УДК 532.31

© 1994 г. А.А. Костоглотов, В.Н. Таран

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассматривается новый подход к решению обратных задач газовой динамики, основанный на применении метода прогнозирующей модели [1] с использованием алгоритма с матрицей Грина, описанного в ранее [2] для случая конечномерных систем управления. Данный подход позволяет получить аналитическое выражение для обобщенных внешних сил, что значительно упрощает процедуру нахождения решения обратной задачи. Приводится пример для системы уравнений одномерной газовой динамики.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений одномерной газовой динамики в области $\overline{Q} = Q + \partial Q \in R^2$, $\overline{Q} = \{t, r: t \in [0, T], r \in [0, R(t)]\}$ в виде векторного дифференциального уравнения в нормальной форме

$$\partial \mathbf{w} / \partial t + \mathbf{F}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_r) = \mathbf{f}(t, r) \quad (\mathbf{w}_r = \partial \mathbf{w} / \partial r) \tag{1.1}$$

при начальных и граничных условиях

$$\mathbf{w}(0, r) = \mathbf{w}^0(r), \qquad S(w(t, 0), w(t, R), r, t) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{w}(t, r) \in L_3^2(\overline{Q})$ – вектор газодинамических параметров; $\mathbf{F}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_r) \in C^2$ – вектор-функция, удовлетворяющая условиям гиперболичности [3]: 1) все собственные значения матрицы $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{w}_r$ вещественны, 2) существует базис в пространстве E_3, составленный из левых собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$; $\mathbf{f}(t, r) \in L_3^2(Q)$ – вектор-функция, которая имеет смысл обобщенных внешних сил; $S(\mathbf{w}(t, 0), \mathbf{w}(t, R), r, t) \in C^2$ – вектор-функция, обеспечивающая условия согласования начальных и граничных условий: $S(\mathbf{w}^0(0), \mathbf{w}^0(R), r, 0) = 0$. Считается, что $\mathbf{f}(t, r)$ однозначно определяет обобщенное решение задача (1.1), (1.2).

Предположим, что задана программа движения рассматриваемой системы в виде вектора состояния $\varphi(t, r) \in L_3^2(\overline{Q})$.

Поставим задачу определения вектора $\mathbf{f}_0(t, r)$, для которого программное движение $\varphi(t, r)$ является одним из возможных движений системы (1.1), (1.2).

2. Метод решения. В соответствии с принципом минимума действия по Гамильтону функционал, стационарный на траектории программного движения $\varphi(t, r)$ системы (1.1), (1.2), запишем в виде

$$J_0[\mathbf{w}] = \| \mathbf{w}(t, r) - \varphi(t, r) \| + \tfrac{1}{2}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{K}$ – некоторая положительно определенная матрица квадратичной формы, $\| \cdot \|$ и $(\cdot, \cdot)$ – соответственно норма и скалярное произведение в $L_3^2(\overline{Q})$.

Тогда задачу отыскания $f_0(t, r)$ можно трактовать как задачу минимизации функционала (2.1)

$$J_0[\mathbf{w}] \to \inf_{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{w} \in L_3^2(\overline{Q}); \quad \mathbf{f} \in L_3^2(Q)$$

при ограничениях, заданных в виде (1.1), (1.2).

Было показано (см. например [4]), что сложность поставленной задачи существенно снижается при минимизации функционала обобщенной работы

$$J[\mathbf{w}] = \| \mathbf{w}(t,r) - \varphi(t,r) \| + \frac{1}{2}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}) + \frac{1}{2}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_0) =$$

$$= \int_0^T H[t,\mathbf{w}]dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^R (\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{f}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_0)dr\,dt \tag{2.2}$$

$$\left(H[t,\mathbf{w}] = \int_0^R (\mathbf{w}(t,r) - \varphi(t,r))^2 dr \right).$$

Заметим, что случай $\| \mathbf{K}^{-1} \| = 0$ не представляет интереса, так как при этом нет гарантий единственности элемента $\mathbf{f}_0 \in L_3^2(Q)$ [5], что противоречит физической сущности поставленной задачи.

