

УДК 532.528

© 1994 г. Л.М. Зигангареева, О.М. Киселев

## О РАСЧЕТЕ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО КОНУСА ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается в нелинейной постановке задача об обтекании кругового конуса по схеме Рябушинского осесимметричным дозвуковым потоком сжимаемой жидкости (газа). Предлагается численно-аналитический метод решения задачи, основанный на использовании переменных годографа скорости и являющийся развитием метода, предложенного [1] для расчета истечения струи из воронкообразного сосуда. Приводятся результаты численного исследования кавитационного обтекания диска и кавитатора с конической выемкой осесимметричным дозвуковым потоком воды.

Задачи об осесимметричных кавитационных течениях несжимаемой жидкости решались в нелинейной постановке численно многими авторами, при этом рассматривались кавитаторы в форме сферы, диска и прямого кругового конуса. Наиболее существенные результаты по исследованию кавитационного обтекания несжимаемой жидкостью диска и конуса получены в [2, 3]. С ними хорошо согласуются результаты работ [4, 5].

Осесимметричные кавитационные течения сжимаемой жидкости при числе кавитации  $Q$ , отличном от нуля, исследовались ранее только в линейной постановке с использованием методов газодинамики тонкого тела [6–11].

1. Будем рассматривать осесимметричное дозвуковое обтекание кругового конуса сжимаемой жидкостью по схеме Рябушинского. Жидкость будем считать идеальной и невесомой, а течение – стационарным, безвихревым, изэнтропическим. В плоскости цилиндрических координат  $x, r$  область, занятая течением, ограничена участками  $AB$  и  $HA$  оси симметрии  $x$ , образующими конусов  $BC$  и  $HG$ , составляющими с осью симметрии угол  $\theta_0$ , и дугой  $CDG$  свободной поверхностью (фиг. 1,а). Начало координат выбрано так, что плоскость  $x = 0$  служит плоскостью симметрии потока (полупрямая  $DA$  принадлежит этой плоскости).

Пусть  $\lambda$  – приведенная скорость,  $M$  – число Маха,  $\theta$  – угол наклона скорости к оси  $x$  ( $\theta = 0$  на  $AB, HA$  и  $DA$ ),  $\lambda_a$  и  $\lambda_c$  – значения  $\lambda$  в бесконечно удаленной точке  $A$  и на  $CDG$  соответственно ( $\lambda_a < \lambda_c \leq 1$ ),  $\tau = \lambda/\lambda_a$ ,  $\tau_0 = \lambda_c/\lambda_a$ . В плоскости  $(\tau, \theta)$  части области течения, лежащей слева от плоскости  $x = 0$ , соответствует прямоугольник

$$\Sigma_0 = \{(\tau, \theta) | 0 < \tau < \tau_0, 0 < \theta < \theta_0\}$$

(фиг. 1,б; точке торможения  $B$  отвечает отрезок  $BB_1$ ).

Вводя потенциал скорости  $\varphi$  и функцию тока  $\psi$  соотношениями

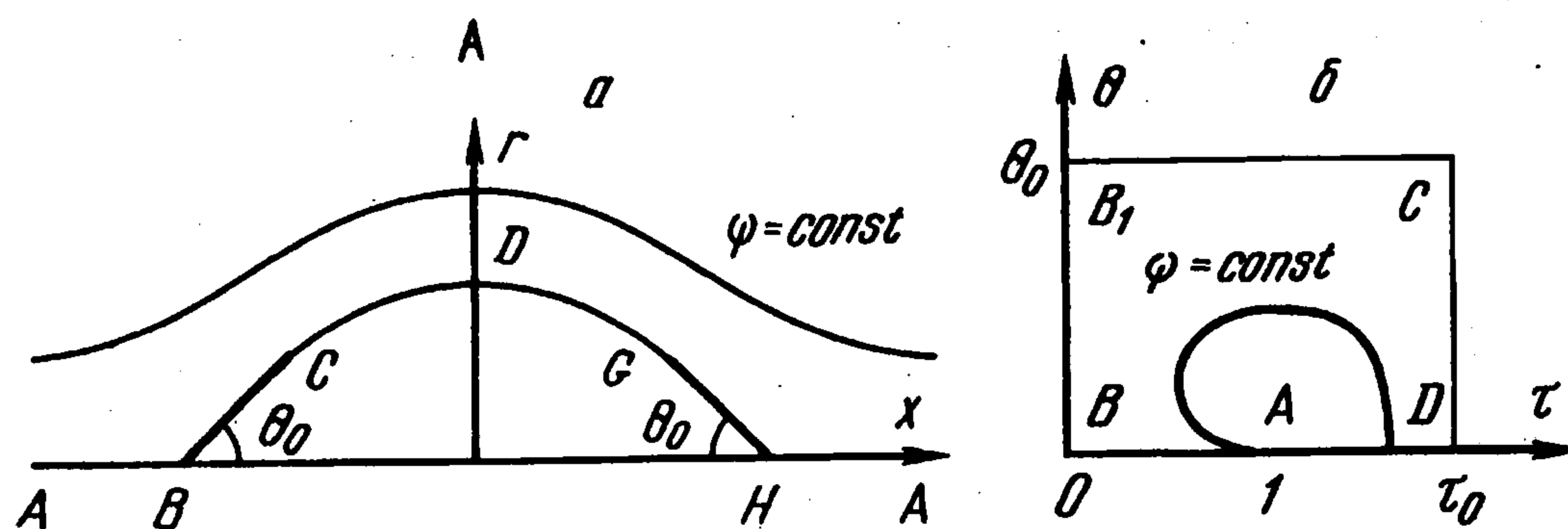
$$\tau \cos \theta = \varphi_x = (rv)^{-1} \psi_r, \quad \tau \sin \theta = \varphi_r = -(rv)^{-1} \psi_x, \quad v = \rho / \rho_0$$

и положив  $z = x + ir$ , запишем

$$dz = \tau^{-1} [d\varphi + i(rv)^{-1} d\psi] e^{i\theta} \tag{1.1}$$

Рассматривая  $\tau$  и  $\theta$  в качестве независимых переменных, из (1.1) получим

$$x_\kappa + ir_\kappa = \tau^{-1} [\varphi_\kappa + i(rv)^{-1} \psi_\kappa] e^{i\theta}, \quad \kappa = \tau, \theta \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Перекрестным дифференцированием равенства (1.2) найдем

$$\varphi_{\theta} = \tau(rv)^{-1} \psi_{\tau} \quad (1.3)$$

$$\varphi_{\tau} = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{rv} \right) - \frac{1}{rv\tau} \right] \psi_{\theta} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \right) \psi_{\tau} \quad (1.4)$$

Пользуясь уравнением Эйлера  $\rho v dV + dp = 0$  и соотношением  $dp/d\rho = a^2$  ( $V$  – модуль скорости,  $a$  – скорость звука), приведем (1.4) к виду

$$\varphi_{\tau} = (rv\tau)^{-1} (M^2 - 1) \psi_{\theta} + (rv\tau \sin \theta)^{-1} F \quad (1.5)$$

$$F = \tau r^{-1} (\psi_{\tau} r_{\theta} - \psi_{\theta} r_{\tau}) \sin \theta \quad (1.6)$$

При помощи (1.3), (1.5) из (1.2) получим

$$\begin{aligned} rx_{\tau} &= [(M^2 - 1) \psi_{\theta} \cos \theta + F \operatorname{ctg} \theta - \tau \psi_{\tau} \sin \theta] (v\tau^2)^{-1} \\ rx_{\theta} &= [\tau \psi_{\tau} \cos \theta - \psi_{\theta} \sin \theta] (v\tau)^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} y_{\tau} = G &= [(M^2 - 1) \psi_{\theta} \sin \theta + F + \tau \psi_{\tau} \cos \theta] (v\tau^2)^{-1} \\ y_{\theta} = H &= [\tau \psi_{\tau} \sin \theta + \psi_{\theta} \cos \theta] (v\tau)^{-1}, \quad y = r^2 / 2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.6), (1.8) найдем

$$F = \sin^2 \theta [\tau^2 \psi_{\tau}^2 + (1 - M^2) \psi_{\theta}^2] (2Y + \psi_{\theta} \sin \theta)^{-1}, \quad Y = v\tau y \quad (1.9)$$

Исключив  $\varphi$  из (1.3), (1.5), приходим к уравнению

$$L(\psi) = N(\psi, Y), \quad N(\psi, Y) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (1.10)$$

$$L(\psi) = (1 - M^2) \psi_{\theta\theta} + \tau^2 \psi_{\tau\tau} + (1 + M^2) \tau \psi_{\tau}$$

При выводе формул (1.7)–(1.10) использовались предположения о стационарности, баротропности, потенциальности и адиабатичности течения, но не конкретные зависимости между газодинамическими параметрами. Поэтому соотношения (1.7)–(1.10) (полученные впервые в [1]), применимы к исследованию течений сжимаемых жидкостей и газов с различными уравнениями состояния.

На границе области  $\Sigma_0$  должны выполняться условия

$$\psi = 0 \text{ на } ABB_1CD, \quad \psi_{\theta} = 0 \text{ на } AD, \quad y = 0 \text{ на } ABB_1 \quad (1.11)$$

Используя (1.8), (1.9), (1.11), можно выразить  $Y$  через  $\psi$ :

$$Y = Y(\psi) = \psi \cos \theta + \int_0^{\theta} (\tau \psi_{\tau} + \psi) \sin \theta d\theta + \Omega(\psi) \quad (1.12)$$

$$\Omega(\psi) = v\tau \int_1^{\tau} (v\tau^2)^{-1} (1 - M^2) \psi|_{\theta=0} d\tau$$

Таким образом, задача сводится к определению функции  $\psi(\tau, \theta)$ , удовлетворяющей в области  $\Sigma_0$  соотношениям (1.10), (1.9), (1.12), граничным условиям (1.11) и условию

$$\psi > 0, \quad (\tau, \theta) \in \Sigma_0 \quad (1.13)$$

На  $CD$  имеем  $\psi_\theta = 0$ , поэтому из (1.7), (1.8) получается следующая формула для кривизны  $K$  дуги  $CD$ :

$$K = \frac{x_\theta r_{\theta\theta} - r_\theta x_{\theta\theta}}{(x_\theta^2 + r_\theta^2)^{3/2}} \Big|_{\tau=\tau_0} = -\nu r \psi_\tau^{-1} \Big|_{\tau=\tau_0} \quad (1.14)$$

Поскольку  $\psi_\tau = 0$  на  $B_1C$ , то из (1.14) следует, что  $K \rightarrow \infty$  при приближении к точке  $C$  контакта свободной поверхности с поверхностью конуса (для несжимаемой жидкости такое утверждение было доказано в [12]).

2. Решение задачи представим в виде  $\psi = \psi^0 + \chi$ , где  $\psi^0$  – сингулярная часть  $\psi$ , описывающая поведение функции тока в окрестности точки  $A$  и определяющая топологию течения. Для отыскания  $\psi^0$  используем метод асимптотических разложений.

Положим

$$\omega = \arctg \frac{\theta}{\alpha \zeta}, \quad \zeta = \tau - 1, \quad \alpha = (1 - M_a^2)^{1/2} \quad (2.1)$$

Здесь  $M_a$  – значение  $M$  при  $\lambda = \lambda_a$ ,  $\omega \in [0, \pi]$  при  $(\tau, \theta) \in \Sigma_0$ .

