

УДК 533.6

© 1994 г. А.Ф. Сидоров, О.Б. Хайруллина

ПРОЦЕССЫ БЕЗУДАРНОГО КОНИЧЕСКОГО СЖАТИЯ И РАЗЛЕТА ГАЗА

Строятся решения двумерных нестационарных автомодельных задач о неограниченном безударном сжатии и разлете в вакуум идеального газа, покоящегося в начальный момент времени внутри призм и конусообразных тел при постоянных плотности и давлении. Поля течений строятся частично при помощи классов точных решений нелинейного уравнения для потенциала скоростей, а частично путем численных расчетов, в частности, методом характеристик. Исследуются особенности постановок краевых задач для конических нестационарных течений. Строятся аналитически приближенные законы управления движением сжимающих поршней. Найдены степени кумуляции энергии, плотности и показано, что описанные неоднородные процессы сжатия энергетически выгоднее, чем процесс сферического сжатия для получения локальных сверхвысоких плотностей вещества. Для задач об истечении в вакуум из конуса строятся фронты истечения с точками излома.

Ранее [1–3] были построены неоднородные процессы неограниченного безударного сжатия идеальных политропных газов, находящихся в начальный момент времени внутри призм, тетраэдров и конусообразных тел специальных форм. Было показано, что в этих процессах образуются высокоскоростные струи газа с неограниченно растущей плотностью. Затраты энергии при этом для достижения очень больших локальных плотностей вещества существенно меньше, чем в одномерных сферических процессах безударного сжатия, используемых, в частности, для инициирования лазерного термоядерного синтеза [4, 5].

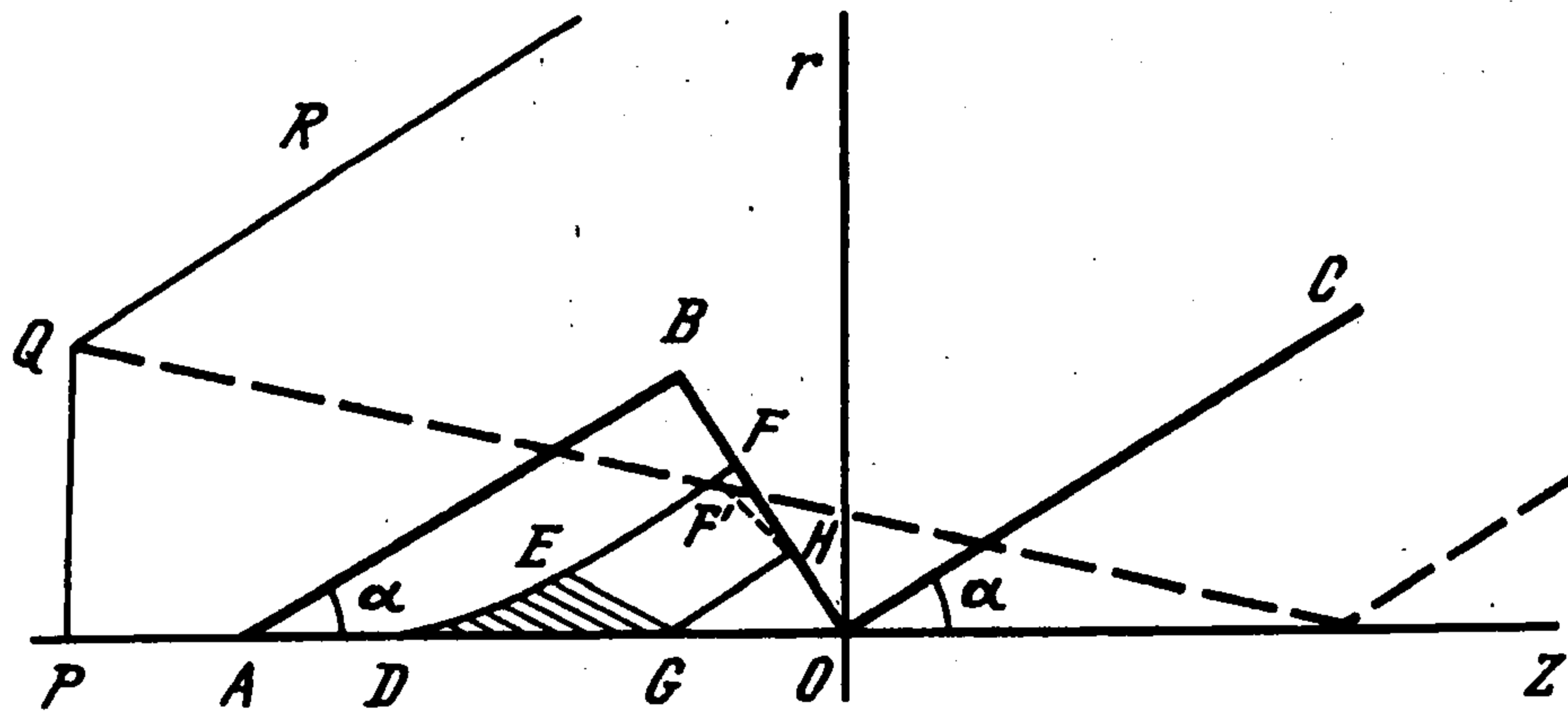
Рассмотрения [1–3] велись на базе точных двумерных и трехмерных автомодельных решений уравнений газовой динамики, которые были построены лишь для специальным образом согласованных между собой показателя адиабаты γ и начальных геометрических параметров сжимаемых объемов газа (согласованный случай). Именно для таких решений, принадлежащих классам движений с однородной деформацией [6, 7], были построены законы управления движением подвижных сжимающих поршней, приводящие к неограниченному сжатию.

В то же время оценки предельных степеней кумуляции плотности и энергии [2], а также оценки параметров соответствующих экономичных процессов сжатия требуют рассмотрения более общих классов решений. Подробному анализу одного из таких классов точных решений [2], уже обладающему в общем случае свойством движений с однородной деформацией, и посвящена предлагаемая работа. Кроме задач неограниченного плоского и осесимметричного безударного сжатия, при помощи этого же класса течений решается задача об истечении газа в вакуум из неограниченного конуса.