Рассмотрим функционал Ляпунова вида

$$V[t,\mathbf{w}] = \int_t^T\int_0^R [\mathbf{w}(s,r) - \varphi(s,r)]^2 dr\,ds + \frac{1}{2}\int_t^T\int_0^R \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(s,r)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}(s,r)dr\,ds$$

Выделим произвольную внутреннюю точку $\zeta(t, r)$ области Q и область Q_ε малой меры mes $Q_\varepsilon = m_\varepsilon > 0$, лежащую целиком внутри Q и содержащую ζ в качестве внутренней точки. Зададим вариацию функции $\mathbf{w}(t, r)$ следующей формулой [6]:

$$\delta\mathbf{w}(t,r) = \begin{cases} C > 0, & (t,r) \in Q_\varepsilon \\ 0, & (t,r) \notin Q_\varepsilon \end{cases}$$

Определим функциональную производную для функционала следующим образом [6]:

$$\frac{\delta I[\mathbf{w}]}{\delta\mathbf{w}} = \lim_{\|\delta\mathbf{w}\|_{L_3^2} \to 0} \frac{I[\mathbf{w}+\delta\mathbf{w}] - I[\mathbf{w}]}{\|\delta\mathbf{w}\|_{L_3^2}}$$

Теорема. Для процесса (1.1), (1.2) и программного движения $\varphi(t, r)$ экстремум функционала (2.2) достигается при

$$\mathbf{f}_0(t,r) = -\mathbf{K}\int_t^T\int_0^R \mathbf{G}^*(t,s,r,\xi)\frac{\delta H[s, y(s,\xi,\mathbf{w}(t,r))]}{\delta\mathbf{w}}d\xi\,ds$$

где $\mathbf{y}(s, \xi, \mathbf{w}(t, r))$ – свободное движение ($\mathbf{f}(s, \xi) \equiv 0$) системы (1.1), (1.2) на отрезке $s \in [t, T]$, зависящее от текущего состояния $\mathbf{w}(t, r)$, $\mathbf{G}^*(t, s, r, \xi)$ – сопряженная по переменным r, ξ матрица Грина линеаризованной начально-краевой задачи (1.1), (1.2)

$$\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{w}}\mathbf{G} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{w}_r}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial r} = \delta(t-s)\delta(r,\xi)$$

$$\mathbf{G}(t,s,0,\xi) = \mathbf{G}(t,s,R(t),\xi) = 0$$

производные $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{w}$, $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{w}_r$ вычислены на траектории свободного движения $\mathbf{y}(s, \xi, \mathbf{w}(t, r))$.

Доказательство. Согласно методу динамического программирования, минимум функционала (2.2) достигается на решении функционального уравнения

$$\min_{\mathbf{f}}\left\{\frac{dV}{dt}+H+\frac{1}{2}\int_0^R[\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}+\mathbf{f}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_0]dr\right\}=0 \qquad (2.3)$$

записанного для функционала Ляпунова $V[t, \mathbf{w}]$, параметрически зависящего от времени и определенного на множестве функций $\mathbf{w}(t, r)$, удовлетворяющих системе (1.1), (1.2).

Производную dV/dt области Q с учетом (1.1) можно представить в виде [6]

$$\frac{dV[t,\mathbf{w}]}{dt}=\frac{\partial V[t,\mathbf{w}]}{\partial t}+\int_0^R\frac{\delta V[t,\mathbf{w}]}{\delta \mathbf{w}}(-\mathbf{F}+\mathbf{f})dr$$

Тогда решением поставленной вариационной задачи является функция

$$\mathbf{f}_0(t,r)=-\mathbf{K}\,\delta V[t,\mathbf{w}]/\delta\mathbf{w} \qquad (2.4)$$

где V – решение линейного функционального уравнения

$$\frac{dV[t,\mathbf{w}]}{dt}-\int_0^R\frac{\delta V[t,\mathbf{w}]}{\delta\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w},\mathbf{w}_r)dr=-H[t,\mathbf{w}] \qquad (2.5)$$

Это можно проверить (см. например [4]) путем подстановки выражения для dV/dt в уравнение (2.3) и последующей минимизации по $\mathbf{f}$ при учете (2.5). Следует сказать, что в выражении (2.4) в аргументы $\mathbf{f}_0(t, r)$ входит $\mathbf{w}(t, r)$ – свободный элемент фазового пространства, и, следовательно, данное выражение нужно понимать как обратную связь, а не программное управление, минимизирующее заданный функционал.

