{1-d^4}{d^4 + (d/t^+)^2}}, \quad t^+ = e^{i\beta} \quad (\text{A13})$$

Используя формулу сдвига (1.17) при учете (2.2) можно убедиться, что оба выражения в (A13) представляют одно и то же семейство контуров.

Связь вспомогательного параметра d с физическим параметром Pe при заданном P (что равносильно заданному q) устанавливается из (1.27) при учете (1.6) и (A12):

$$Pe = Pd \quad (\text{A14})$$

Случаю $d = 1$ соответствует критический режим и из второго соотношения в (2.1) и (A14) можно получить зависимость $q_{cr}(Pe)$:

$$q_{cr} = \frac{\pi}{\ln(4/Pe) - \gamma} \quad (\text{A15})$$

Следует, однако, иметь в виду, что представленная в (2.1) зависимость $q(P)$ хорошо работает только для $P \leq 0,1$ [1]. Следовательно, полученная асимптотика (A15) справедлива лишь для $Re \leq 0,01$.

Приложение Б. Поскольку для расчета режимов, близких к критическому, необходима высокая точность, численная реализация описанного выше алгоритма потребовала особого внимания. Приведем наиболее существенные моменты.

Интегральное уравнение (3.3) относительно комплекснозначной функции $\varphi_1(\sigma)$ было преобразовано к системе двух интегральных уравнений относительно вещественных функций $Re\varphi_1(\sigma)$, $Im\varphi_1(\sigma)$. Полученная система решалась методом коллокаций на неравномерной сетке. Матрица при этом получалась хорошо обусловленной, поскольку вид системы обеспечивает преобладание диагональных элементов. Для ее обращения использовался стандартный метод исключения Гаусса с частичным выбором ведущего элемента.

Необходимость введения неравномерной сетки обусловлена тем, что у производной функции $\Phi(\sigma)$, являющейся правой частью интегрального уравнения для $\varphi_1(\sigma)$, в окрестности точки $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\pi$ остается особенность типа $1/\varepsilon$ (см. утверждение 2). Такой особенности оказывается достаточно, чтобы, например, при 128 узлах на отрезке $[0, \pi]$ внести заметную погрешность ($\sim 1\%$) в определение формы ледопородного тела уже при $d = 0,995$ (толщина перемычки еще составляет $\sim 0,2$). Применение неравномерной сетки, сгущающейся около $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\pi$ для поперечного и $\sigma = \pm\pi/2$ для продольного расположения хладоисточников, позволило уже при 100 узлах досчитывать до $d = 0,99999$ при соответствующей погрешности $< 0,5\%$ (толщина перемычки $\approx 0,01$). Погрешность вычислений оценивалась по степени близости определяемого контура к замкнутому.

Особый подход был применен к вычислению интегралов в правой части (3.5). Последние с использованием интегрирования по частям были приведены к виду

$$Re\Phi(s) = \ln \alpha'(s) - \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\pi R(\sigma, s) Im\{f'_0[\alpha(\sigma)]\} \alpha'(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\pi [\alpha_{-1}(\sigma) - \sigma] Re\{f'_0(\sigma)\} d\sigma$$

$$Im\Phi(s) = [\alpha(\sigma) - \sigma] + \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\pi J(\sigma, s) Re\{f'_0[\alpha(\sigma)]\} \alpha'(\sigma) d\sigma$$

где

$$R(\sigma, s) = \ln \left| \sin \frac{\sigma - s}{2} \sin \frac{\sigma + s}{2} \right| / \left[\sin \frac{\alpha(\sigma) - \alpha(s)}{2} \sin \frac{\alpha(\sigma) + \alpha(s)}{2} \right]$$

$$J(\sigma, s) = \ln \left| \sin \frac{\sigma - s}{2} \sin \frac{\alpha(\sigma) + \alpha(s)}{2} \right| / \left[\sin \frac{\alpha(\sigma) - \alpha(s)}{2} \sin \frac{\sigma + s}{2} \right]$$