1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ политропный газ с уравнением состояния

$$p = a^2 \rho^\gamma$$

(p – давление, ρ – плотность, $a^2 = \text{const}$) и $p = p_0 = \text{const}$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $c_0 = 1$ (c_0 – начальная скорость звука $\gamma p_0 = \rho_0$) покоится внутри призмы с сечением AOB (плоский случай) или тела вращения с образующей ABO (z – ось вращения, $|OB| = 1$ (фиг. 1)).



Фиг. 1

Линия ABO соответствует начальному положению подвижного поршня S_t , закон движения которого должен быть определен так, чтобы в процессе адиабатического сжатия с постоянной энтропией весь газ в момент времени $t = 1$ сфокусировался в точку O . Момент времени $t = 1$ соответствует времени прохождения отрезка OB звуковым возмущением (в момент $t < 1$ линия GH), отрывающимся в начальный момент времени от линии AB — части поршня S_0 . При этом прямая линия OB может служить как неподвижной непроницаемой стенкой во все время процесса сжатия, так и соответствовать начальному положению подвижной части поршня S_t , таким образом, что в момент t ей отвечает линия $DEF'H$, а для неподвижной стенки OB — линия DEF .

В безударных течениях газа могут присутствовать лишь слабые разрывы. Поэтому возмущенное движение будет потенциальным. Уравнение для потенциала скоростей $\Phi(t, r, z)$ имеет вид

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_r\Phi_{rt} + 2\Phi_z\Phi_{zt} + 2\Phi_r\Phi_z\Phi_{rz} + \Phi_r^2\Phi_{rr} + \Phi_z^2\Phi_{zz} - \theta(\Phi_{rr} + \Phi_{zz} + Nr^{-1}\Phi_r) = 0$$

$$\theta = c^2 = (\gamma - 1)(K - \Phi_t - \frac{1}{2}\Phi_r^2 - \frac{1}{2}\Phi_z^2)$$

где c — скорость звука, $K = \text{const}$, $u_r = \Phi_r$, $u_z = \Phi_z$, u_r и u_z — компоненты вектора скорости, $N = 0$ соответствует плоскому случаю, $N = 1$ — осесимметричному.

Будем строить решения задач о сжатии в области $DGHFE$ в классе конических автомодельных течений газа с независимыми переменными

$$\xi = z/\tau, \quad \eta = r/\tau, \quad \tau = t - 1, \quad t \in [0, 1] \quad (1.1)$$

Полагая $\Phi = Kt - \tau\Psi(\xi, \eta)$, уравнение конических течений запишем в виде

$$(\Psi_\xi + \xi)^2\Psi_{\xi\xi} + 2(\Psi_\xi + \xi)(\Psi_\eta + \eta)\Psi_{\xi\eta} + (\Psi_\eta + \eta)^2\Psi_{\eta\eta} -$$

$$-(\gamma - 1)(\Psi - \xi\Psi_\xi - \eta\Psi_\eta - \frac{1}{2}\Psi_\xi^2 - \frac{1}{2}\Psi_\eta^2)(\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta} + N\eta^{-1}\Psi_\eta) = 0 \quad (1.2)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$\Gamma = \Psi + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

Из (1.2) для Γ получим уравнение

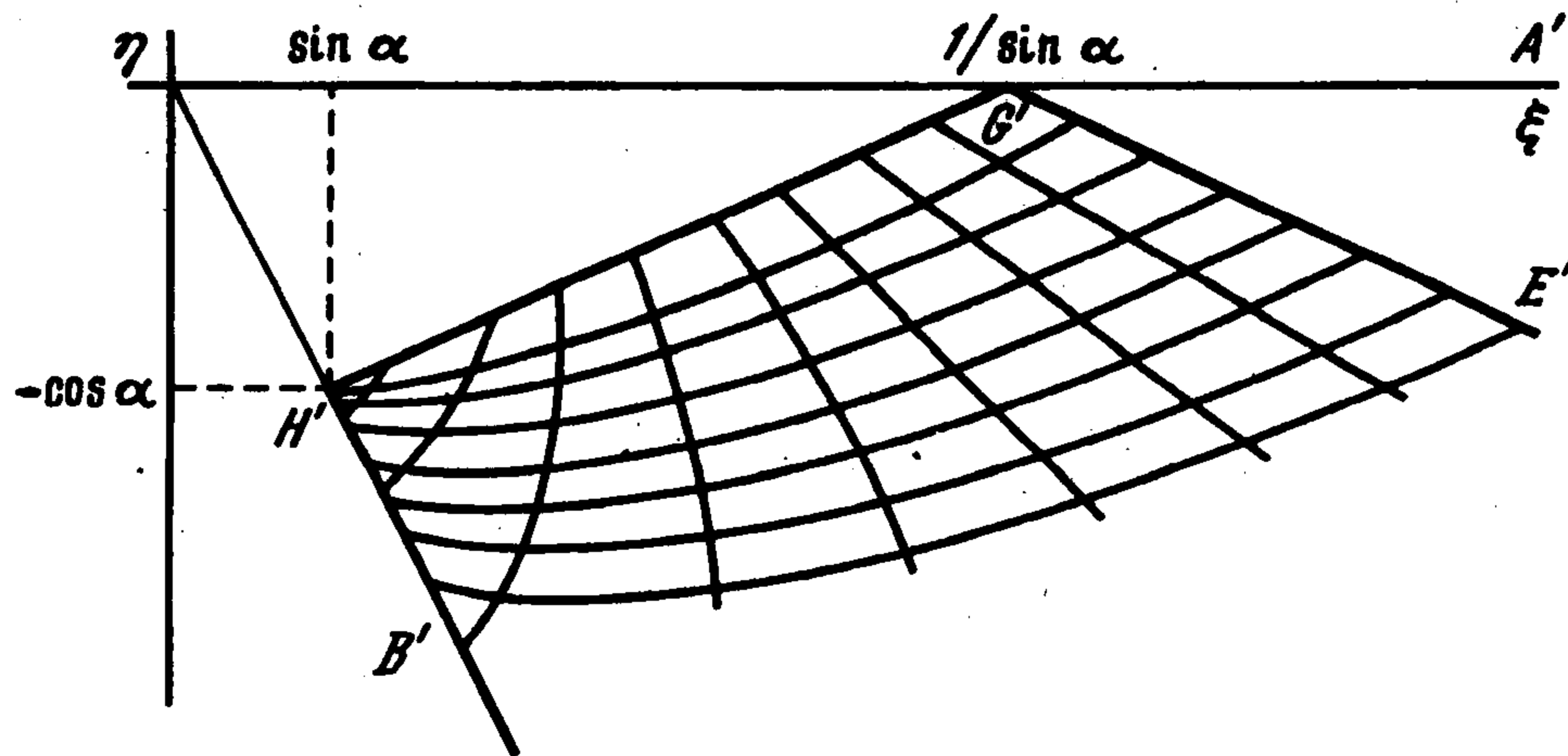
$$\Gamma_\xi^2(\Gamma_{\xi\xi} - 1) + 2\Gamma_\xi\Gamma_\eta\Gamma_{\xi\eta} + \Gamma_\eta^2(\Gamma_{\eta\eta} - 1) -$$