Заметим, что уравнение (2.5) связано с уравнением характеристики

$$\partial\mathbf{w}/\partial t=-\mathbf{F}(\mathbf{w},\mathbf{w}_r) \qquad (2.6)$$

для которой $dV/dt = -H$ и соответственно

$$V[t,\mathbf{y}(t,r)]=\int_t^T H[s,\mathbf{y}(t,s,r,\mathbf{w}(t,r))]ds \qquad (2.7)$$

В последнем уравнении $\mathbf{y}$ – фазовая траектория системы (2.6) при начальных условиях $\mathbf{y}(t, s, r)|_{s=t} = \mathbf{w}(t, r)$.

Рассмотрим ε-окрестность $\mathbf{y}(t, s, r)|_{s=t}$ в пространстве $L_3^2(Q)$. Для ограниченной вариации начальных условий $\mathbf{w}(t, r) + \delta\mathbf{w}(t, r)$, $\|\delta\mathbf{w}(t, r)\|_{L_3^2(Q)} \leqslant \varepsilon$, вариацию решения уравнения (2.6) обозначим

$$\mathbf{g}(t,s,r)=\mathbf{y}(t,s,r,\mathbf{w}+\delta\mathbf{w})-\mathbf{y}(t,s,r,\mathbf{w})$$

В силу равенства (2.7) справедливо представление

$$\delta V[t,y]=\int_t^T\int_0^R\frac{\delta H}{\delta w}[s,\mathbf{y}(t,s,r,\mathbf{w}(t,r))]\,\mathbf{g}(t,s,r)dr\,ds$$

где $\mathbf{g}(t, s, r)$ – решение однородной начально-краевой задачи

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial s}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{w}_r}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{w}}\mathbf{g}=0$$

$$\mathbf{g}(t,s,r)\big|_{s=t}=\delta\mathbf{w}(t,r),\qquad \mathbf{g}(t,s,o)=\mathbf{g}(t,s,R)=0$$

Данное решение в силу линейности краевой задачи может быть представлено в виде ($\mathbf{G}(t, s, r, \xi)$ – матрица Грина)

$$\mathbf{g}(t,s,r)=\int_0^R\mathbf{G}(t,s,r,\xi)\delta\mathbf{w}(t,\xi)d\xi \qquad (2.8)$$

Тогда для вариации функционала V имеем

$$\delta V[t,\mathbf{y}] = \int_0^R \left\{ \int_t^T \int_0^R \mathbf{G}^*(t,s,r,\xi) \frac{\delta H}{\delta \mathbf{w}} [s,\mathbf{y}(t,s,\xi,\mathbf{w}(t,r))] d\xi ds \right\} \delta \mathbf{w}(t,r) dr \tag{2.9}$$

где $\mathbf{G}^*$ – функция, сопряженная $\mathbf{G}$ по переменным r, ξ, причем $\mathbf{G}$ и $\delta H/\delta \mathbf{w}$ находятся на траектории свободного движения [2] системы (2.6).

Воспользовавшись выражением (2.9) для вычисления $\mathbf{f}_0$ по формуле (2.4), получим

$$\mathbf{f}_0(t,r) = -\mathbf{K} \int_t^T \int_0^R \mathbf{G}^*(t,s,r,\xi) \frac{\delta H[s,\mathbf{y}(s,\xi,\mathbf{w}(t,r))]}{\delta \mathbf{w}} d\xi ds \tag{2.10}$$

что доказывает утверждение теоремы.

Полученное выражение (2.10) даёт возможность построения вектор-функции $\mathbf{f}_0$, как решения обратной задачи (1.1), (1.2) в смысле минимума функционала обобщенной работы (2.2).

Явная форма полученного решения позволяет существенно снизить трудоемкость нахождения решения обратной задачи, а в некоторых случаях позволяет отыскать решение, когда традиционные методы не дают результата из-за большой сложности и громоздкости.

3. Пример. Пусть система уравнений газовой динамики описывает процесс разлета сферического объема в среде с противодавлением. В сферических координатах соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = f_1(t,r) \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial \upsilon}{\partial r} + \frac{2\rho\upsilon}{r} = f_2(t,r) \\
&\frac{\partial p}{\partial r} + \upsilon \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p \frac{\partial \upsilon}{\partial r} + \frac{2\gamma p \upsilon}{r} = f_3(t,r)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где υ, ρ, p – газодинамические параметры возмущенной среды, $\gamma = 1,4$ – показатель адиабаты, f_1, f_2, f_3 – стоки или источники соответственно массы, импульса и энергии, определенные в области гладкого течения.