Будем искать асимптотическое разложение функции  $\psi^0 = \psi^0(\theta, \omega)$  по  $\theta$ , представив его главный член  $\psi^{01}$  в форме  $\psi^{01} = \theta^{-n} f_1(\omega)$  ( $n = \text{const}$ ,  $n > 0$ ). При этом

$$\begin{aligned} \psi_\tau^{01} &= -\alpha \theta^{-n-1} \sin^2 \omega f_1', & \psi_\theta^{01} &= \theta^{-n-1} (-n f_1 + \frac{1}{2} \sin 2\omega f_1') \\ \psi_{\tau\tau}^{01} &= \alpha^2 \theta^{-n-2} (2 \sin^3 \omega \cos \omega f_1' + \sin^4 \omega f_1'') \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\psi_{\theta\theta}^{01} = \theta^{-n-2} [n(n+1) f_1 - (n + \sin^2 \omega) \sin 2\omega f_1' + \frac{1}{4} \sin^2 2\omega f_1'']$$

В соответствии с (1.11), (1.13) подчиним  $\psi^{01}$  условиям

$$\psi_\theta^{01} = 0, \quad \omega = 0; \quad \psi_\theta^{01} = 0, \quad \omega = \pi; \quad \psi^{01} > 0, \quad 0 \leq \omega < \pi \quad (2.3)$$

При учете (2.1), (2.2) из первого равенства (2.3) получим, что

$$\omega^{-n-1} (-n f_1 + \sin \omega f_1') \rightarrow 0, \quad f_1 = O(\omega^n), \quad \psi^{01} = O(\zeta^{-n}) \quad \text{при } \omega \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

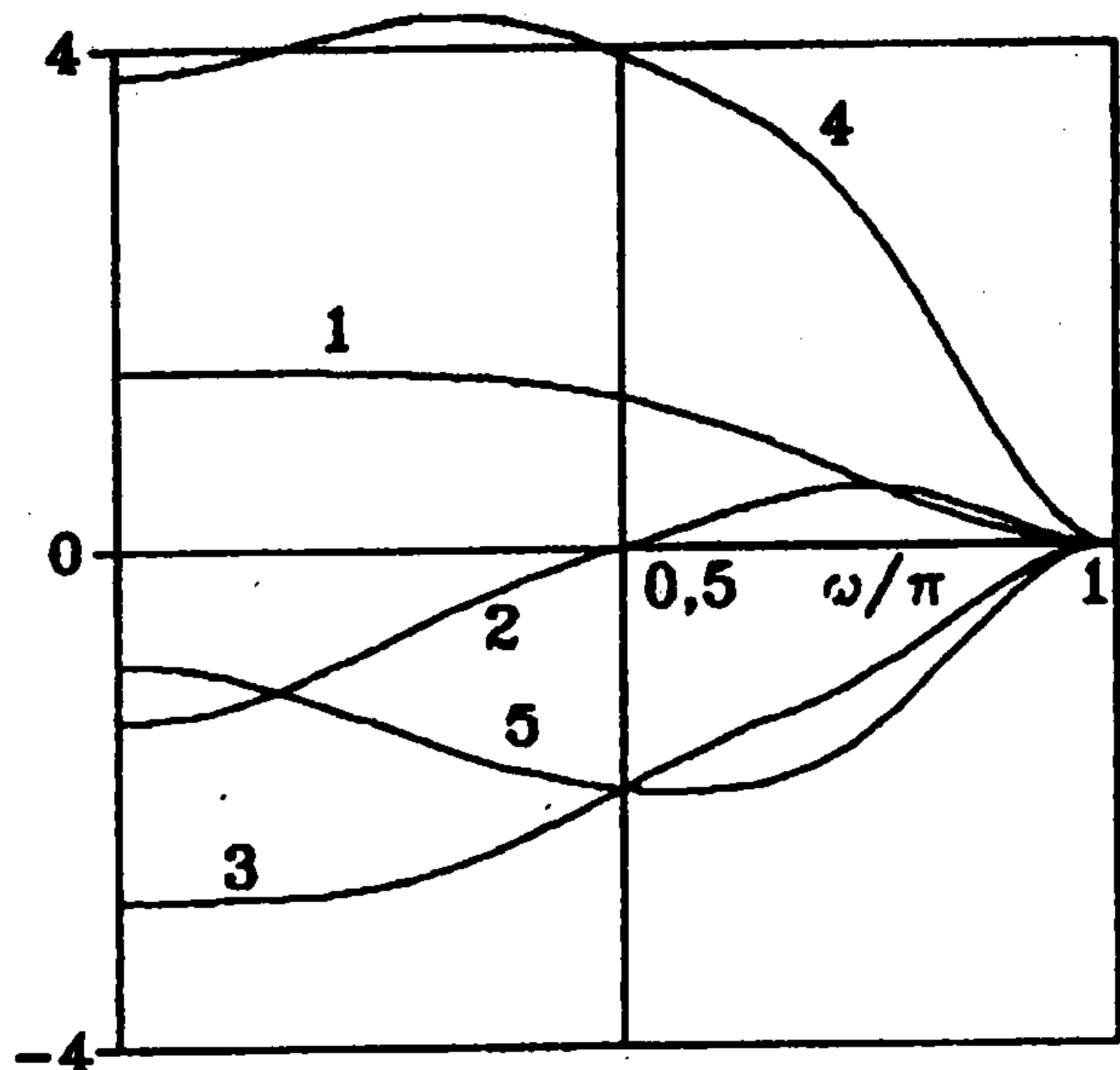
В выражении (1.12) положим  $\psi = \psi^{01}$  и перейдем от переменных  $\tau, \theta$  к переменным  $\theta, \omega$  (поскольку  $\tau - 1 = \alpha^{-1} \theta \text{ctg } \omega$ , то всякую аналитическую функцию  $\tau$  можно представить в виде ряда по степеням  $\theta$  с коэффициентами, зависящими от  $\omega$ ). При учете (2.1), (2.2), (2.4) будем иметь

$$\Omega(\psi^{01}) = O(\zeta^{-n+1}) = O(\theta^{-n+1}), \quad \int_0^\theta \tau \psi_\tau^{01} \sin \theta d\theta = O(\theta^{-n+1})$$

$$\int_0^\theta \psi^{01} \sin \theta d\theta = O(\theta^{-n+2}), \quad Y(\psi^{01}) = \theta^{-n} f_1(\omega) + O(\theta^{-n+1})$$

В соотношении (1.10) положим  $\psi = \psi^{01}$  и перейдем к переменным  $\theta, \omega$ . Приравняв главные члены в разложениях левой и правой частей (1.10) по степеням  $\theta$  (члены порядка  $\theta^{-n-2}$ ), получим дифференциальное уравнение относительно  $f_1(\omega)$ , из которого после замены  $f_1(\omega) = \sin^n \omega \varphi_1(\omega)$  следует уравнение

$$[4 + (n^2 - 4n) \sin^2 \omega] \varphi_1^2 \varphi_1'' + [(4 + 2n - n^2) \sin^2 \omega - 4] \varphi_1 \varphi_1'^2 + \frac{1}{2} \sin 2\omega (\varphi_1'^3 + n^2 \varphi_1^2 \varphi_1') +$$



Фиг. 2

$$+ (4n^2 - 2n^3) \sin^2 \omega \varphi_1^3 = 0 \quad (2.5)$$

Из (2.3) для  $\varphi_1(\omega)$  получаются условия

$$\varphi_1'(0) = 0; \varphi_1(\pi) = 0; \varphi_1(\omega) > 0, 0 \leq \omega < \pi \quad (2.6)$$

Анализ показывает, что существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение задачи (2.5), (2.6) и оно имеет место при  $n = 2/3$ . Искомая функция  $\varphi_1$  находится путем численного интегрирования (2.5) от точки  $\omega = \pi - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) до  $\omega = 0$  с учетом того, что в окрестности точки  $\omega = \pi$  имеет место разложение

$$\varphi_1(\pi - t) = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{28}{405}t^6 - \frac{5129}{612360}t^8 + \dots \quad (2.7)$$

В окрестности точки  $\omega = 0$

$$\varphi_1(\omega) = b \left( 1 - \frac{2}{81}\omega^4 - \frac{4}{2187}\omega^6 + \frac{91}{229635}\omega^8 + \dots \right) \quad (2.8)$$

где  $b = 1,4174112$  (найдено численным интегрированием). На интервале  $0 \leq \omega \leq \pi$  функция  $\varphi_1(\omega)$  монотонно убывает от значения  $b$  до нуля,  $\varphi_1'(\omega)$  обращается в нуль на концах интервала и имеет один минимум. График функции  $\varphi_1(\omega)$  представлен на фиг. 2 кривой 1.

Таким образом,  $\psi^{01} = \theta^{-2/3} \sin^{2/3} \omega \varphi_1(\omega) = \mu^{-2/3} \varphi_1(\omega)$ , где  $\mu = (\sigma^2 + \theta^2)^{1/2}$ ,  $\sigma = \alpha(\tau - 1)$ . В афинно преобразованной плоскости годографа  $\sigma, \theta$  величины  $\mu, \omega$  служат полярными координатами, а все кривые  $\psi^{01} = \text{const}$  являются подобными. При приближении к особой точке по всем направлениям  $\omega = \text{const}$ , кроме  $\omega = \pi$ ,  $\psi^{01}$  стремится к бесконечности как  $\mu^{-2/3}$  (при  $\omega = \pi$   $\psi^{01} = 0$ ).

В результате подстановки  $\psi^{01}$  в уравнение (1.10) получается невязка порядка  $\theta^{-5/3}$ . Следующий за  $\psi^{01}$  член в разложении  $\psi^0(\theta, \omega)$  по  $\theta$  естественно искать в виде  $\psi^{02} = \theta^{1/3} f_2(\omega)$ , требуя, чтобы в результате подстановки суммы  $\psi^{01} + \psi^{02}$  в (1.10) получилась невязка порядка  $\theta^{-2/3}$ .

Потребовав, чтобы  $\psi_\theta^{02} = 0$  при  $\omega = 0$ ,  $\psi^{02} = 0$  при  $\omega = \pi$ , получим краевые условия для  $f_2(\omega)$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{-2/3} \left( \frac{1}{3} f_2 + \frac{1}{2} \sin 2\omega f_2' \right) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \pi} (\pi - \omega)^{1/3} f_2 = 0 \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, в частности, что  $f_2 = O(\omega^{-1/3})$ ,  $\psi^{02} = O(\zeta^{1/3})$  при  $\omega \rightarrow 0$ , поэтому  $\Omega(\psi^{02}) = O(\zeta^{4/3}) = O(\theta^{4/3})$ . При учете последнего соотношения из (1.12) найдем

$$\begin{aligned} Y(\psi^{01} + \psi^{02}) &= \theta^{-2/3} f_1(\omega) + \theta^{1/3} f_2(\omega) + \alpha \theta^{1/3} F_1(\omega) + O(\theta^{4/3}) \\ F_1(\omega) &= 3b(\text{ctg } \omega)^{1/3} + F_0(\omega), \quad \omega \in [0, \pi/2] \\ F_1(\omega) &= F_0(\omega), \quad \omega \in [\pi/2, \pi] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$F_0(\omega) = -(\operatorname{ctg}^2 \omega)^{1/6} \int_0^{\omega} (\operatorname{tg}^2 \omega)^{2/3} f_1'(\omega) d\omega, \quad \omega \in [0, \pi/2)$$

$$F_0(\omega) = (\operatorname{ctg}^2 \omega)^{1/6} \int_{\pi}^{\omega} (\operatorname{tg}^2 \omega)^{2/3} f_1'(\omega) d\omega, \quad \omega \in (\pi/2, \pi]$$

$$F_0(\pi/2) = -3f_1'(\pi/2)$$

Из (2.10) при учете (2.7), (2.8) получим разложения

$$F_1(\omega) = 3b\omega^{-1/3} \left( 1 - \frac{2}{9}\omega^2 - \frac{1}{135}\omega^4 + \dots \right) \quad (2.11)$$

$$F_1(\pi - t) = \frac{2}{3}t^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{45}t^4 + \dots \right)$$

Можно показать, что функция  $F_1(\omega)$  удовлетворяет уравнению

$$F_1'(\omega) + \frac{2}{3} \operatorname{csc} 2\omega F_1(\omega) = -\operatorname{tg} \omega f_1''(\omega) \quad (2.12)$$

является аналитической на интервале  $(0, \pi)$  и представима в окрестности точки  $\omega = \pi/2$  в виде

$$F_1\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sqrt{b} \left( \sqrt{2} - \frac{13}{6}t + \frac{49\sqrt{2}}{144}t^2 + \frac{59}{243}t^3 + \frac{12829\sqrt{2}}{124416}t^4 + \dots \right)$$

Значения  $F_1(\omega)$ ,  $F_1'(\omega)$  вне окрестности точки  $\omega = \pi/2$  могут быть найдены по формулам (2.10) или численным интегрированием (2.12) с использованием (2.11).