Учитывая (2.3), видим, что благодаря наличию производной функции f_0 все подынтегральные функции имеют плохое поведение в окрестности $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\pi$, и стандартные методы численного интегрирования дают большую погрешность. Поэтому был использован следующий прием. С использованием быстрого преобразования Фурье [18] в каждой точке s находились разложения функций $R(\sigma, s)$, $J(\sigma, s)$ и $[\alpha_{-1}(\sigma) - \sigma]$ по $\cos[k\alpha(\sigma)]$, $\sin[k\alpha(\sigma)]$ и $\sin(k\sigma)$ соответственно (последнее разложение не зависит от s и, естественно, находилось один раз). Очевидно, что поведение разлагаемых функций определяется только функцией $\alpha(\sigma)$, которая всегда гладкая. Поэтому коэффициенты разложения быстро убывают и сами представления в виде рядов достаточно точны (при расчетах n выбиралось равным 128). После этого все интегралы вычислились точно [19].

Как уже отмечалось выше, при $\varepsilon \ll 1$ требует внимания и вопрос получения точек контура ледопородного тела вблизи перемычки. Было сделано предположение, что нарушение конформности $\zeta(\bar{t})$ в точках $\bar{t} = \pm 1$ обеспечивается вкладом функции $\varphi_0[\alpha(s)]$ в (3.1) и только им. Далее, из (1.25) при учете (A13), (2.3), (2.8) и (3.5) была получена формула

$$\frac{d\zeta(e^{is})}{ds} = \frac{d\zeta_0(e^{i\sigma})}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\alpha(s)} \cdot \alpha'(s) \exp \left[\frac{1}{2} \varphi_1(s) + \frac{i}{2} \Gamma(\varphi_1(\sigma)|s) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\sigma) d\sigma - \Phi(s) \right]$$

которая и применялась для интегрирования в окрестности $s = 0$ и $s = \pm\pi$. Быстрая сходимость процесса интегрирования при дроблении шага позволяет утверждать, что сделанное предположение верно, и следовательно, локально в окрестности перемены контур ледопородного тела в общем случае имеет ту же особенность, что и при малых P .

Для вычисления нормировочного множителя h следует учесть, что функция $\zeta(t^+)$ дает конформное отображение D_1^+ на D_2^+ , и после восстановления контура ледопородного тела известны ее граничные значения: $\zeta(t^+)|_{t^+=e^{i\sigma}} = \zeta(t^-)|_{t^-=e^{i\beta-1(\sigma)}}$. Тогда, как известно, значение функции в любой внутренней точке можно восстановить с помощью интеграла Коши [7]. В частности, для $t^+ = \pm id$ получим $\zeta^+(\pm id) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\zeta[e^{i\beta-1(\sigma)}]}{1 \mp ide^{-i\sigma}} d\sigma$, после чего легко определяется h .

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев К.Г., Мухамадуллина Г.И. О влиянии фильтрационного потока на равновесную форму тел, образующихся при искусственном замораживании // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 61. № 6. С. 980–985.
2. Насонов И.Д. Замораживание фильтрующих горных пород. М.: Недра, 1968. 187 с.
3. Sadovski A.V., Dorman Y.A. Artificial freezing and freezing of soil at the construction / Proc. 2 nd Intern. Sympos. in Ground Freezing. Trondheim. Amsterdam: Elsevier, 1982. P. 862–887.
4. Максимов В.А. Форма сомкнувшихся ледопородных тел, образуемых батареей замораживающих скважин, обтекаемой подземными водами // Некоторые вопросы механики горных пород. М.: Моск. горн. ин-т, 1968. С. 100–109.
5. Рвачев В.Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 248–254.
6. Чугунов В.А., Корнев К.Г. Динамика ледопородных ограждений при замораживании фильтрующих горных пород // Инж.-физ. ж. 1986. Т. 51. № 2. С. 305–311.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
8. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
10. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
11. Корнев К.Г., Чугунов В.А. Определение равновесной формы тел, образовавшихся при застывании фильтрационного потока // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 991–996.
12. Мухелишвилли Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
13. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
14. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
16. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с.
17. Kornev K., Mukhamadullina G. Mathematical theory of freezing for flow in porous media / Flow Through Porous Media: Fundamentals and Reservoir Engineering Applications. Proc. Intern. Conf. Moscow, 1992. М.: Inst. Probl. Mech. Russ. Acad. Sci., 1992. P. 60–P. 63.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.