Граничные условия заданы в центре $r = 0$

$$\upsilon(t,0) = 0 \tag{3.2}$$

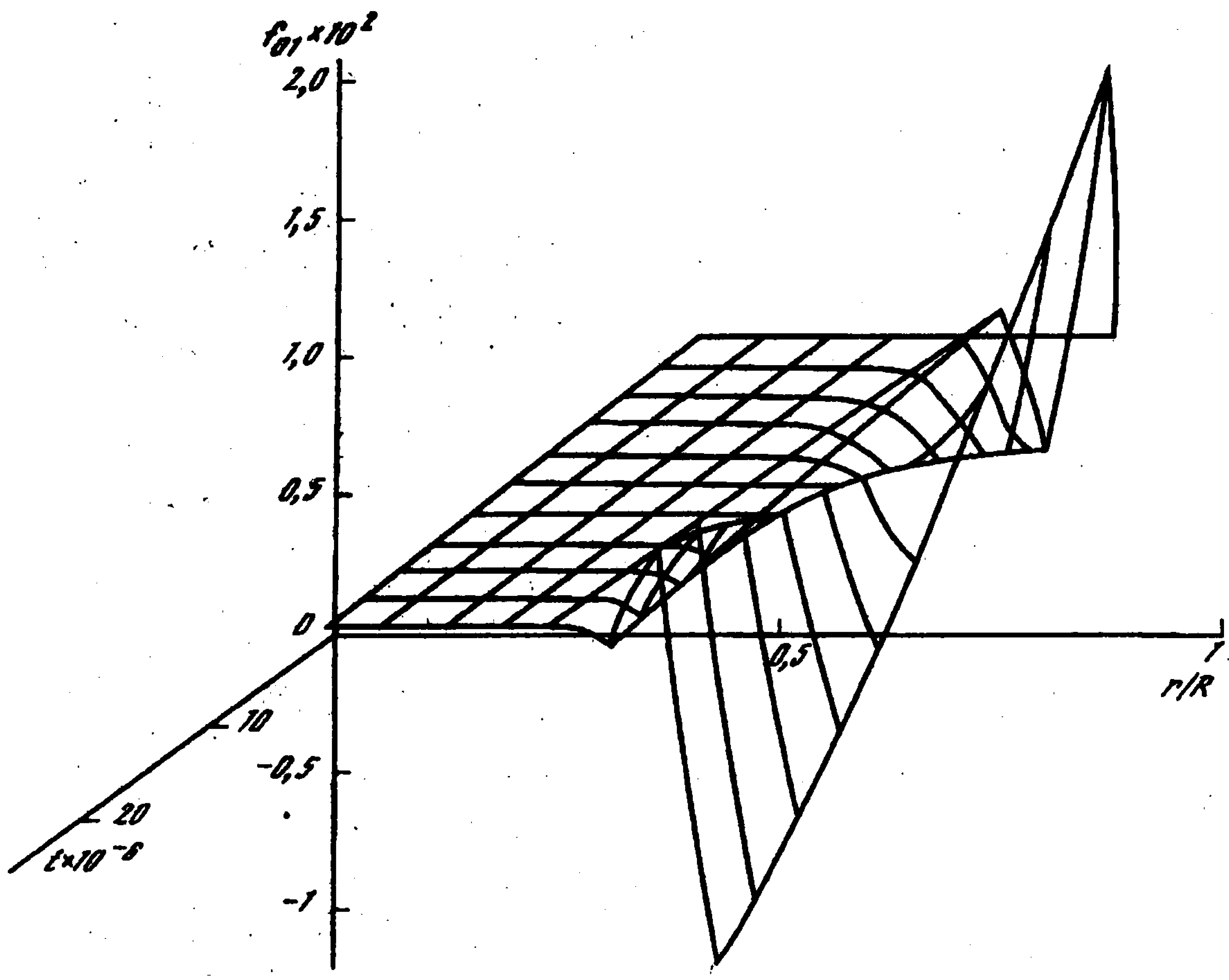
и на фронте $r = R(t)$ ударной волны, распространяющейся в невозмущенной среде ($\upsilon = \upsilon_1 = 0$, $\rho = \rho_1 = \text{const}$, $p = p_1 = \text{const}$) со скоростью $D = dR/dt$. Безразмерные значения [7] параметров на фронте ударной волны имеют вид

$$\begin{aligned}
&p_R = \frac{1}{4}\left[(\gamma+1)\upsilon_R^2 + \upsilon_R\sqrt{(\gamma+1)\upsilon_R^2 + 16\gamma}\right], \quad \rho_R = \frac{(\gamma+1)p_R + \gamma - 1}{\gamma + 1 + (\gamma-1)p_R} \\
&D = \{[(\gamma+1)p_R + \gamma - 1]/2\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