Положим в (1.10)  $\psi = \psi^{01} + \psi^{02}$  и перейдем к переменным  $\theta, \omega$ . Приравняв члены порядка  $\theta^{-5/3}$  в разложениях левой и правой частей (1.10) по степеням  $\theta$ , получим уравнение

$$Pf_2'' + Qf_2' + Rf_2 = S, \quad P = 4 \sin^2 \omega \left( 1 - \frac{5}{9} \sin^2 \omega \right) f_1^2 \quad (2.13)$$

$$Q = \frac{14}{3} \sin 2\omega \left( 1 - \frac{10}{21} \sin^2 \omega \right) f_1^2 - 12 \sin^2 \omega \left( 1 - \frac{25}{27} \sin^2 \omega \right) f_1 f_1' + 3 \sin^3 \omega \cos \omega f_1'^2$$

$$R = 8 \sin^2 \omega \left( 1 - \frac{2}{9} \sin^2 \omega \right) f_1 f_1'' - \frac{14}{3} \sin 2\omega \left( 1 + \frac{8}{21} \sin^2 \omega \right) f_1 f_1' + \frac{76}{9} f_1^2 -$$

$$- 3 \sin^2 \omega \left( 1 - \frac{62}{27} \sin^2 \omega \right) f_1'^2$$

$$S = \alpha F_1 \left[ -\frac{200}{27} f_1^2 + \frac{28}{9} \sin 2\omega \left( 1 + \frac{6}{7} \sin^2 \omega \right) f_1 f_1' + \frac{10}{3} \sin^2 \omega \cos 2\omega f_1'^2 - \right.$$

$$\left. - 8 \sin^2 \omega \left( 1 - \frac{1}{3} \sin^2 \omega \right) f_1 f_1'' \right] - \alpha F_1' \sin 2\omega \left[ \frac{4}{9} f_1^2 - \frac{2}{3} \sin 2\omega f_1 f_1' + \sin^2 \omega f_1'^2 \right] +$$

$$+ a_1 \left[ \sin \omega \cos^3 \omega (6 f_1 f_1'^2 - 4 f_1^2 f_1'') - \frac{64}{27} \operatorname{ctg} \omega f_1^3 - \frac{4}{3} \cos^2 \omega (1 - 6 \sin^2 \omega) f_1^2 f_1' - \right.$$

$$\left. - \sin^2 \omega \cos^4 \omega f_1'^3 \right] + (c_1 - b_1) \sin^4 \omega \cos^2 \omega f_1'^3 + \left( \frac{16}{9} c_1 - \frac{32}{9} b_1 \cos^2 \omega \right) \sin^2 \omega f_1'^2 f_1' +$$

$$+ \left( \frac{8}{3} c_1 - \frac{8}{9} b_1 \right) \sin^3 \omega \cos \omega f_1 f_1'^2 - \frac{16}{9} b_1 \sin^3 \omega \cos \omega f_1'^2 f_1''$$

$$a_1 = \frac{\lambda_a}{(1 - M_a^2)^{3/2}} \frac{d}{d\lambda} (1 - M^2) \Big|_{\lambda=\lambda_a}$$

$$b_1 = 2(1 - M_a^2)^{-1/2}, \quad c_1 = (1 + M_a^2)(1 - M_a^2)^{-1/2}$$

Используя (2.7), (2.8), (2.11), можно показать, что при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega = \pi - t, t \rightarrow 0$  имеют место разложения

$$\begin{aligned} P(\omega) &= b^2 \omega^{10/3} \left( 4 - \frac{40}{9} \omega^2 + \dots \right), & P(\pi - t) &= t^{22/3} \left( 4 - \frac{64}{9} t^2 + \dots \right) \\ Q(\omega) &= b^2 \omega^{7/3} \left( \frac{8}{3} - \frac{20}{27} \omega^2 + \dots \right), & Q(\pi - t) &= t^{19/3} \left( \frac{4}{3} - \frac{160}{27} t^2 + \dots \right) \\ R(\omega) &= b^2 \omega^{4/3} \left( -\frac{8}{9} + \frac{428}{81} \omega^2 + \dots \right), & R(\pi - t) &= t^{16/3} \left( -\frac{20}{9} + \frac{1856}{81} t^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$S(\omega) = b^3 \omega^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \omega^{2n-2}, \quad S(\pi - t) = t^9 \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{2n-2}$$

$$\sigma_1 = \frac{8}{3} (a_1 + c_1 - b_1 - 2\alpha), \quad v_1 = \frac{128}{3} \left( b_1 - c_1 - a_1 - \frac{1}{2} \alpha \right)$$

Из (2.9), (2.13) следует, что для функции  $\varphi_2(\omega) = \sin^{1/3} \omega f_2(\omega)$  имеет место следующая краевая задача:

$$P_1 \varphi_2'' + Q_1 \varphi_2' + R_1 \varphi_2 = S_1, \quad P_1 = P, \quad Q_1 = -\frac{2}{3} \operatorname{ctg} \omega P + Q \quad (2.15)$$

$$R_1 = \left( \frac{4}{9} \operatorname{ctg}^2 \omega + \frac{1}{3} \right) P - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \omega Q + R, \quad S_1 = \sin^{1/3} \omega S$$

$$\varphi_2'(0) = 0, \quad \varphi_2(\pi) = 0 \quad (2.16)$$

Подставив (2.14) в (2.15), можно убедиться, что  $\varphi_2(\omega)$  допускает разложения вида

$$\varphi_2(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \omega^{n-1}, \quad \varphi_2(\pi - t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n t^{2n} \quad (2.17)$$

причем имеют место соотношения

$$p_{2j} = \alpha_j p_{2j}, \quad p_{2j+1} = \beta_j + \gamma_j p_1, \quad q_j = \mu_j + \kappa_j q_1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

в которых коэффициенты  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \mu_j, \kappa_j$  выражаются через коэффициенты разложений (2.14). В частности,

$$p_3 = \frac{1}{8} b \sigma_1 - \frac{1}{2} p_1, \quad q_2 = \frac{1}{32} v_1 - \frac{5}{6} q_1 \quad (2.18)$$

Для разложений (2.17) второе из условий (2.16) выполняется, а первое эквивалентно условию  $p_2 = 0$ . Поэтому проблема сводится к отысканию такого  $q_1$ , для которого при численном интегрировании (2.15) от точки  $\omega = \pi - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) с использованием (2.17), (2.18) для определения значений  $\varphi_2(\pi - \varepsilon)$ ,  $\varphi_2'(\pi - \varepsilon)$ , получается функция  $\varphi_2(\omega)$ , удовлетворяющая условию  $p_2 = \varphi_2'(0) = 0$ .

Правая часть уравнения (2.15) представима в виде

$$S_1 = a_1 S_{1a} + k_1 S_{1k} + m_1 S_{1m} + n_1 S_{1n} \quad (2.19)$$

где  $k_1 = (1 - M_a^2)^{-3/2}$ ,  $m_1 = k_1 M_a^2$ ,  $n_1 = k_1 M_a^4$ , а  $S_{1a}$ ,  $S_{1k}$ ,  $S_{1m}$ ,  $S_{1n}$  — известные функции  $\omega$ , не зависящие от  $a_1$ ,  $M_a$ . Поэтому удобно использовать представление

$$\varphi_2 = a_1 \varphi_{2a} + k_1 \varphi_{2k} + m_1 \varphi_{2m} + n_1 \varphi_{2n} \quad (2.20)$$

и определять каждую из зависящих только от  $\omega$  функций  $\varphi_{2a}$ ,  $\varphi_{2k}$ ,  $\varphi_{2m}$ ,  $\varphi_{2n}$  из решения соответствующей краевой задачи, получаемой при подстановке (2.19), (2.20) в (2.15), (2.16).

Анализ показывает, что при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega = \pi - t$ ,  $t \rightarrow 0$  имеют место разложения

$$\begin{aligned} \varphi_{2a}(\omega) &= b \left( -1 + \frac{5}{6} \omega^2 + \dots \right), & \varphi_{2a}(\pi - t) &= 2t^2 - 3t^4 + \dots \\ \varphi_{2k}(\omega) &= b(-2 + O(\omega^3) \dots), & \varphi_{2k}(\pi - t) &= -3t^2 + \frac{19}{6} t^4 + \dots \\ \varphi_{2m}(\omega) &= b \left( \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \omega^2 + \dots \right), & \varphi_{2m}(\pi - t) &= \frac{22}{3} t^2 - \frac{67}{9} t^4 + \dots \\ \varphi_{2n}(\omega) &= b \left( -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \omega^2 + \dots \right), & \varphi_{2n}(\pi - t) &= -\frac{13}{3} t^2 + \frac{77}{18} t^4 + \dots \end{aligned}$$

Зависимости  $\varphi_{2a}$ ,  $\varphi_{2k}$ ,  $\varphi_{2m}$ ,  $\varphi_{2n}$  от  $\omega$  показаны на фиг. 2 кривыми 2–5 соответственно.

Пусть  $\varphi_2(\omega)$  — решение задачи (2.15), (2.16), тогда  $\psi^{02} = \theta^{1/3} \sin^{-1/3} \omega \varphi_2(\omega) = \mu^{1/3} \varphi_2(\omega)$ . Таким образом, в плоскости  $\sigma$ ,  $\theta$  семейства  $\psi^{02} = c > 0$  и  $\psi^{02} = c < 0$  ( $c = \text{const}$ ) состоят из подобных кривых, а при приближении к особой точке по любому направлению  $\omega = \text{const}$   $\psi^{02}$  стремится к нулю, как  $\mu^{1/3}$ .

3. Будем считать, что функция  $\psi^0$  найдена с достаточно высокой точностью.

Функция  $\chi = \psi - \psi^0$  должна служить решением краевой задачи

$$L(\chi) = N(\psi^0 + \chi, Y(\psi^0 + \chi)) - \dot{L}(\psi^0), \quad (\tau, \theta) \in \Sigma_0 \quad (3.1)$$

$$\chi = -\psi^0 \text{ на } ABB_1CD, \quad \chi_\theta = 0 \text{ на } AD \quad (3.2)$$

Практический интерес представляют случаи, когда величина  $\lambda_c$  близка к  $\lambda_a$  (величина  $\tau_0$  близка к единице), и поэтому велики градиенты определяемых величин на отрезке  $AD$  и примыкающей к нему части области  $\Sigma_0$ . При численном решении задачи это приводит к необходимости преобразования независимых переменных.

Будем пользоваться следующими преобразованиями, переводящими  $\Sigma_0$  в  $\Sigma_1 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1\}$ . При

$$\tau_0 < 2, \quad \frac{1}{2} \theta_0 \{ \alpha \tau_0 (\tau_0 - 1) [\ln 2 - \ln(\tau_0 - 1)] \}^{-1} \geq 1 \quad (3.3)$$

положим ([13], § 5.6)

$$\xi = f(\tau) = F(\beta_1, \tau / \tau_0), \quad \eta = g(\theta) = 1 - F(\beta_2, 1 - \theta / \theta_0)$$

$$F(x, y) = \ln[(x + y) / (x - y)] \{ \ln[(x + 1) / (x - 1)] \}^{-1}$$

причем параметры  $\beta_1, \beta_2$  ( $1 < \beta_1, \beta_2 < \infty$ ) определим из условий

$$f(1) = 0,5, \quad f'(1) = \alpha g'(0) \quad (3.4)$$

(условия (3.3) гарантируют однозначную разрешимость уравнений (3.4) относительно  $\beta_1, \beta_2$ ). При выполнении только первого из неравенств (3.3) положим  $\xi = f(\tau)$ ,  $f(1) = 0,5$ ,  $\eta = \theta / \theta_0$ . При  $\tau_0 \geq 2$  пусть  $\xi = \tau / \tau_0$ ,  $\eta = \theta / \theta_0$ .

Уравнение (3.1) записывается в форме

$$\Gamma(\chi) = N(\psi^0 + \chi, Y(\psi^0 + \chi)) - L(\psi^0) \quad (3.5)$$

$$\Gamma(\chi) = A\chi_{\eta\eta} + B\chi_{\xi\xi} + C\chi_{\xi} + D\chi_{\eta}$$

$$A = (1 - M^2)\eta_{\theta}^2, \quad B = \tau^2\xi_{\tau}^2, \quad D = (1 - M^2)\eta_{\theta\theta}, \quad C = \tau^2\xi_{\tau\tau} + (1 + M^2)\tau\xi_{\tau}$$

В плоскости  $\xi, \eta$  введем равномерную прямоугольную сетку с шагами  $\Delta\xi$  по  $\xi$  и  $\Delta\eta$  по  $\eta$  и с узлами в точках  $(\xi_i, \eta_j)$ , где  $\xi_i = i\Delta\xi, \eta_j = j\Delta\eta, i = 0, 1, \dots, I, j = 0, 1, \dots, J, \Delta\xi I = \Delta\eta J = 1$ . Пусть  $\xi_a$  — значение  $\xi$ , отвечающее  $\tau = 1, m$  — индекс, для которого  $\xi_{m-1} \leq \xi_a, \xi_m > \xi_a$ . Величины, вычисленные в точке  $(\xi_i, \eta_j)$ , будем отмечать индексами  $i, j$ , а на прямой  $\xi = \xi_i$  — индексом  $i$ .