$$-(\gamma - 1)(\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma_\xi^2 - \frac{1}{2}\Gamma_\eta^2)(\Gamma_{\xi\xi} + \Gamma_{\eta\eta} - N - 2 + N\eta^{-1}\Gamma_\eta) = 0 \quad (1.3)$$

инвариантное по отношению к сдвигу по переменной ξ . Это будет использовано при конструировании решений.

Тип уравнения (1.3) определяется знаком дискриминанта D

$$D = \theta(\Gamma_\xi^2 + \Gamma_\eta^2 - \theta), \quad \theta = (\gamma - 1)(\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma_\xi^2 - \frac{1}{2}\Gamma_\eta^2) \geq 0$$



Фиг. 2

На слабом разрыве GH имеем

$$\Psi_{\xi} = \Psi_{\eta} = 0, \quad \theta = 1 \quad (1.4)$$

а в точке H имеем $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Поэтому для волн сжатия ($\theta \geq 1$) во всей рассматриваемой области кроме точки H будет $D > 0$, и уравнение (1.3) имеет гиперболический тип. В точке H имеем $D = 0$, и происходит вырождение уравнения.

Для случая неограниченного сжатия, когда OB – неподвижная стенка, в плоскости автономных переменных ξ, η области течения соответствует неограниченная область $B'H'G'A'$ (фиг. 2). Функция θ должна неограниченно расти при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. Кроме соотношений (1.4) функция Ψ должна удовлетворять условиям непротекания на подвижных границах и линии $\eta = 0$. Этих условий и условий (1.4) недостаточно, чтобы построить нетривиальные решения поставленной задачи о безударном сжатии газа и определить законы движения поверхностей, управляющих сжатием.

Ситуация нестандартна и трудна как для поисков путей аналитического построения решений, так и при конструировании численных методов расчета таких процессов сжатия даже при наличии мощных ЭВМ. Заметим, что уравнение конических нестационарных течений (1.2) при $N = 1$ имеет особенно сложную структуру, которая отличается от структуры уравнения для потенциала скоростей в случае трехмерных стационарных конических течений газа [8]. Хотя ряд особенностей уравнения являются общими (переменность типа в общем случае, сохранение параметров потоков вдоль лучей), постановки задач и свойства решений, как правило, совершенно различны.

Один из путей решения проблемы опирается [2] на аналитическое построение течения в области DEG , где образуется наиболее мощная кумулятивная струя, и расчет высокоточными разностными методами течения в остальных частях области возмущенного движения. Рассмотрим подробно одну из реализаций этого подхода.

После перехода в плоскости ξ, η к полярным координатам $\xi = \mu \cos \lambda - \xi_0, \eta = \mu \sin \lambda, \xi_0 = \text{const}$ уравнение (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\mu}^2 \Gamma_{\mu\mu} + 2\mu^{-2} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda} + \mu^{-4} \Gamma_{\lambda}^2 \Gamma_{\lambda\lambda} - \Gamma_{\mu}^2 - \mu^{-2} \Gamma_{\lambda}^2 - \mu^{-3} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\lambda}^2 - \\ & - (\gamma - 1) (\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^2 - \frac{1}{2} \mu^{-2} \Gamma_{\lambda}^2) \times \\ & \times [\Gamma_{\mu\mu} + \mu^{-2} \Gamma_{\lambda\lambda} + \mu^{-1} \Gamma_{\mu} - N - 2 + N(\mu^{-1} \Gamma_{\mu} + \mu^{-2} \Gamma_{\lambda} \text{ctg } \lambda)] = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Построим класс точных решений (1.5) в виде [2]

$$\Gamma = \mu^2 A(\lambda) \quad (1.6)$$

где $A(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$A'^2 A'' + 8A^3 + 6AA'^2 - 4A^2 - A'^2 - (\gamma - 1)(A - 2A^2 - \frac{1}{2}A'^2)[2(2 + N)A - 2 - N + A'' + NA' \operatorname{ctg} \lambda] = 0 \quad (1.7)$$

На оси $\eta = 0$ должно быть выполнено условие $\Psi_\eta = 0$, что приводит к соотношению

$$A'(0) = 0 \quad (1.8)$$

Задание второго начального условия при $\lambda = 0$, $A(0) = a$ в случае $0 < a < \frac{1}{2}$ позволяет найти закон движения точки A на управляющем сжатием поршне вдоль оси z . Действительно, из соотношения

$$\Gamma_\xi = \Gamma_\mu \cos \lambda - \mu^{-1} \sin \lambda \Gamma_\lambda$$

при $\lambda = 0$ получим $\Psi_\xi + \xi = 2(\xi + \xi_0) a$. Полагая на поршне в точке A $\Psi_\xi = -\Phi_z = -dz/d\tau$, для $z(\tau)$ будем иметь уравнение

$$dz/d\tau = (1 - 2a)z/\tau - 2\xi_0 a$$

откуда получаем

$$z = C(-\tau)^{1-2a} - \xi_0 \tau, \quad C = -(\sin \alpha)^{-1} \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что степень кумуляции скорости n_u при $\tau \rightarrow 0$ равна $2a$ ($|u| = O((-\tau)^{-n_u})$). Для скорости звука также степень кумуляции $n_c = 2a$. Величину ξ_0 найдем из условий, что в точке G' (фиг. 2) выполнены соотношения $c = 1$, $\Psi_\xi = \Psi_\eta = 0$.