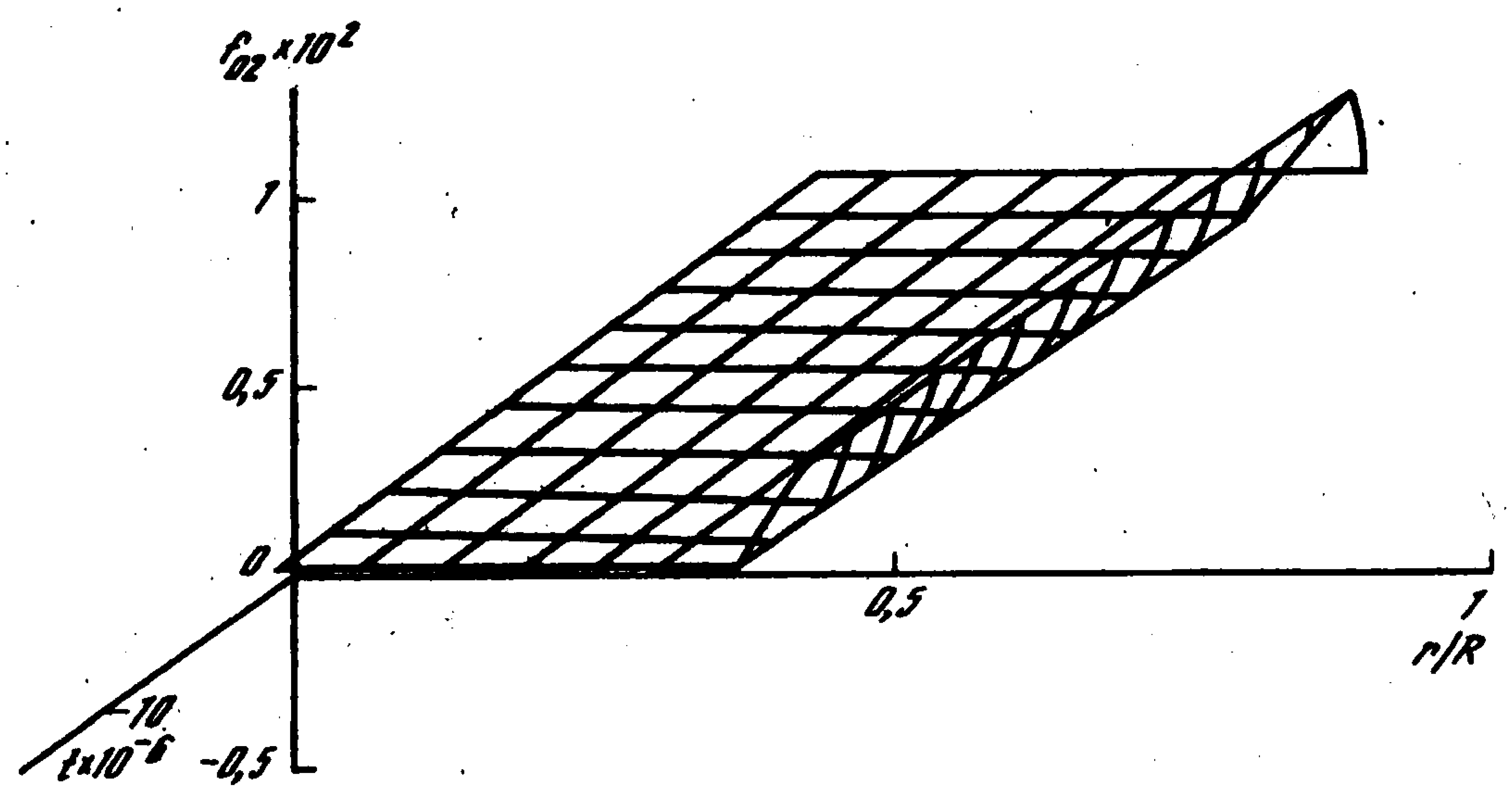
Начальные условия $\upsilon(0,r) = \upsilon^0(r)$, $\rho(0,r) = \rho^0(r)$, $p(0,r) = p^0(r)$, $r \in [0, R(t)]$, представляют собой автомодельное решение задачи о точечном взрыве [7].