Определение  $\chi$  сводится к решению итерационной последовательности линейных разностных краевых задач;  $\chi^{(n+1)}$  ( $(n+1)$ -е приближение искомой функции) находится по схеме

$$\chi^{(n+1)} = (1 - w)\chi^{(n)} + w\chi^{(n+1/2)}, \quad 0 < w \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

причем за  $\chi^{(n+1/2)}$  принимается решение разностной задачи

$$\Lambda(\chi)_{i,j} = T_{i,j}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1$$

$$\Lambda(\chi)_{i,j} = A_{i,j}(\chi_{i,j+1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}) / \Delta\eta^2 + D_{i,j}(\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}) / 2\Delta\eta +$$

$$+ B_i(\chi_{i+1,j} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i-1,j}) / \Delta\xi^2 + C_i(\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}) / 2\Delta\xi$$

$$T^{(n)} = N(\psi^0 + \chi^{(n)}, Y^{(n)}) - L(\psi^0) \quad (3.6)$$

$$\Lambda(\chi)_{i,0} = U_{i,0}^{(n)}, \quad \chi_{i,-1} = \chi_{i,1}, \quad i = m, m+1, \dots, I-1$$

$$U^{(n)} = \tau^2(\psi_{\tau}^0 + \chi_{\tau}^{(n)})^2 / Y^{(n)} - L(\psi^0)$$

$$\chi_{0,j} = -\psi_{0,j}^0, \quad \chi_{I,j} = -\psi_{I,j}^0, \quad j = 0, 1, \dots, J$$

$$\chi_{i,J} = -\psi_{i,J}^0, \quad i = 0, 1, \dots, I; \quad \chi_{i,0} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

Для реализации разностной схемы (3.6) используется метод последовательной верхней релаксации. Частные производные от  $\chi^{(n)}$ , входящие в выражения  $T^{(n)}, U^{(n)}$ , вычисляются на основе сплайн-аппроксимации сеточных значений  $\chi^{(n)}$ .

В процессе итераций, как правило, вне окрестности особой точки возникают области отрицательных значений величин  $\psi^{(n)} = \psi^0 + \chi^{(n)}, Y(\psi^{(n)}), 2Y(\psi^{(n)}) + \psi_{\theta}^{(n)} \sin \theta$  которые затем уменьшаются в размерах и исчезают. Чтобы выражение  $2Y(\psi^{(n)}) + \psi_{\theta}^{(n)} \sin \theta$  не обратилось в нуль (а  $T^{(n)}, U^{(n)}$  — в бесконечность) и итерационный процесс не разошелся, используется следующий прием. Если на  $\Sigma_1 = \{(\xi_i, \eta_j) \in \Sigma_1\}$

$\min[Y(\psi^{(n)}) + 0,5\psi_{\theta}^{(n)} \sin \theta] = -m^{(n)} < 0$ , то полагаем  $Y^{(n)} = Y(\psi^{(n)}) + 3m^{(n)}\{1 - \exp[\delta_1(\xi - \xi_a)^2 + \delta_2\eta^2]\}$ , где  $\delta_1, \delta_2 \in [-20, -5]$ , в противном случае  $Y^{(n)} = Y(\psi^{(n)})$ .

Функция  $\psi^{01} + \psi^{02}$  порождает обширную область отрицательных значений  $Y(\psi^{01} + \psi^{02})$ . Учитывая это, удобно положить  $\psi^0 = \psi^{01} + \psi^{02} \exp[\delta_3(\tau - 1)^2 + \delta_4\theta^2]$ , где  $\delta_3, \delta_4 \in [-20, -10]$ . Построенная указанным способом функция  $\psi^0$  в окрестности особой точки сохраняет все необходимые свойства, присущие сумме  $\psi^{01} + \psi^{02}$ , и в то же время такова, что  $Y(\psi^0) > 0$  в  $\Sigma_0$ .

Применение формулы (1.12) — не единственно возможный способ определения  $Y(\psi^{(n)})$ . Более того, этот способ имеет тот недостаток, что максимальные погреш-

ности, возникающие при определении  $\chi^{(n)}$  в окрестности особой точки, распространяются в результате интегрирования вверх и вправо от этой окрестности. Поэтому формула (1.2) используется для определения  $Y(\psi^{(n)})$  только в начале итерационного процесса. Позже  $Y(\psi^{(n)})$  определяется с помощью поочередного интегрирования соотношений (1.8) по таким траекториям, которые обходят окрестность особой точки или только заканчиваются в ней. При этом используется сплайн-аппроксимация частных производных от  $\psi^{(n)}$ , входящих в выражения (1.8).

Можно убедиться, что условие  $G_\theta = H_\tau$ , которое следует из (1.8), эквивалентно уравнению (1.10). При выполнении названного условия значение  $u$ , найденное в произвольной точке области  $\Sigma_0$  интегрированием выражения  $du = Gd\tau + Hd\theta$ , не зависит от пути интегрирования. Это соображение можно использовать для контроля точности получаемого решения.

Предложенный метод расчета может быть использован для исследования течений сжимаемых жидкостей и газов с различными зависимостями  $M(\lambda)$ ,  $\nu(\lambda)$ . Опыт авторов свидетельствует о том, что для зависимостей  $M(\lambda)$ ,  $\nu(\lambda)$ , имеющих место для совершенного газа, существует достаточно широкий диапазон определяющих параметров, для которого описанный выше процесс последовательных приближений устойчиво сходится.

Определив одновременно  $\psi(\tau, \theta)$ ,  $r(\tau, \theta)$  описанным методом, не представляет труда найти с использованием (1.7) все необходимые характеристики течения.

4. Известно [14], что для многих жидкостей связь между давлением  $p$  и плотностью  $\rho$  в изэнтропическом процессе выражается формулой

$$\frac{p+B}{p_s+B} = \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^k \quad (4.1)$$

где  $p_s$ ,  $\rho_s$ ,  $B$ ,  $k$  – некоторые постоянные, причем для воды  $k = 7,15$  [15]. Из уравнения Бернулли и равенства (4.1) при принятых допущениях получаются соотношения

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \lambda^2 (1 - m\lambda^2)^{-1}, \quad \rho = \rho_0 (1 - m\lambda^2)^{1/(k-1)} \quad (4.2)$$

$$p = p_0 + \frac{k+1}{2k} \rho_0 a_*^2 [(1 - m\lambda^2)^{k/(k-1)} - 1], \quad m = \frac{k-1}{k+1} \quad (4.3)$$

которые и используются ниже ( $a_*$  – критическая скорость,  $p_0$  – значение  $p$  в точке торможения).

Пусть  $p_a$ ,  $\rho_a$ ,  $V_a$  – давление, плотность и скорость набегающего потока,  $p_c$  – давление в каверне,  $X$  – сопротивление кавитатора,  $R_0$  – радиус кавитатора (значение  $r$  в точке  $C$ ), причем  $R_0 = 1$ . Для числа кавитации  $Q = 2(p_a - p_c)/(\rho_a V_a^2)$  и коэффициента сопротивления  $C_x = 2X/(\rho_a V_a^2 R_0^2)$  при помощи (4.2), (4.3) получим выражения

$$Q = \frac{k+1}{k\lambda_a^2} (1 - m\lambda_a^2)^{1/(1-k)} [(1 - m\lambda_a^2)^{k/(k-1)} - (1 - m\lambda_c^2)^{k/(k-1)}] \quad (4.4)$$

$$C_x = \frac{2(1 - m\lambda_a^2)^{1/(1-k)} \tau_0}{r^2(\tau_0, \theta_0)} \int_0^{\tau_0} r^2(\tau, \theta_0) (1 - m\lambda_a^2 \tau^2)^{1/(k-1)} \tau d\tau \quad (4.5)$$

При  $\lambda_a, \lambda_c \rightarrow 0$  из (4.4) в пределе получается равенство  $Q = \tau_0^2 - 1$ . При  $\theta_0 = \pi$  имеем  $r(\tau, \theta_0) = r(\tau_0, \theta_0)$ , поэтому из (4.5) в этом случае следует

$$C_x = \frac{k+1}{k\lambda_a^2} (1 - m\lambda_a^2)^{1/(1-k)} [1 - (1 - m\lambda_c^2)^{k/(k-1)}] \quad (\theta_0 = \pi) \quad (4.6)$$

Таблица 1

$Q$	$R_2$	$R_2$ [4]	$L_2$	$L_2$ [4]	$C_x$	$C_x$ [4]
0,2636	2,1184	2,115	10,043	10	1,0539	1,0513
0,1477	2,6773	2,678	20,121	20	0,9559	0,9516
0,1048	3,1045	3,109	30,105	30	0,9198	0,9150
0,0819	3,4607	3,471	40,176	40	0,9021	0,8955
0,0676	3,7693	3,788	50,257	50	0,8917	0,8833

При дополнительном условии  $\lambda_a, \lambda_c \rightarrow 0$  из (4.6) в пределе получается равенство  $C_x = \tau_2^0 = 1 + Q$ .

Будем рассматривать кавитатор, омываемая часть которого представляет собой конус с углом полураствора  $\theta_0$  из интервала  $[\pi/2, \pi]$  (диск или кавитатор с конической выемкой). Пусть  $E$  и  $F$  – точки на дуге  $CDG$  свободной поверхности, в которых  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = -\pi/2$  соответственно. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  – значения  $r$  в точках  $E$  и  $D$  ( $R_2$  – радиус каверны в плоскости симметрии);  $L_0, L_1, L_2$  – проекции векторов  $BH, CG$  и  $EF$  на ось  $x$  ( $L_2$  – длина каверны,  $L_1 = L_0 - 2R_0 \text{ctg } \theta_0$ );  $K_1$  – кривизна дуги  $CDG$  в точке  $D$ .

Расчет одного варианта по принятой модели предполагает задание величин  $k, \theta_0, Q, \lambda_c$ , однако для случая  $\lambda_c = 0$  (несжимаемая жидкость) решение не зависит от  $k$ . Более того, при  $\lambda_c = 0$  решение является общим для всех моделей жидкости.

В табл. 1 приводятся значения  $C_x, L_2, R_2$ , полученные для ряда значений  $Q$  при расчете кавитационного обтекания диска ( $\theta_0 = \pi/2$ ) несжимаемой жидкостью по изложенному выше методу на сетке  $I \times J = 50 \times 50$ , а также соответствующие значения из [4]. Сравнение показывает, что отличия составляют менее одного процента. Аналогичную оценку можно получить, сравнивая приводимые ниже данные со значениями  $C_x, L_2, R_2$ , найденными по аппроксимационным формулам Л.Г. Гузевского [3].

5. Выполнены расчеты обтекания несжимаемой жидкостью кавитаторов с углами полураствора конуса  $\theta_0 = \pi(6+n)/12$  ( $n = 0, 1, \dots, 6$ ) при  $Q = 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1$  на сетке  $I \times J = 50 \times 100$ . На основе полученных результатов построены аппроксимационные формулы для параметров  $C_x, K_1, R_1, R_2, L_1, L_2$  следующего вида:

$$\begin{aligned}
 C_x^0 &= a + b(1+Q)^{-1} + cQ, & d &= d_1 + d_2 \ln \omega_1 + d_3 \ln^2 \omega_1 \\
 K_1^0 &= aQ + bQ^2 + cQ^3, & d &= d_1 + d_2 \ln \omega_2 + d_3 \omega_2^2 \\
 R_1^0 &= 1 + a + bQ^{-1} \ln Q + cQ^{-1}, & d &= d_1 \omega_3 + d_2 \omega_3^2 + d_3 \omega_3^3 \\
 P^0 &= a + bQ^{-1} \ln Q + cQ^{-1}, & d &= d_1 + d_2 \ln \omega_2 + d_3 \omega_2^2, & P^0 &= R_2^0, L_1^0, L_2^0 \\
 \omega_1 &= \theta_0 + \frac{\pi}{12}, & \omega_2 &= \theta_0 + \frac{\pi}{2}, & \omega_3 &= \theta_0 - \frac{\pi}{2}; & d &= a, b, c
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

(верхним индексом "ноль" отмечаются значения параметров в случае  $\lambda_c = 0$ ).

Значения коэффициентов  $a_j, b_j, c_j$  для аппроксимационных формул (5.1) и значения  $\epsilon$  максимальных относительных погрешностей аппроксимации приводятся в табл. 2. Дифференциальная характеристика  $K_1$  вычисляется с меньшей точностью, чем остальные – интегральная и локальные характеристики, поэтому значение  $\epsilon$  для  $K_1$  существенно больше, чем для других параметров.