Это приводит к представлениям

$$\xi_0 = (\gamma - 1)^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (1 - 2a)^{-\frac{1}{2}} - (\sin \alpha)^{-1}$$

Уравнение (1.7) запишем в виде

$$A'' = PQ^{-1} \quad (1.10)$$

$$P = (\gamma - 1)(A - 2A^2 - \frac{1}{2}A'^2)[2(2 + N)A - 2 - N + NA' \operatorname{ctg} \lambda] - 8A^3 - 6AA'^2 + 4A^2 + A'^2$$

$$\theta = A'^2 - (\gamma - 1)(A - 2A^2 - \frac{1}{2}A'^2)$$

Начальные условия в точке $\lambda = 0$ при $0 < a < \frac{1}{2}$ позволяют при $N = 0$ гарантировать существование решения поставленной задачи Коши по крайней мере в окрестности $\lambda = 0$. При $N = 1$ точка $\lambda = 0$ особая. Тем не менее, как будет показано далее, решение также можно построить.

Существенным для построения решений с неограниченной кумуляцией является вопрос о виде и поведении характеристик уравнения (1.2). Течение в целом будет конструироваться из решений с различной аналитической структурой в подобластях плоскости ξ, η , разделенных некоторыми характеристиками (линиями слабых разрывов решений уравнения (1.2)).

Уравнения характеристик (1.2) имеют вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-\Gamma_\xi \Gamma_\eta \pm \sqrt{\theta(\Gamma_\xi^2 + \Gamma_\eta^2 - \theta)}}{\theta - \Gamma_\xi^2}$$

Для класса решений (1.6) их можно преобразовать к виду

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = -\frac{\mu L(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \frac{d\eta}{d\lambda} = -\frac{\mu M_{\pm}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (1.11)$$

$$\Delta(\lambda) = L(\lambda)\sin\lambda - M_{\pm}(\lambda)\cos\lambda$$

$$L(\lambda) = (\gamma - 1)(A - 2A^2 - \frac{1}{2}A'^2) - (2A\cos\lambda - A'\sin\lambda)^2$$

$$M_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}(A'^2 - 4A^2)\sin 2\lambda - 2AA'\cos 2\lambda \pm$$

$$\pm\{(\gamma - 1)(A - 2A^2 - \frac{1}{2}A'^2)[2(\gamma + 1)A^2 + (\gamma - 1)(A'^2/2 - A)]\}^{\frac{1}{2}}$$

Из (1.11) для функции $\mu = \mu(\lambda)$ вдоль характеристик получим уравнения

$$\frac{d\ln|\mu|}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{L(\lambda)\cos\lambda + M_{\pm}(\lambda)\sin\lambda}{L(\lambda)\sin\lambda - M_{\pm}(\lambda)\cos\lambda} \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим вопрос о построении решений вида (1.6) в области *DEG* (фиг. 1), соответствующей сектору *A'E'G'* (фиг. 2). Были использованы [1, 2] точные решения уравнения (1.7) при специальном выборе a . Они имеют вид

$$A = \chi \frac{\gamma - 1}{2(\gamma + 1)} (1 + \cos 2\lambda), \quad \chi = \begin{cases} 1, & N = 0, & \gamma < 3 \\ 3/2, & N = 1, & \gamma < 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Плоское решение для $N = 0, \gamma < 3$ впервые было построено [9] и использовано для решения задачи об истечении газа в вакуум вдоль косо́й стенки.

При рассмотрении задач о сжатии будем считать, что $\lambda \leq 0, \mu \leq 0$, тогда $\xi \geq 0, \eta \leq 0$. Заметим, что продолженная четным образом функция $A(\lambda)$ также будет решением уравнения (1.7). Оказалось, что кривая (2.1) типа $N = 0, \gamma < 3$ проходит через особую точку уравнения (1.7) типа седла, в которой

$$A = \frac{\gamma - 1}{4}, \quad A' = \frac{\gamma - 1}{2} \sqrt{\frac{3 - \gamma}{\gamma + 1}}, \quad \lambda = \lambda_s^{(0)} = -\frac{1}{2} \arccos \frac{\gamma - 1}{2} \quad (2.2)$$

Кривая (2.1) при $N = 1, \gamma < 2$ проходит через две особые точки: $\lambda = 0$ ($A'(0) = 0$) и точку, в которой

$$A = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad A' = (\gamma - 1) \sqrt{\frac{2 - \gamma}{\gamma + 1}}, \quad \lambda = \lambda_s^{(1)} = -\frac{1}{2} \arccos \frac{2\gamma - 1}{3} \quad (2.3)$$

Для задачи о сжатии область определения решения $\lambda \in (\lambda_s^{(j)}, 0)$ ($j = 0, 1$). Характеристики в области *A'G'E'* плоскости ξ, η – прямые линии и уходят на бесконечность.

Аналитическое исследование полей интегральных кривых уравнения (1.7), особенно в случае $N = 1$ из-за наличия подвижной особенности (задача неавтономная), представляет трудности. При $N = 0$, хотя порядок уравнения (1.7) понижается и в результате получается автономное уравнение Абеля второго рода, доказательство факта, что при любом $0 < a < \frac{1}{2}$ интегральная кривая пройдет через седло (2.2) с каким-то другим λ_s , также представляет трудности. Поэтому факт существования интегральных кривых уравнения (1.7), соединяющих две особые точки с произвольным $0 < a < \frac{1}{2}$ при $N = 1$, и уже упомянутый факт при $N = 0$ установлен путем высокоточного численного интегрирования уравнения (1.7) по нескольким методам с применением аналитических разложений в окрестности особых точек.

Прежде всего установим, что если в (1.10) при каком-то λ будет $P = Q = 0$ (несогласованный общий случай), то и знаменатель в (1.12) также обращается в нуль, а характеристика, соответствующая M_+ , уходит в плоскости ξ, η на бесконечность.