Програмное движение задается на фронте ударной волны при $t \in [t_0, t_0 + T]$

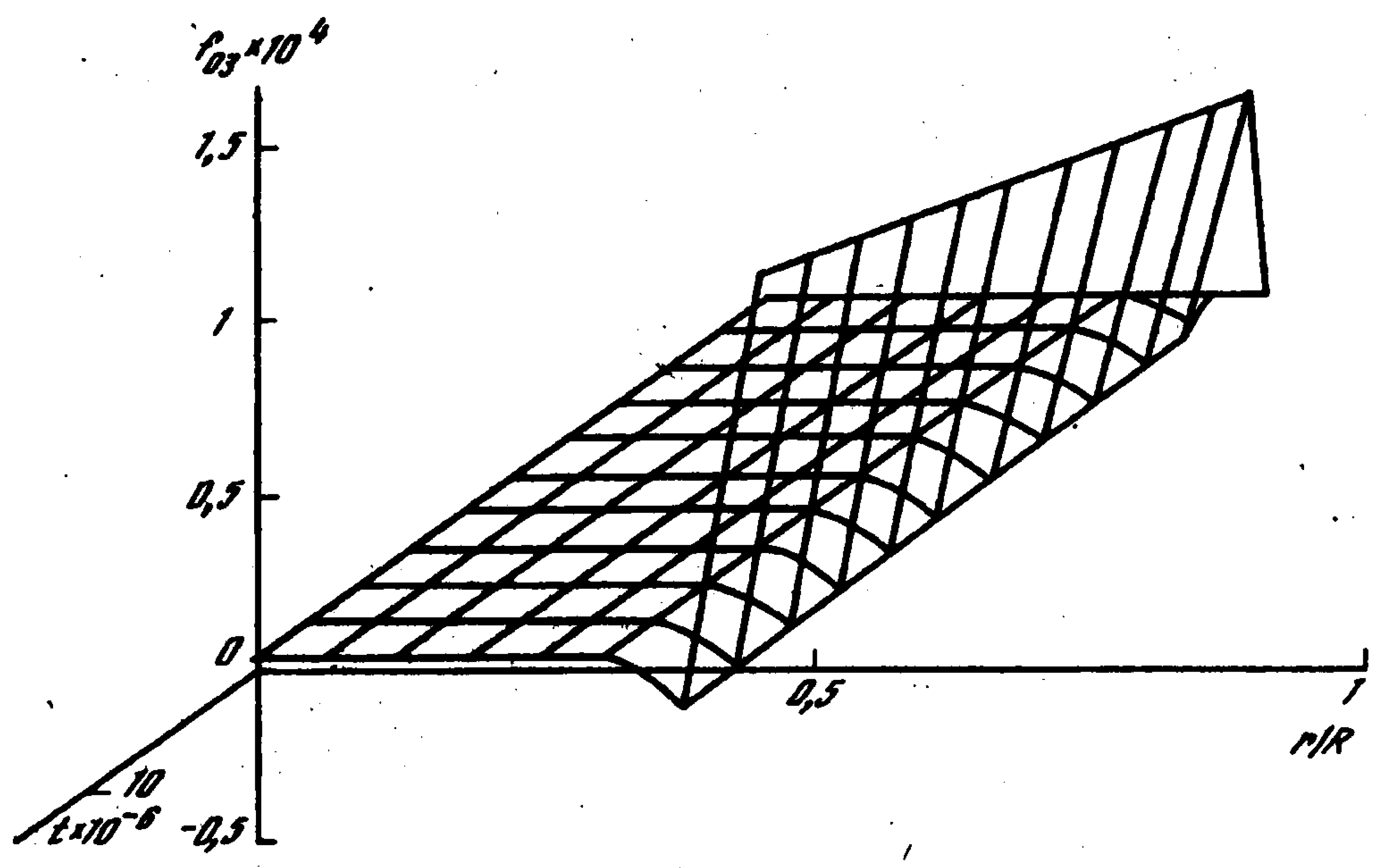
$$\varphi(t,R) = \varphi_R(t) = (\upsilon_R^*(t),\ \rho_R^*(t),\ p_R^*(t))^{\mathrm{T}} \tag{3.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для системы (3.1), граничных условий (3.2), (3.3) и программного движения (3.4) решение обратной задачи $\mathbf{f}_0 = (f_{01}, f_{02}, f_{03})$ будем искать из условия минимума функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T [\mathbf{w}(t) - \varphi_R(t)]^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^R (\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{f}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_0)dr\,dt \qquad (3.5)$$

$$(\mathbf{w}(t) = (\upsilon_R(t), \rho_R(t), p_R(t))^{\mathrm{T}})$$

Тогда в соответствии с утверждением теоремы

$$\mathbf{f}_0(t,r) = -\mathbf{K}\int_t^T\int_0^R \mathbf{G}^*(t,s,r,\xi)[\mathbf{y}(s,R,\mathbf{w}(t,r)) - \varphi_R(s)]d\xi ds$$