Из (5.1) получается следующее выражение для коэффициента сопротивления диска ( $\theta_0 = \pi/2$ ) в несжимаемой жидкости:

$$C_x^0 = 0,7208 + 0,1118(1+Q)^{-1} + 0,9296Q \quad (0,15 \leq Q \leq 1) \tag{5.2}$$

Таблица 2

	$d_j$	$j = 1$	2	3	$10^4 \times \epsilon$
$C_x^0$	$a_j$	0,08016	1,35824	-0,49618	5
	$b_j$	0,34607	-0,48921	0,16908	
	$c_j$	0,80092	0,26089	-0,07998	
$K_1^0$	$a_j$	0,04769	-0,01338	0,00018	137
	$b_j$	1,08518	-0,48366	0,01198	
	$c_j$	-0,38103	0,18322	-0,00483	
$R_1^0$	$a_j$	0,01638	0,01924	-0,01035	13
	$b_j$	0,00356	0,00025	-0,00058	
	$c_j$	0,00818	0,00063	-0,00142	
$R_2^0$	$a_j$	0,61572	0,37494	-0,00857	16
	$b_j$	-0,05025	0,14946	-0,00319	
	$c_j$	-0,05503	0,51617	-0,01131	
$L_1^0$	$a_j$	0,53405	-0,32871	0,00528	22
	$b_j$	-0,57861	-0,00703	-0,00194	
	$c_j$	-0,19199	2,18048	-0,05274	
$L_2^0$	$a_j$	0,61528	-0,46052	0,01232	20
	$b_j$	-0,57545	-0,01431	-0,00142	
	$c_j$	-0,18529	2,16486	-0,05160	

Таблица 3

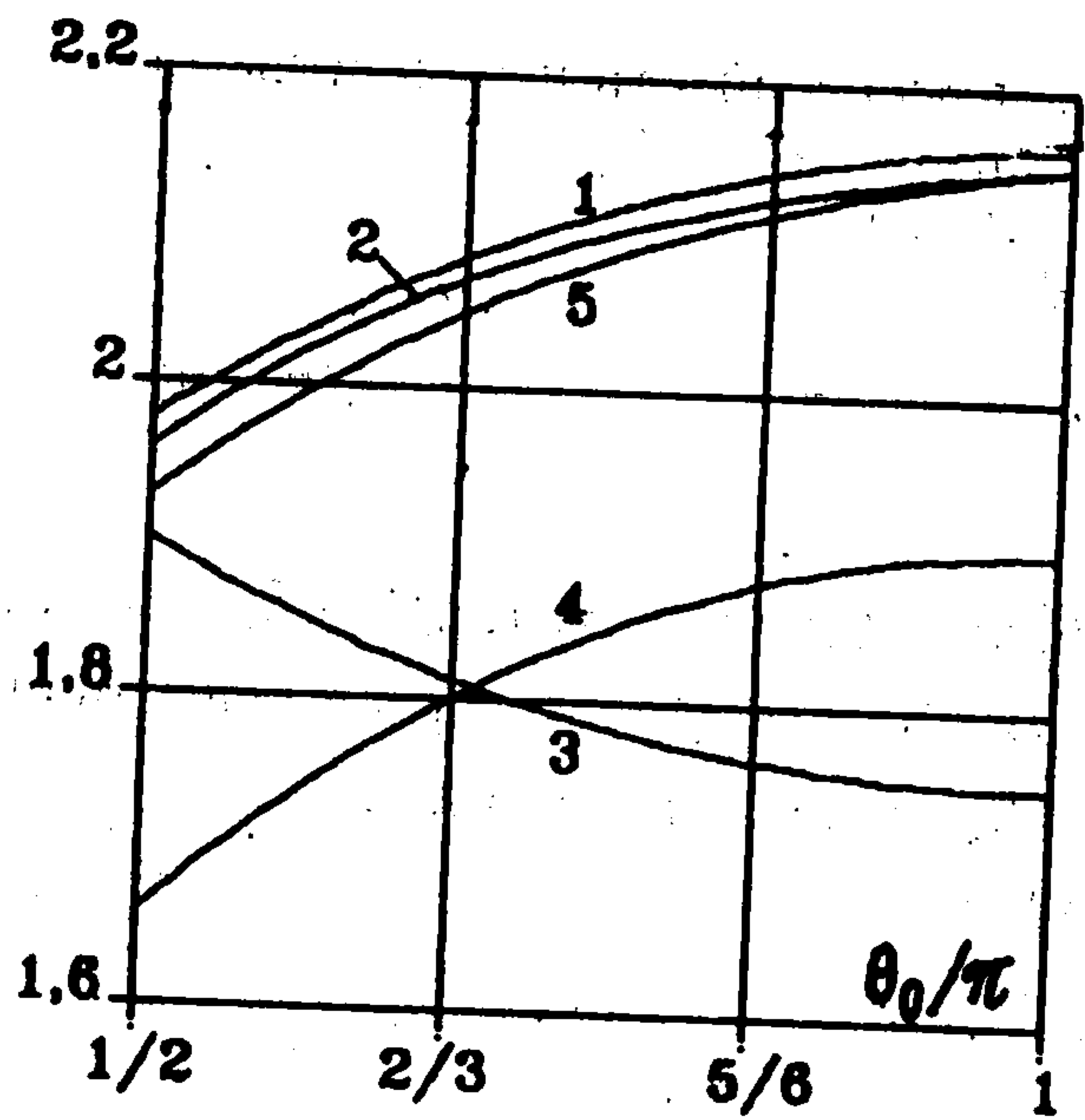
	$d_j$	$j = 1$	2	3	$10^4 \times \epsilon$
$\alpha$	$f_j$	-0,00599	0,03688	0,10945	9
	$g_j$	-0,01706	-0,02887	-0,08055	
	$h_j$	0,01808	0,00201	0,00992	
$\beta$	$f_j$	0,29589	-0,01529	-0,02098	23
	$g_j$	-0,57432	0,13310	0,30976	
	$h_j$	0,28978	-0,09167	-0,20660	
$\gamma$	$f_j$	-0,50861	0,05969	0,10518	127
	$g_j$	0,89609	-0,23137	-0,51375	
	$h_j$	-0,42967	0,14014	0,30676	
$\delta$	$f_j$	-0,00028	0,01514	0,04757	11
	$g_j$	-0,02871	-0,01376	-0,03329	
	$h_j$	0,01245	0,00858	0,00988	

Интересно сравнить (5.2) с аппроксимационными формулами

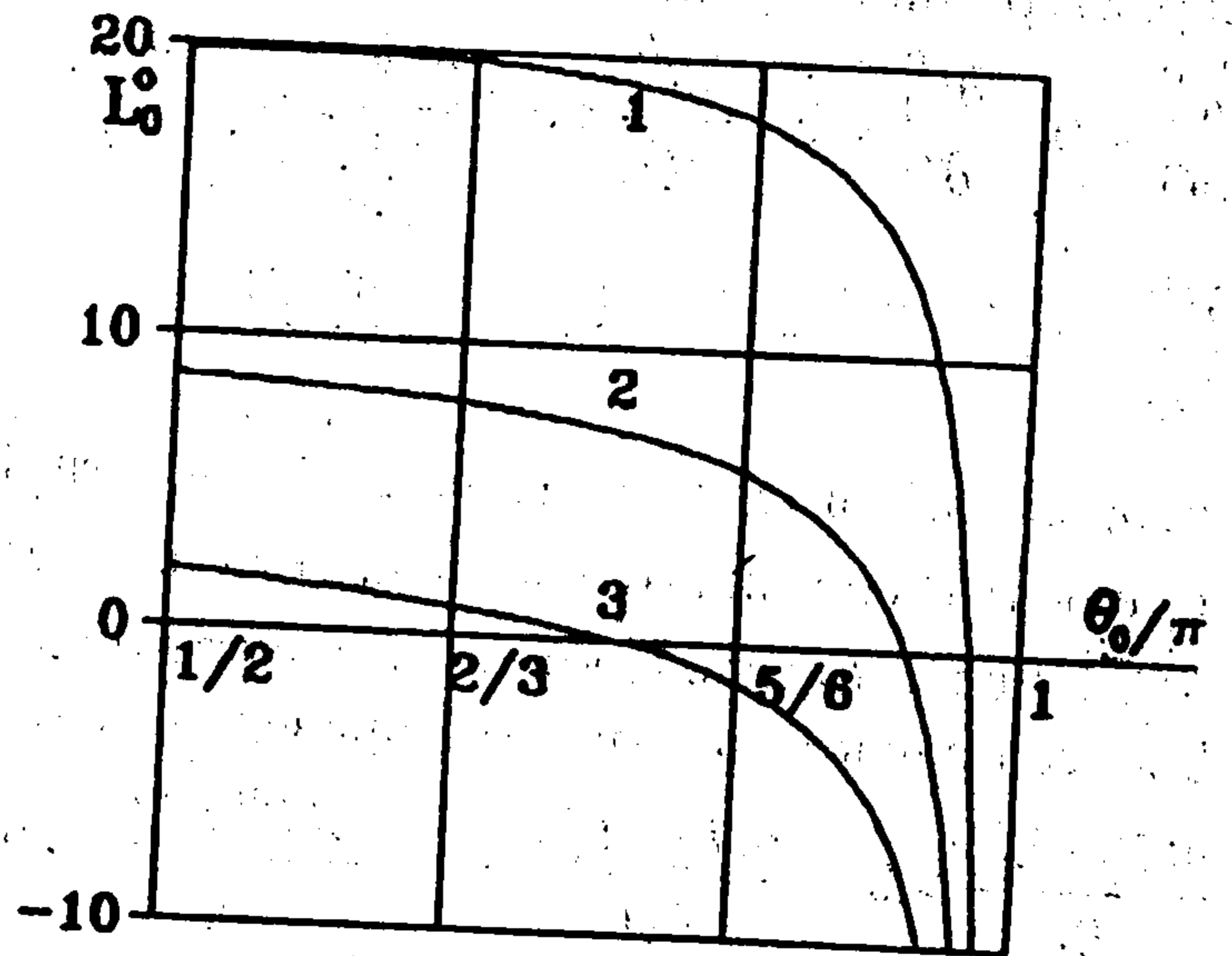
$$C_x^0 = (0,827 + 0,026Q)(1+Q) \quad (0,1 \leq Q \leq 0,6) \quad (5.3)$$