Действительно, используя следующее из равенства $Q = 0$ соотношение

$$A'^2 = 2(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-1} A(1 - 2A) \quad (2.4)$$

для L и M_+ в (1.11) получим представления

$$L = R \cos \lambda, \quad M_+ = R \sin \lambda \quad (2.5)$$

$$R = (A'^2 - 4A^2) \cos \lambda + 4AA' \sin \lambda$$

Из (2.5) следует сформулированное утверждение. Числитель в (1.12) при этом, вообще говоря, не равен нулю. Отметим, что точке неограниченного сжатия O в силу (1.9) соответствуют в плоскости ξ, η бесконечно удаленные точки сектора $B'H'G'A'$.

В плоском случае точка $\lambda = 0$ не является особой. Раскрывая неопределенность в выражении $A' \operatorname{ctg} \lambda$ при $N = 1$, получим

$$A''(0) = \frac{3}{2} - 2a\gamma - a \quad (2.6)$$

Для осесимметричного случая в особой точке типа седла при $\lambda = \lambda_s$, когда P и Q в (1.10) обращаются в нуль, получим

$$A(\lambda_s) = \frac{(\gamma - 1)^3 + (\gamma^2 - 1)[4(\gamma + 1) \operatorname{tg} \lambda_s - \sqrt{(\gamma - 1)^2 + 8(3 - \gamma) \operatorname{tg}^2 \lambda_s}]}{4[(\gamma - 1)^3 + (\gamma + 1)^3 \operatorname{tg}^2 \lambda_s]} \quad (2.7)$$

$$A'(\lambda_s) = 2 \operatorname{tg} \lambda_s [1 - (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{-1} A(\lambda_s)]$$

Для $A''(\lambda_s)$, переходя к пределу в (1.10) при $\lambda \rightarrow \lambda_s$, получим квадратное уравнение

$$r_2 A''^2(\lambda_s) + r_1 A'(\lambda_s) + r_0 = 0$$

$$r_0 = A'^2(\lambda_s)(2 - 1/\cos^2 \lambda_s) + 8A(\lambda_s) - 24A^2(\lambda_s) - 2A'^2(\lambda_s) \quad (2.8)$$

$$r_1 = (\gamma - 1)[1 - 4A(\lambda_s)] + 2[A(\lambda_s)(\operatorname{ctg} \lambda_s - 2) - 1] + A'(\lambda_s) \operatorname{ctg} \lambda_s - 2 - 4A(\lambda_s), \quad r_2 = -\gamma - 1$$

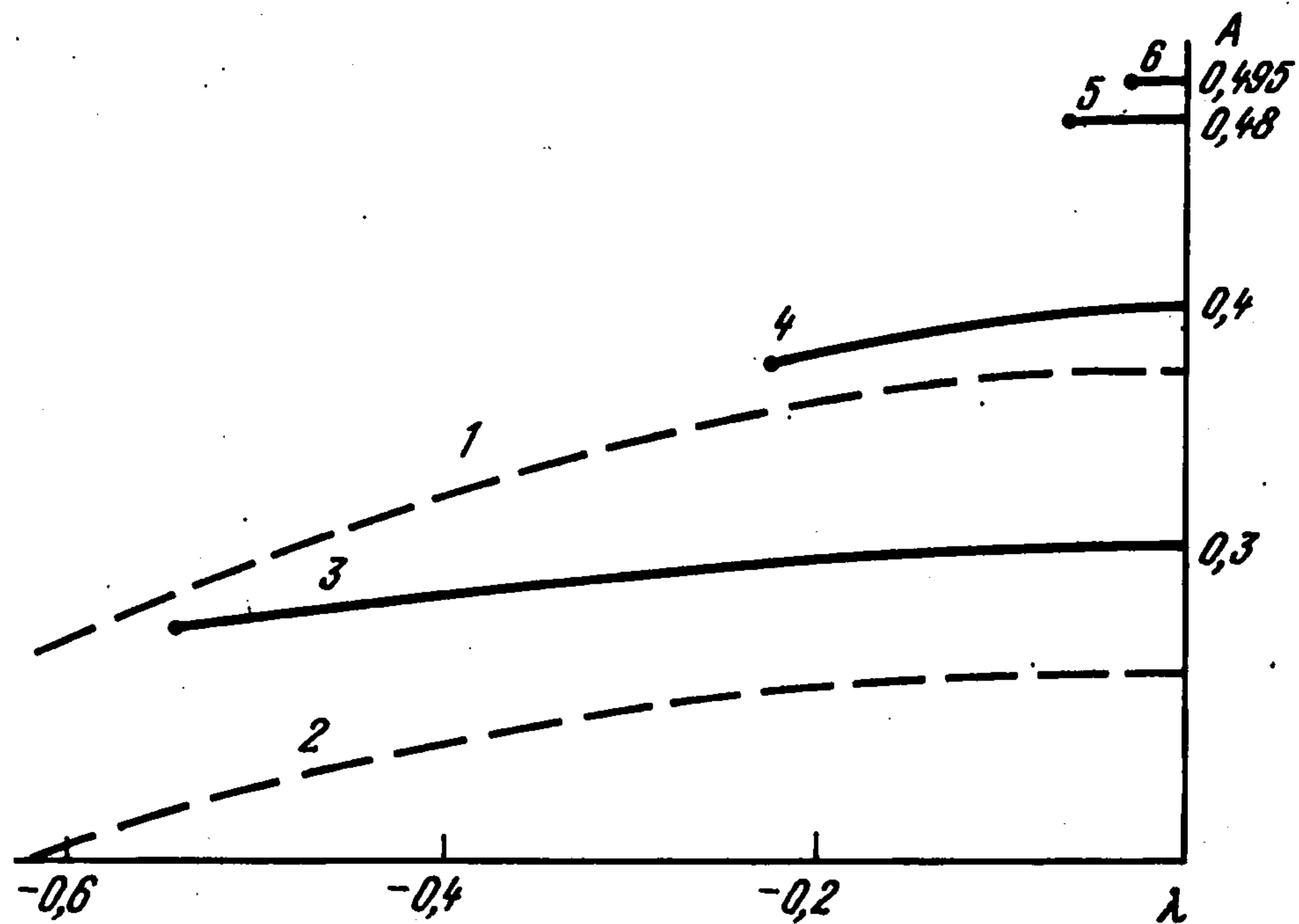
Для плоского случая r_k в (2.8) не зависят от λ_s и имеют вид

$$r_0 = 2(4A - 12A^2 - A'^2), \quad r_1 = \gamma(1 - 4A) - 3, \quad r_2 = -\gamma - 1$$