где $\mathbf{G}$ – матрица Грина начально-краевой задачи

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r} + \mathbf{B}\mathbf{G} = \delta(t-s)\delta(r,\xi), \quad \mathbf{G}(t,s,0,\xi) = \mathbf{G}(t,s,R(t),\xi) = 0$$

причем

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \upsilon & 0 & 1/p \\ \rho & \upsilon & 0 \\ \gamma p & 0 & \upsilon \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial r} & -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial p}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \dfrac{\rho}{r} & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial r} + \dfrac{2\upsilon}{r} & 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} + \gamma\dfrac{p}{r} & 0 & \gamma\dfrac{\partial \upsilon}{\partial r} + \dfrac{2\gamma\upsilon}{r} \end{Vmatrix}$$

вычислены на свободном движении $\mathbf{y}(s, \xi, \mathbf{w}(t, r))$ системы (3.1)–(3.3).

В вычислительном алгоритме число узлов по пространственной координате принято равным 15. Аппроксимация распределенных газодинамических параметров произведена методом сплайн-функций. Число Куранта из соображений вычислительной устойчивости выбрано равным 0,75 при величине шага по безразмерному времени $\tau = 10^{-6}$. Скользящий интервал расчета $T = 5\tau$. Общее время расчета 30τ. Коэффициенты диагональной матрицы K выбраны экспериментально из условия совпадения программного движения и решения задачи (3.1)–(3.3) и приняты равными $k_{ii} = 10^{-10}$. Время начала расчетов $t_0/t_g = 5{,}455 \times 10^{-4}$, при этом безразмерные параметры на фронте $R(t_0)/R_g = 4{,}942 \times 10^{-2}$ определяются следующими значениями:

$$\frac{\upsilon_R^0}{c} = 30{,}55; \quad \frac{p_R^0}{p_1} = 1122; \quad \frac{\rho_R^0}{\rho_1} = 5{,}969$$

Здесь t_g, R_g – соответственно динамические время и длина [7], c – скорость звука в невозмущенной среде, ρ_1, p_1 – плотность и давление среды при нормальных условиях.

Результаты расчетов для рассмотренного интервала времени могут быть аппроксимированы линейными зависимостями:

$$\frac{\upsilon_R^0 - \upsilon_R}{c} = k_\upsilon t; \quad \frac{p_R^0 - p_R}{p_1} = k_p t; \quad \frac{\rho_R^0 - \rho_R}{\rho_1} = k_\rho t$$

где $k_\upsilon = 2{,}86 \times 10^5$, $k_p = 2{,}03 \times 10^6$, $k_\rho = 6{,}0 \times 10^1$ – для невозмущенного движения, $k_\upsilon = 3{,}83 \times 10^5$, $k_p = 2{,}63 \times 10^6$, $k_\rho = 8{,}66 \times 10^1$ – для программного движения, и $k_\upsilon = 3{,}83 \times 10^5$, $k_p = 2{,}70 \times 10^6$, $k_\rho = 8{,}33 \times 10^1$ – для полученного на основе предложенного подхода решения задачи (3.1)–(3.3), (3.5). На фиг. 1–3 показаны графики функций f_{01}, f_{02}, f_{03}, являющихся решением поставленной обратной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шендрик В.С.* Синтез оптимальных управлений методом прогнозирующей модели // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 3. С. 561–562.
2. *Детистов В.А., Таран В.Н.* Синтез оптимального управления градиентным методом на основе прогнозирующей модели // Автоматика и Телемеханика. 1990. № 10. С. 46–56.
3. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
4. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
6. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
7. *Кестенбойм Х.С., Росляков Г.С., Чудов Л.А.* Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. М.: Наука, 1974. 255 с.

Поступила в редакцию
13.V.1993

Ростов-на-Дону