$$C_x^0 = 0,82825 + 0,86Q \quad (0 \leq Q \leq 0,25) \quad (5.4)$$

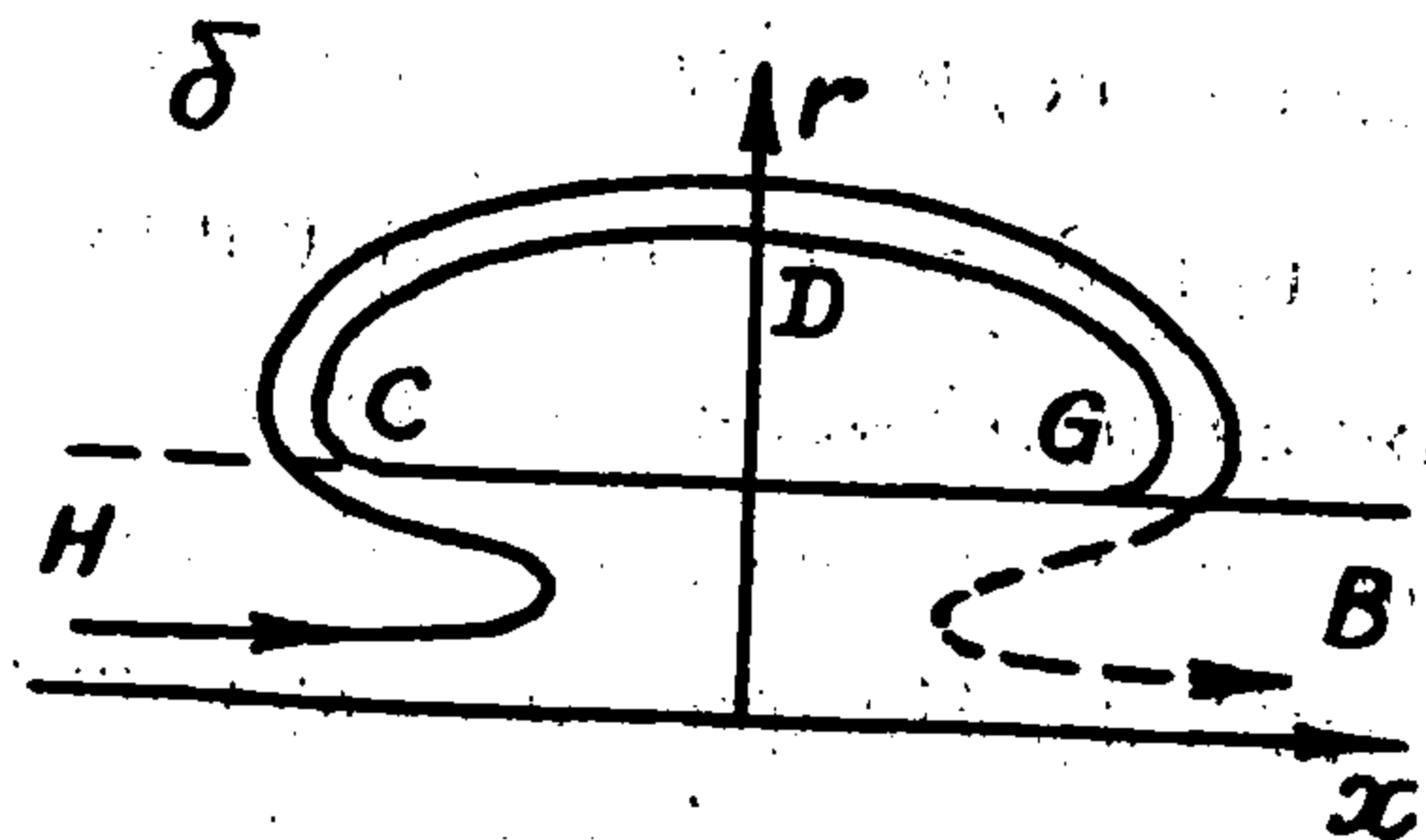
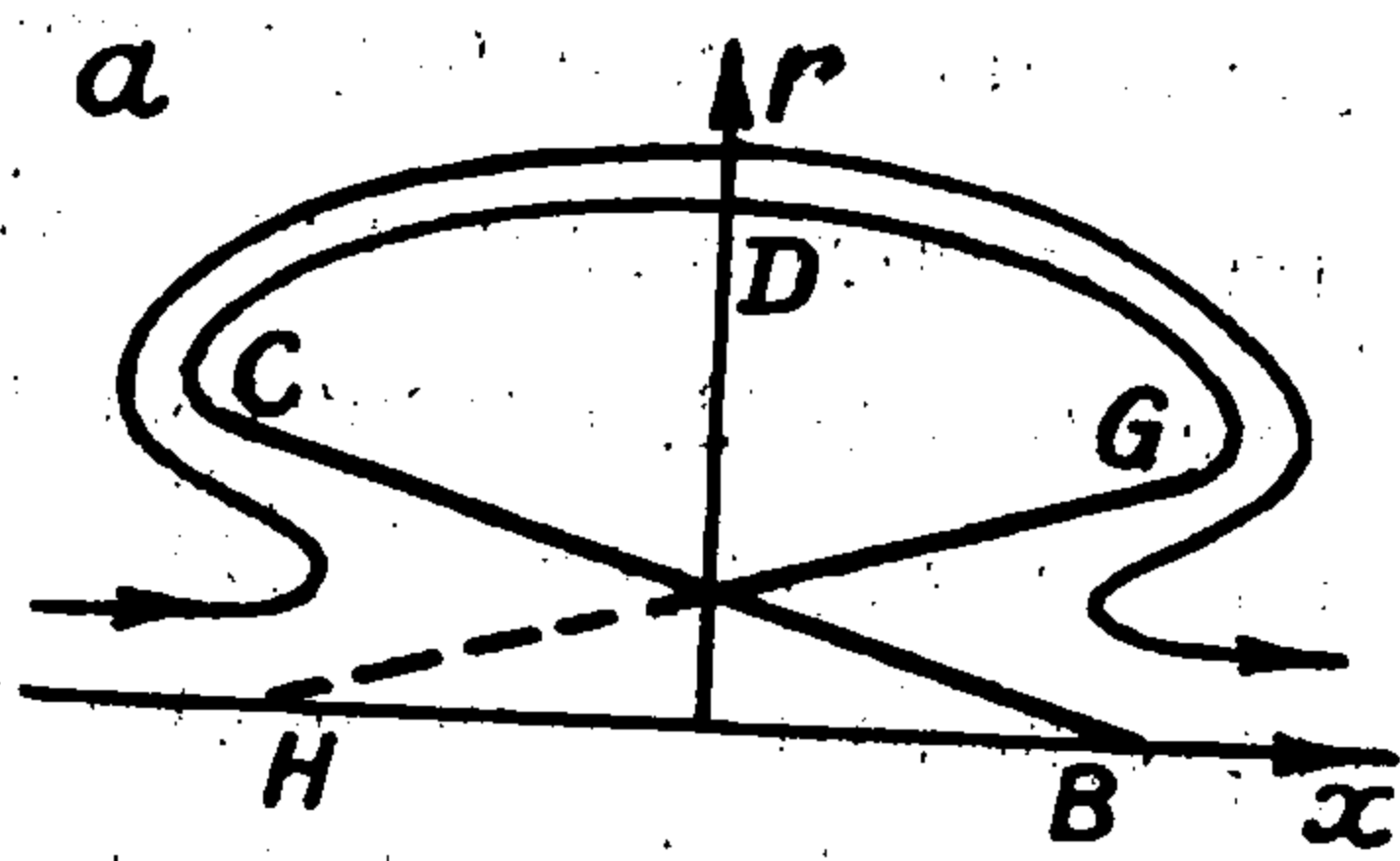
из которых первая, приведенная в ([16], с. 458), построена на основе графика из [17], а вторая получается при  $\theta_0 = \pi/2$  из аппроксимационной формулы Л.Г. Гузевского для конуса [3]. Различия в значениях  $C_x^0$ , вычисленных по формулам (5.2) и (5.3), на интервале  $0,1 \leq$