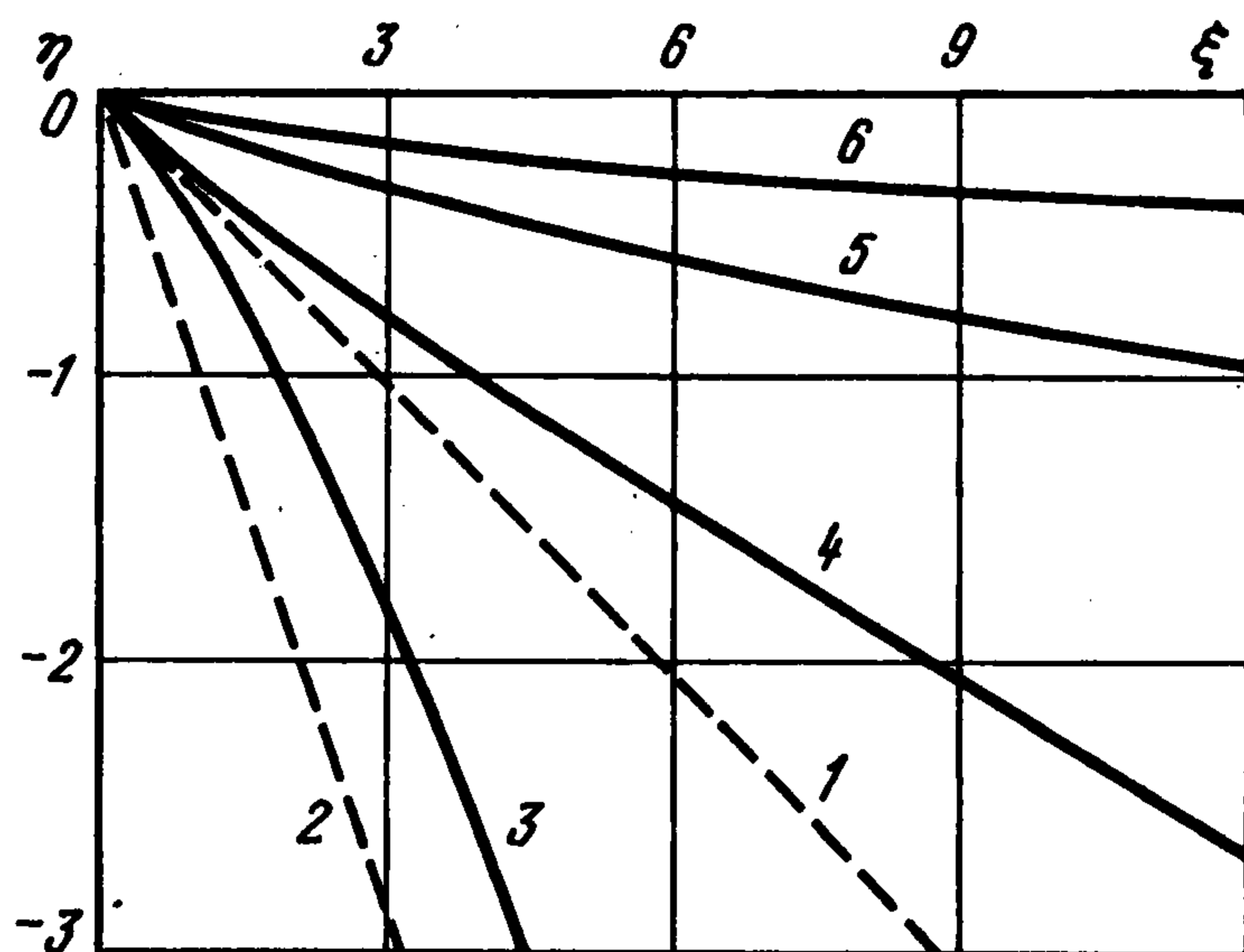
где A и A' берутся из (2.3).

Представления (2.6)–(2.8) позволяют установить приближенный вид аналитических разложений для функции $A(\lambda)$ в окрестности особых точек, получить наклоны сепаратрис и осуществлять интегрирование (1.10) при помощи этих разложений как от $\lambda = 0$, так и от $\lambda = \lambda_s$. Оказалось, что задача численного интегрирования встречается с рядом трудностей: неустойчивостью расчета, связанной с направлением интегрирования, большой чувствительностью к выбору величины шагов. Тем не менее используя четыре различные численные методики, удалось расчетным путем, используя очень мелкий шаг интегрирования ($\sim 10^{-4}$), установить существование интегральных кривых, соединяющих две особые точки для осесимметричного случая, и особую точку типа седла с точкой $\lambda = 0, A(0) = a$ в плоском случае.

На фиг. 3 изображены кривые $A(\lambda)$, рассчитанные от $\lambda = 0$ до соответствующего λ_s для $\gamma = 5/3$. Кривые 1 ($N = 1$), 2 ($N = 0$) соответствуют согласованным случаям (2.1), кривые 3–6 – несогласованным случаям при $a_i = 0,3; 0,4; 0,48; 0,495$. Кривые 1, 2



Фиг. 3



Фиг. 4

определены для $\lambda \in [-\pi/2, 0]$. На фиг. 4 изображены характеристики $G'E'$, соответствующие рассчитанным $A(\lambda)$ (фиг. 3) ($\alpha_1 = 19^\circ, 5$; $\alpha_2 = 35^\circ, 2$; $\alpha_3 = 28^\circ, 1$; $\alpha_4 = 15^\circ, 7$; $\alpha_5 = 6^\circ, 8$; $\alpha_6 = 3^\circ, 3$). На фиг. 4 для компактности чертежа исходная точка $\eta = 0$, $\xi = (\sin \alpha)^{-1}$ всех характеристик смещена по оси ξ в начало координат.