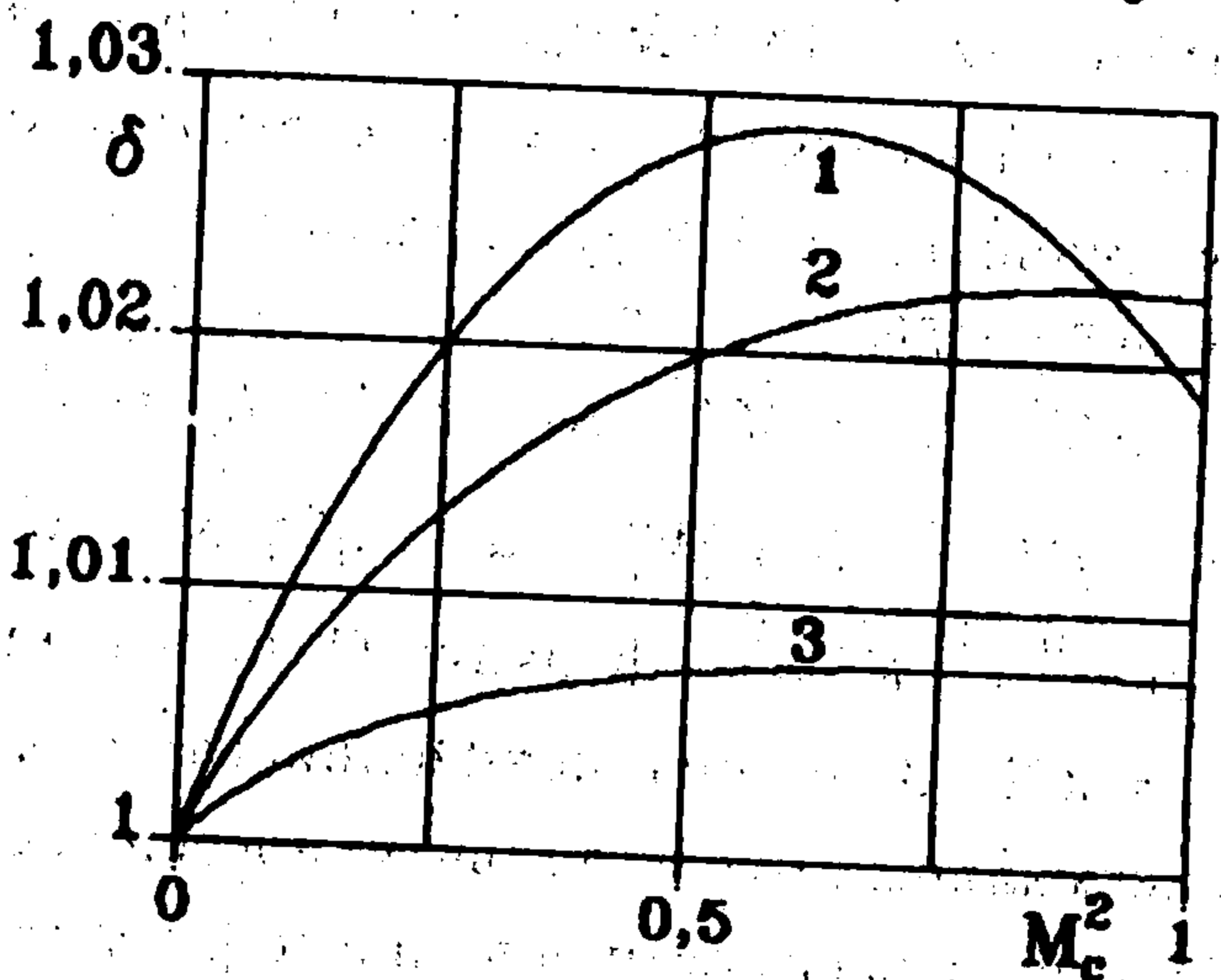
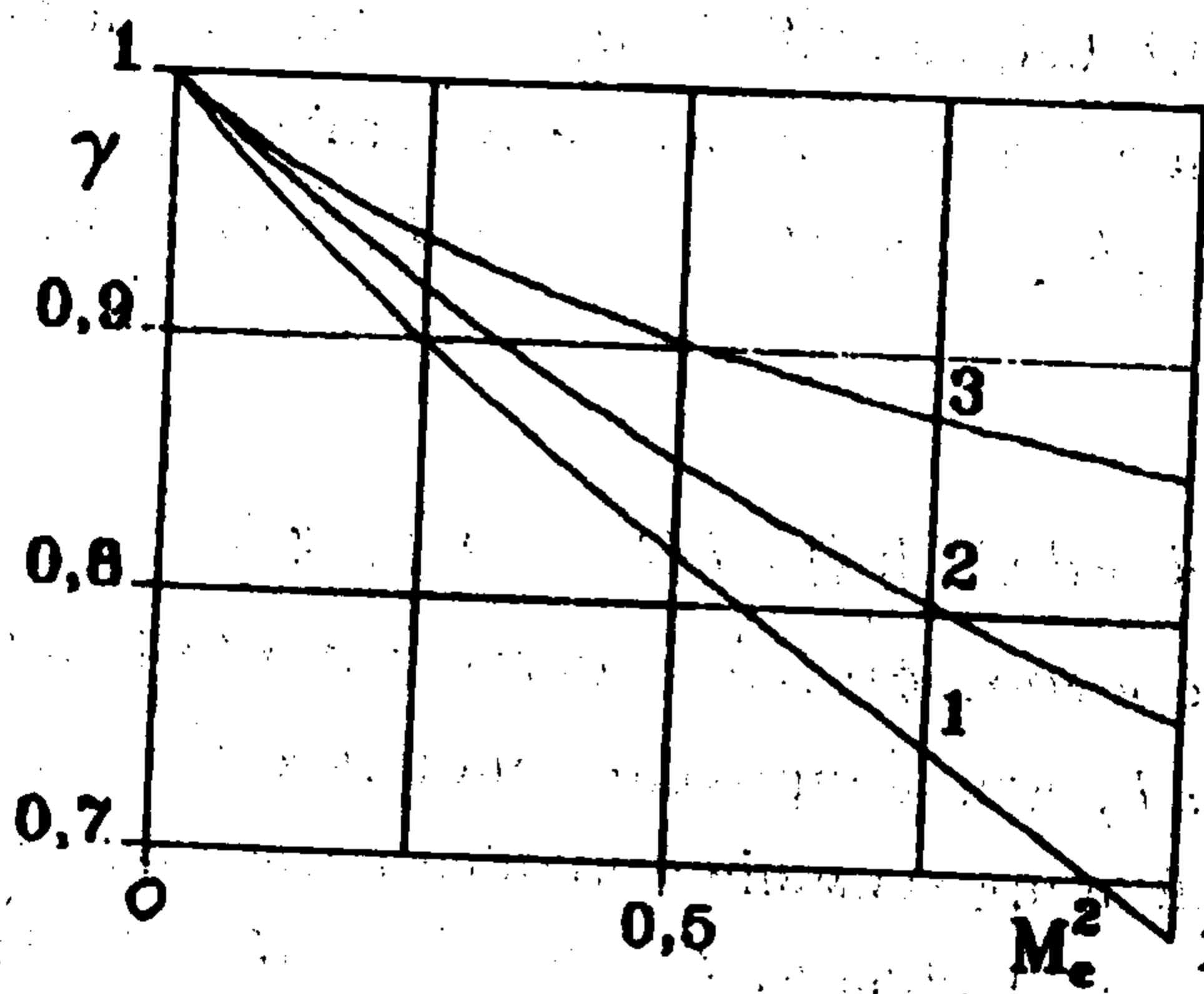
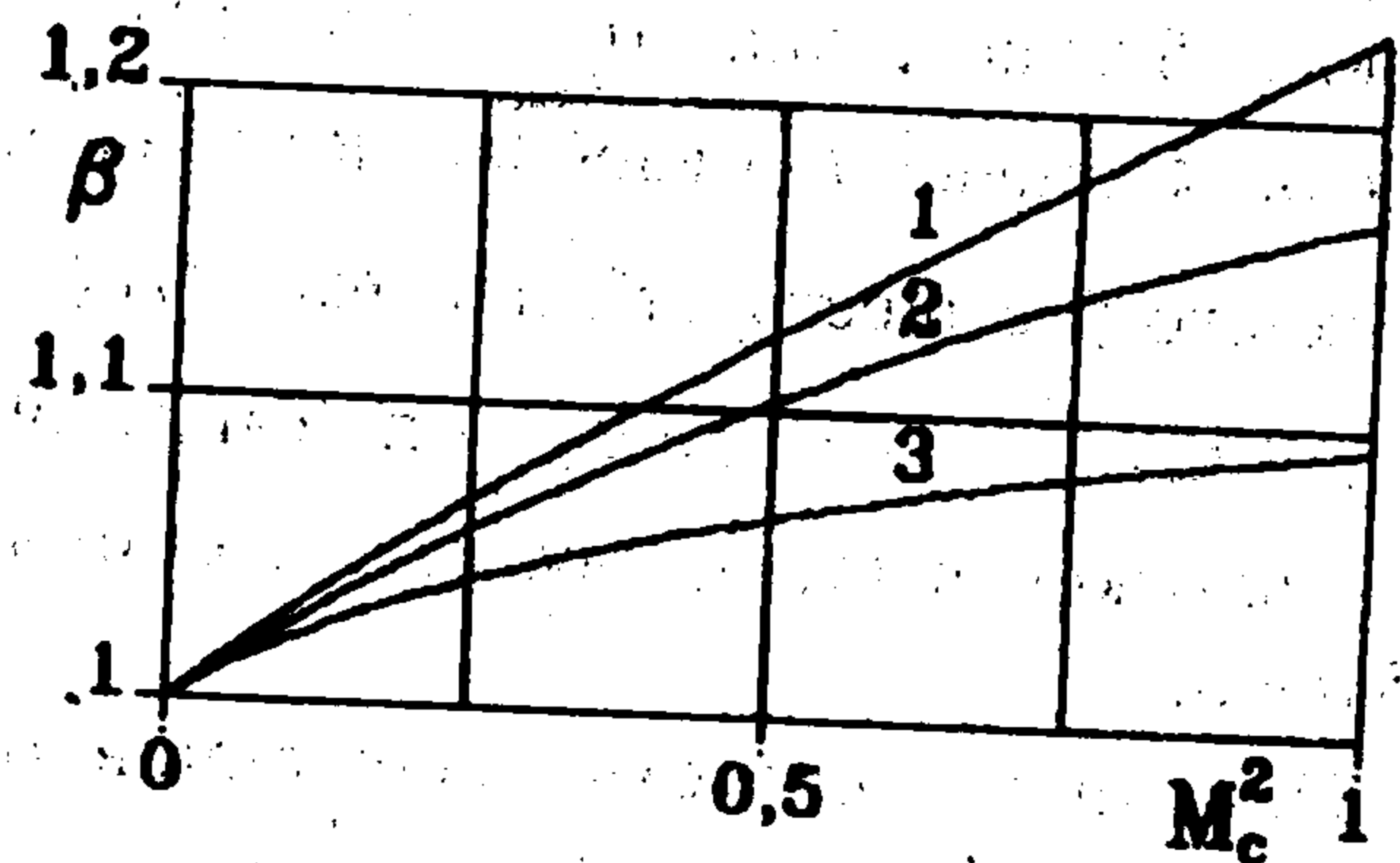
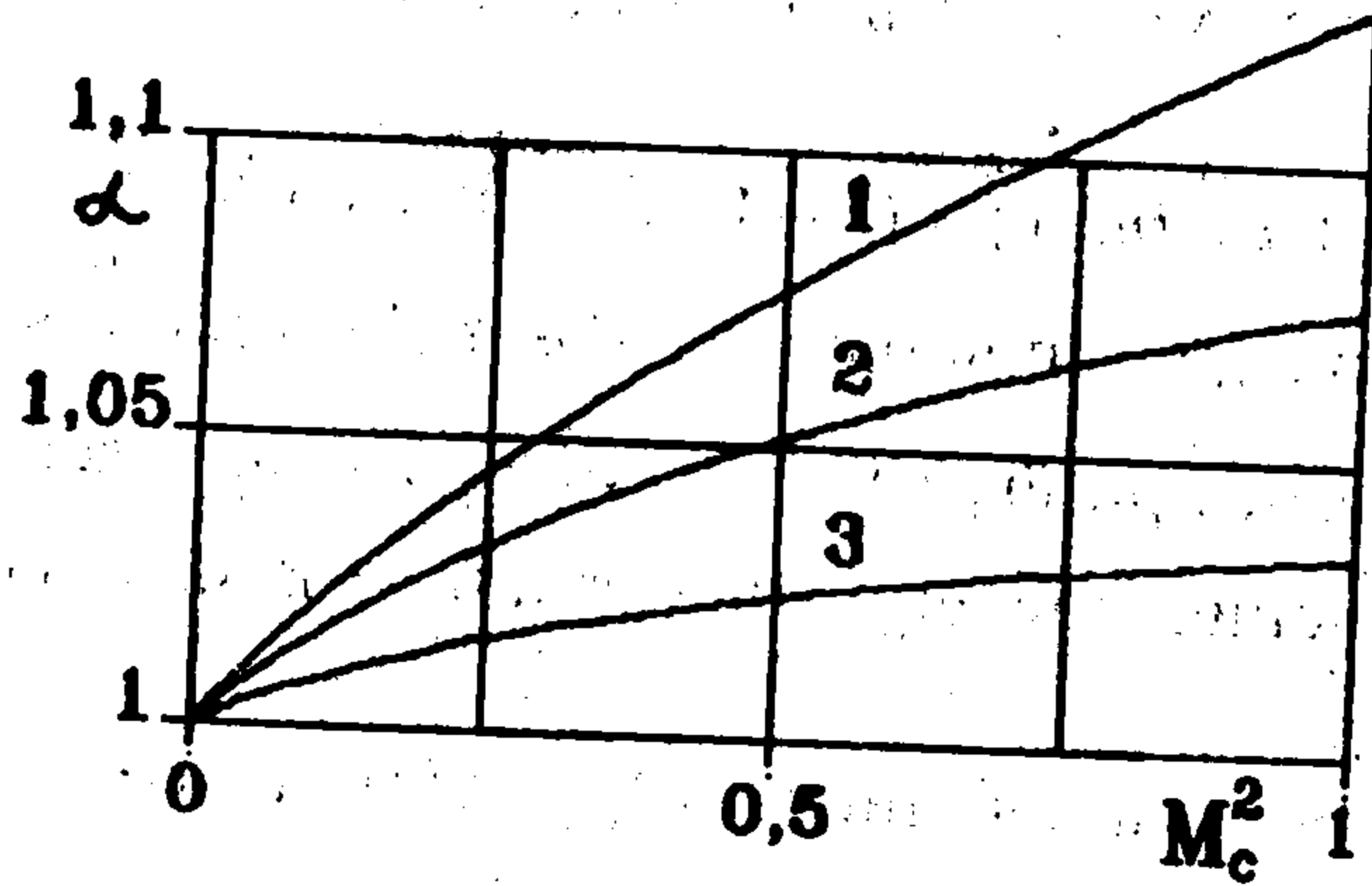
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$\leq Q \leq 1$  не превышают 0,3%, а на интервале  $0,25 \leq Q \leq 1 - 0,075\%$ . Различия в значениях  $C_x^0$ , вычисленных по формулам (5.2) и (5.4), на интервале  $0,1 \leq Q \leq 0,5$  не превышают 0,15%, а на интервале  $0,15 \leq Q \leq 0,4 - 0,06\%$ . Это свидетельствует о достаточно высокой надежности формул (5.2)–(5.4).

Характер аппроксимационных зависимостей (5.1) можно описать неравенствами

$$\frac{\partial L_1^0}{\partial Q} < 0, \quad \frac{\partial L_2^0}{\partial Q} < 0, \quad \frac{\partial R_2^0}{\partial Q} < 0, \quad \frac{\partial K_1^0}{\partial Q} > 0, \quad \frac{\partial C_x^0}{\partial Q} > 0, \quad \frac{\partial C_x^0}{\partial \theta_0} > 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial S^0}{\partial \theta_0} \geq 0, \quad S^0 = -K_1^0, R_1^0, R_2^0, L_1^0, L_2^0 \quad (5.6)$$

из которых (5.5) имеют место во всей расчетной области  $0,15 \leq Q \leq 1$ ,  $\pi/2 \leq \theta_0 \leq \pi$ , а (5.6) выполняются вне некоторой окрестности отрезка  $0,15 \leq Q \leq 1$ ,  $\theta_0 = \pi$ , где значения  $|\partial S^0 / \partial \theta_0|$  малы по сравнению с соответствующими значениями при  $\theta_0 = \pi/2$ .

Для всей расчетной области справедливы также неравенства

$$\frac{\partial(L_2^0 / L_1^0)}{\partial \theta_0} > 0, \quad \frac{\partial(L_2^0 / L_1^0)}{\partial Q} > 0, \quad \frac{\partial(R_2^0 / L_2^0)}{\partial Q} > 0$$

Величины  $R_2^0 / L_2^0$  и  $C_{x1}^0 = C_x^0 / (R_2^0)^2$  ( $C_{x1}$  – коэффициент сопротивления, определенный по площади миделя каверны) слабо зависят от  $\theta_0$ , своих максимальных значений величина  $R_2^0 / L_2^0$  достигает при  $\theta_0 = \pi/2$ . Неожиданным является то обстоятельство, что величина  $R_1^0$ , характеризующая положение точек  $E$  и  $F$ , в которых  $\theta = \pm\pi/2$ , принимает максимальные значения не на границе расчетной области (при  $Q = 0,15$ ), а при  $Q \approx 0,3$  для всех значений  $\theta_0$  из интервала  $(\pi/2, \pi]$ . На фиг. 3 показана зависимость некоторых из параметров от  $\theta_0$  при  $\lambda_c = 0$ ,  $Q = 0,15$ . Кривые 1–4 соответствуют величинам  $0,1 \times L_2^0$ ,  $C_x^0 + 1$ ,  $100 \times K_1^0$ ,  $R_2^0 - 1$ . Кривая 5 изображает зависимость  $C_x^0 + 1$  от  $\theta_0$ , полученную в предположении о том, что распределение давления вдоль образующей конуса можно найти из решения соответствующей плоской задачи, как это сделано в [18, 19].

На фиг. 4 кривые 1–3 изображают зависимость  $L_0^0(\theta_0)$  при  $Q = 0,15$ ;  $0,3$ ;  $1$  соответственно. Для каждого  $Q$  существует такое  $\omega_0 = \omega_0(Q)$ , что  $L_0^0 = 0$  при  $\theta_0 = \omega_0$  ( $d\omega_0/dQ < 0$ ),  $L_0^0 < 0$  при  $\omega_0 < \theta_0 \leq \pi$ ,  $L_0^0 \rightarrow -\infty$  при  $\theta_0 \rightarrow \pi$ . Таким образом, при  $\omega_0 < \theta_0 \leq \pi$  область, занятая течением в плоскости  $(x, r)$ , двулистка. Схема течения при  $\omega_0 < \theta_0 < \pi$  и  $\theta_0 = \pi$  показана на фиг. 5,а и 5,б.