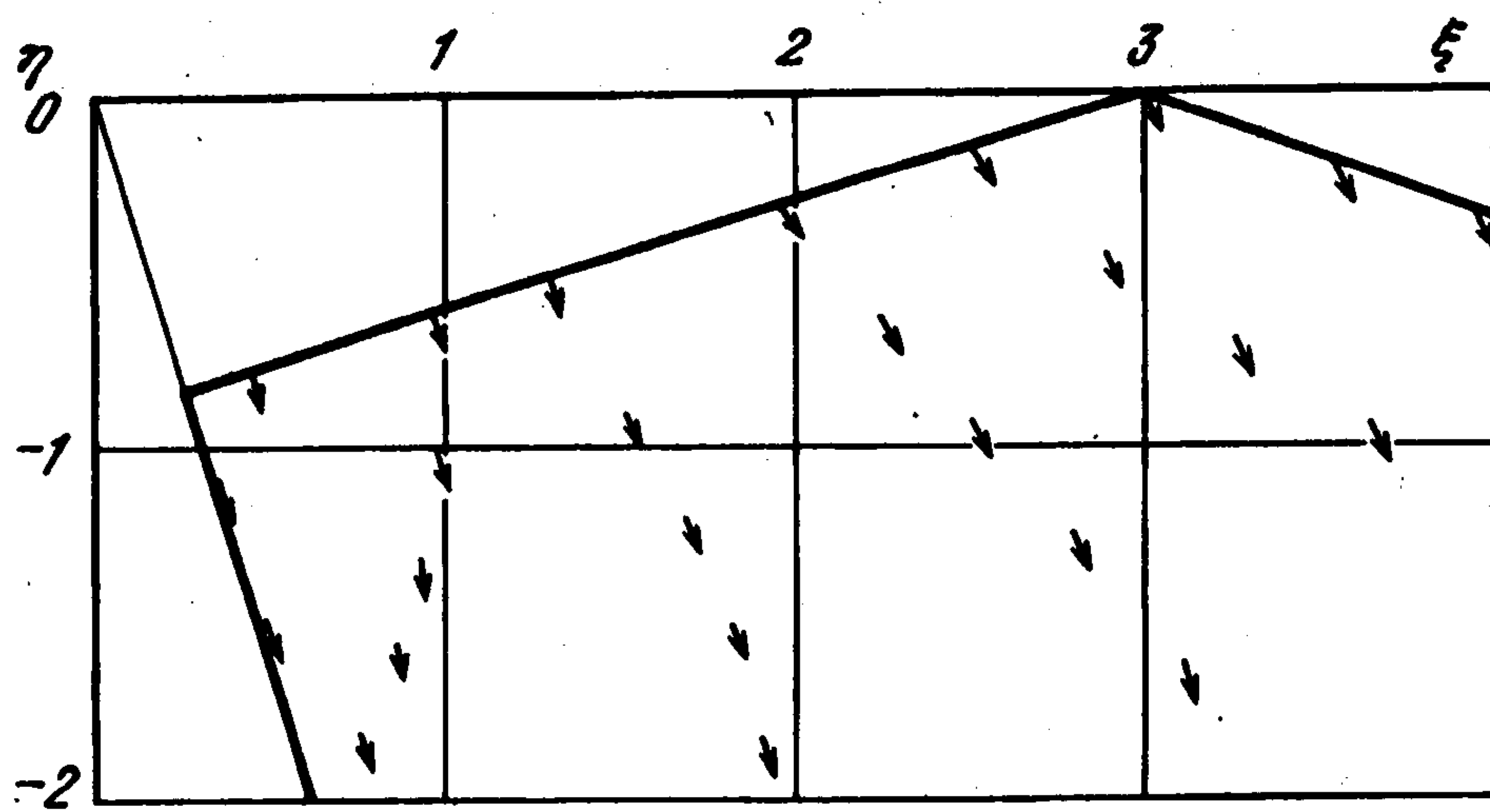
3. Дальнейший расчет полей течений для плоского и осесимметричного случаев может быть осуществлен по-разному. В плоском случае, используя теорему о примыкании бегущих волн различных рангов вдоль слабых разрывов [10, 11], можно построить решение в секторе $B'H'G'E'$ (фиг. 2) из класса двумерных автомодельных простых волн, непрерывно примыкающих к решению вида (1.6) в секторе $E'G'A'$ вдоль характеристики $G'E'$. Положив вдоль $G'E'$