6. Выполнены расчеты кавитационного обтекания диска ( $\theta_0 = \pi/2$ ) потоком воды ( $k = 7,15$ ) при  $Q = 0,15$ ;  $0,2$ ;  $0,3$ ;  $0,4$ ;  $0,5$ ;  $1$  и  $M_c^2 = 0,2$ ;  $0,4$ ;  $0,6$ ;  $0,8$ ;  $1$  ( $M_c$  – значение числа Маха при  $\lambda = \lambda_c$ ) на сетке  $I \times J = 50 \times 50$ . На основе полученных результатов построены аппроксимационные формулы для параметров  $C_x$ ,  $K_1$ ,  $L_2$ ,  $R_2$  ( $L_0 = L_1 = L_2$ ,  $R_1 = 1$  при  $\theta_0 = \pi/2$ ) следующего вида:

$$C_x = \alpha C_x^0, \quad L_2 = \beta L_2^0, \quad K_1 = \gamma K_1^0, \quad R_2 = \delta R_2^0 \quad (6.1)$$

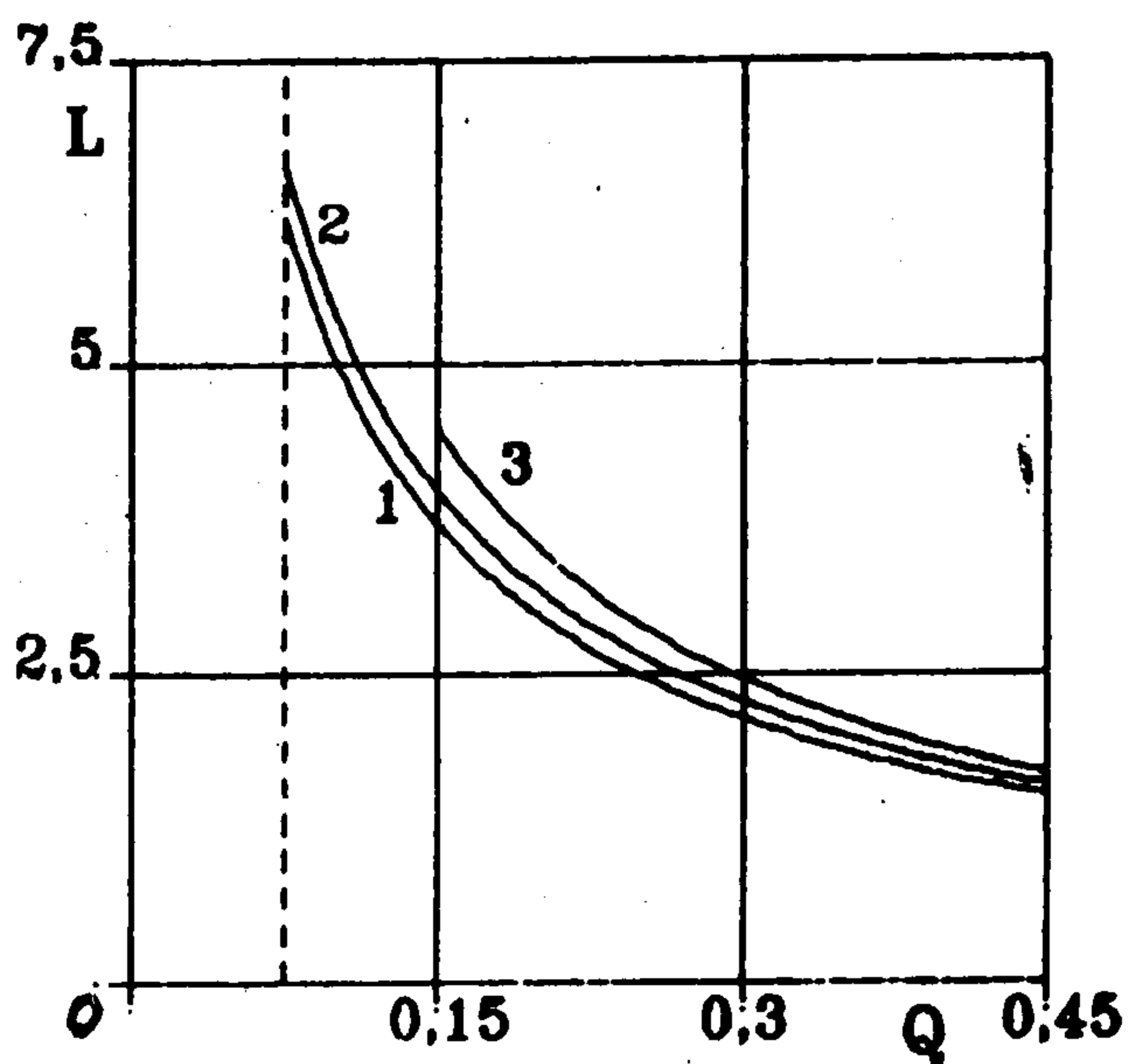
$$\mu = 1 + fM_c^2 + gM_c^3 + hM_c^4, \quad \mu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \quad d = d_1 + d_2 Q^{-1} \ln Q + d_3 Q^{-1}, \quad d = f, g, h$$

Здесь  $C_x^0$ ,  $L_2^0$ ,  $K_1^0$ ,  $R_2^0$  – функции  $Q$ , полученные в соответствии с формулами (5.1) и табл. 2 при  $\theta_0 = \pi/2$ . Значения коэффициентов  $f_j$ ,  $g_j$ ,  $h_j$  для аппроксимационных формул (6.1) и  $\epsilon$  максимальных относительных погрешностей аппроксимации приводятся в табл. 3.

Характер зависимости величин  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  от  $Q$  и  $M_c$  в области  $Q \in [0,15; 1]$ ,  $M_c \in [0, 1]$  можно описать неравенствами

$$\frac{\partial \alpha}{\partial M_c} > 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Q} < 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial M_c} > 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial Q} < 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial M_c} < 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial Q} > 0$$

Таким образом, с увеличением  $M_c$  при фиксированном значении  $Q \in [0,15; 1]$  величины  $C_x$  и  $L_2$  возрастают, а  $K_1$  убывает, причем изменение параметров тем существеннее, чем меньше  $Q$ .



Фиг. 7

На фиг. 6 показаны зависимости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  от  $M_c^2$  при  $Q = 0,15; 0,35; 1$  (кривые 1–3 соответственно). Зависимость  $\delta(M_c, Q)$  является довольно сложной. С уменьшением  $Q$  значение  $M_c$ , при котором  $\delta(M_c, Q)$  достигает своего максимального значения  $\delta_m$ , уменьшается, а само  $\delta_m$  растет. С уменьшением  $Q$  величина  $\delta(1, Q)$  растет при  $Q \in [q, 1]$ , где  $q \approx 0,235$ , и падает при  $Q \in [0,15; q]$ . Максимальное изменение параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (максимальное изменение величин  $C_x, L_2, K_1, R_2$  за счет сжимаемости воды для диска) в области  $Q \in [0,15; 1], M_c \in [0,1]$  составляет соответственно 12,7; 22,9; 32,2; 2,9%.

Положив  $L = L_2/(2R_2), L^0 = L_2^0/(2R_2^0), \sigma = \beta/\delta$ , по аналогии с (6.1) запишем равенство  $L = \sigma L^0$  ( $L$  – удлинение каверны,  $\sigma = \sigma(M_c, Q)$ ). Из аппроксимационных соотношений (6.1) следует, что в области  $Q \in [0,15; 1], M_c \in [0, 1]$  имеют место неравенства  $\partial\sigma/\partial M_c > 0, \partial\sigma/\partial Q < 0$ . Согласно последнему из неравенств, влияние сжимаемости на удлинение каверны возрастает с уменьшением  $Q$ . Между тем, анализ решения задачи в линеаризованной постановке приводит к противоположному утверждению [9, 10]. Кажущееся противоречие объясняется различием областей применимости результатов: результаты, полученные в [9, 10] с использованием предположений газодинамики тонкого тела, справедливы при малых числах  $Q$  (чем меньше  $Q$ , тем они точнее) и при числах  $M_c$ , достаточно удаленных от единицы.

На фиг. 7 показана зависимость удлинения  $L$  каверны за диском от числа  $Q$  для значений  $M_c = 0; 0,6$  и  $1$  (кривые 1–3 соответственно). Для построения кривых 1 и 2 на интервале  $0,075 \leq Q \leq 0,15$ , левая граница которого отмечена штриховой прямой, использованы результаты решения четырех дополнительных вариантов задачи, соответствующих значениям  $Q = 0,075; 0,1$  и  $M_c = 0; 0,6$  (получить решение для тех же значений  $Q$  при  $M_c = 1$  не удастся). С уменьшением  $Q$  на интервале  $0,075 \leq Q \leq 0,1$  отношение ординат кривых 2 и 1, равное  $\sigma(0,6; Q)$ , приближается к единице. Это подтверждает непротиворечивость результатов линейной и нелинейной теорий. Вместе с тем нет никаких оснований ожидать, что отношение ординат кривых 1 и 3 при их продолжении в область малых значений  $Q$  будет стремиться к единице при  $Q \rightarrow 0$ .

7. Выполнены расчеты еще для 36 вариантов задания определяющих параметров, соответствующих значениям  $k = 7,15; Q = 0,15; 0,2; 0,4; 1; M_c^2 = 0,5; 0,75; 1; \theta_0 = 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$ . Установлено, что при вычислении параметров  $L_1, L_2, K_1, R_2$  по приближенным формулам

$$L_1 = \beta L_1^0, \quad L_2 = \beta L_2^0, \quad K_1 = \gamma K_1^0, \quad R_2 = \delta R_2^0 \quad (7.1)$$

где  $L_1^0, L_2^0, K_1^0, R_2^0$  – функции  $Q$  и  $\theta_0$ , определенные формулами (5.1) и табл. 2, а  $\beta, \gamma, \delta$  – функции  $Q$  и  $M_c$ , определенные формулами (6.1) и табл. 3, получаемая погрешность не превышает 2% для  $K_1$  и 1,5% для  $L_1, L_2, R_2$ . Таким образом, формулы (7.1) пригодны для использования в области  $Q \in [0,15; 1], M_c \in [0, 1], \theta_0 \in [\pi/2, \pi]$ .

Для вычисления  $C_x$  в том же диапазоне параметров выгоднее пользоваться не формулой вида (7.1), а приближенным соотношением  $C_x = C_x' + 4(C_x'' - C_x')(1 - \theta_0/\pi)^2$ , где  $C_x'$  – точное значение  $C_x$  при  $\theta_0 = \pi$  (см. (4.6)), а  $C_x''$  – значение  $C_x$  при  $\theta_0 = \pi/2$ , вычисленное по первой из формул (6.1). Получаемая при этом погрешность не превышает 0,5%.

Для вычисления значений  $R_1$  при  $M_c \neq 0$  не удастся предложить удобной приближенной формулы. Однако можно констатировать, что с увеличением  $M_c$  от нуля до единицы величина  $R_1$  убывает, причем не более чем на 1%.

Из определения числа кавитации  $Q$  следует, что в случае паровой кавитации имеет место

$$M_a^2 = 2(p_a - p_v) / (\rho_a a_a^2 Q) \quad (7.2)$$

где  $p_v$  — давление насыщенных паров при заданной температуре,  $M_a$  и  $a_a$  — значения числа  $M$  и скорости звука  $a$  в невозмущенном потоке. Пользуясь известными значениями  $p_v$ ,  $\rho_a$ ,  $a_a$ , с помощью (7.2) легко убедиться, что в обычных условиях, когда давление набегающего потока  $p_a$  имеет порядок 1 атм, значению  $Q = 0,15$  соответствуют пренебрежимо малые значения  $M_a$  и  $M_c$ . С ростом  $p_a$  при фиксированном  $Q = 0,15$  значения  $M_a$  и  $M_c$  растут, но только при значении  $p_a$  порядка 900 атм  $M_c$  достигает единицы. С учетом сказанного приходится признать, что формулы (6.1), (7.1) имеют, скорее, теоретический, чем практический интерес.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за внимание к работе и советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01763).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fenain M., Dutouquet L., Solignac J.-L. Calcul des performance d'une tuyère propulsive convergente. Comparaison avec l'expérience // J. Rech. Aérospat. 1974. № 5. P. 261–276.
2. Гузевский Л.Г. Численный анализ кавитационных течений. Препринт № 40–79. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979. 36 с.
3. Гузевский Л.Г. Аппроксимационные зависимости для осесимметричных каверн за конусами // Гидродинамические течения и волновые процессы. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1983. С. 82–91.
4. Кожуро Л.А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Учен. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 5. С. 109–115.
5. Субханкулов Г.И., Хомяков А.Н. Применение метода граничных элементов к расчету осесимметричных каверн // Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1990. С. 124–132.
6. Григорян С.С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 951–953.
7. Якимов Ю.Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 3–10.
8. Якимов Ю.Л. Некоторые вопросы гидродинамики больших скоростей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 62–74.
9. Якимов Ю.Л. Тонкая кавитационная каверна в сжимаемой жидкости // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 66–73.
10. Васин А.Д. Тонкие осесимметричные каверны в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 174–177.
11. Васин А.Д. Тонкие осесимметричные каверны в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 179–181.
12. Гуревич М.И. Кривизна струи в точке схода ее с конической стенки // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1967. Вып. 4. С. 155–157.
13. Андресон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
14. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
15. Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967. 387 с.
16. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
17. Garabedian P.R. Calculation of Riabouchinsky cavity flows / Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. Тр. Междунар. симпоз. в Ленинграде, 1971. М.: Наука, 1973. С. 197–199.
18. Plesset M.S., Shaffer P.A. Cavity drag in two and three dimensions // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. № 10. P. 934–939.
19. Plesset M.S., Shaffer P.A. Drag in cavitating flow // Rev. Modern Phys. 1948. V. 20. № 1. P. 228–231.