$$u_z = f_1(\kappa), \quad u_r = f_2(\kappa), \quad \kappa = 2c / (\gamma - 1)$$

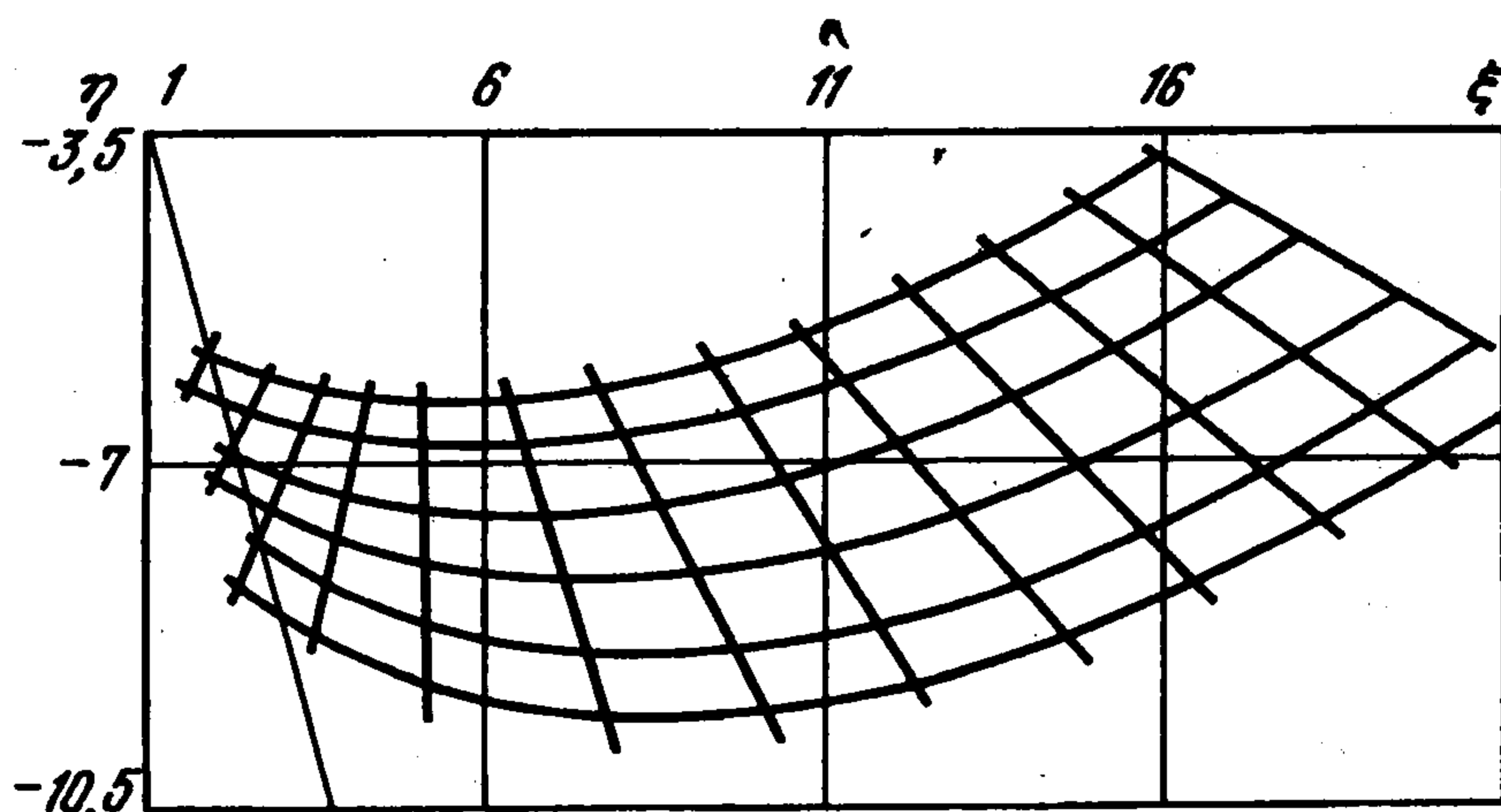
где функции f_1 и f_2 находятся после интегрирования уравнений характеристик (1.11) и удовлетворяют соотношениям [11]

$$f_1'^2 + f_2'^2 = 1 \quad (3.1)$$

$$f_1 \xi + f_2 \eta - [(\gamma - 1)\kappa / 2 + f_1 f_1' + f_2 f_2'] = 0$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Второе уравнение (3.1) определяет после нахождения f_1 и f_2 поле прямолинейных характеристик в секторе $B'H'G'E'$, вдоль которых сохраняют постоянное значение скорость звука и компоненты вектора скорости. В точке G'

$$f_1(g) = f_2(g) = 0, \quad f_1'(g) = \sin \alpha, \quad f_2'(g) = \cos \alpha, \quad g = 2 / (\gamma - 1)$$

Конечно, при этом кроме согласованных α и γ ($\operatorname{tg}^2 \alpha = (3 - \gamma) / (\gamma + 1)$ [1]) уже невозможно, вообще говоря, удовлетворить условию непротекания на прямолинейной стенке OB (фиг. 1) и необходимо строить подвижную поверхность $DEF'H$, интегрируя на построенном поле скоростей u_z, u_r уравнения характеристик

$$dz / dt = u_z, \quad dr / dt = u_r \quad (3.2)$$

с начальными данными на кривой ABH . Тогда подвижную поверхность S_t , которая задается уравнением $F(t, r, z) = 0$ и удовлетворяет условию непротекания

$$F_t + u_z F_z + u_r F_r = 0 \quad (3.3)$$

можно в каждый фиксированный момент времени t соткать из характеристик (3.2), фиксируя их положение в момент t [12].

В осесимметричном случае классы простых волн отсутствуют и течение в секторе $B'H'G'E'$ соответствует решению общего типа. Его можно построить численно методом характеристик, решая задачу Гурса с известными данными на характеристиках $H'G'$ и $G'E'$. Конечно, при этом приходится преодолевать ряд трудностей, связанных с неограниченностью области интегрирования, значительным поворотом характеристик, устойчивостью счета.

На фиг. 5, 6 изображены фрагменты поля характеристик и поля векторов скорости в плоскости автомодельных переменных для $\gamma = 5/3$ и $\alpha = 19^\circ,5$ (согласованный случай

$\operatorname{tg}^2 \alpha = (2 - \gamma)/(\gamma + 1)$). На фиг. 2 изображен фрагмент поля характеристик для $\gamma = 1,4$, $\alpha = 26^\circ,5$. Расчеты были проведены до значений $|\xi|, |\eta| \sim 10^3$. Видно (фиг. 5), что вектор скорости очень близок по направлению к лучу OB (величина $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})/|\mathbf{u}| \sim 10^{-2}$, \mathbf{u} – вектор скорости, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к OB), так что приближенно можно считать OB неподвижной непроницаемой стенкой.

Рассмотрим вопрос о нахождении приближенного аналитического закона движения поршня S_r . Один вариант приближенного вида закона $F(t, r, z) = 0$ был приведен в [2]. Построим уточненный закон движения S_r . С этой целью рассмотрим сначала при больших $|\xi|$ и $|\eta|$ (вблизи момента фокусировки) движение частиц газа на характеристике $G'E'$, определяемой уравнением

$$\eta = -\xi \operatorname{tg} \alpha + 1 / \cos \alpha \quad (3.4)$$

Вблизи момента фокусировки при помощи (2.4) при $\lambda \sim \lambda_s$ получим

$$|\mathbf{u}| \sim \mu q, \quad q = [(1 - 2A(\lambda_s))(1 - 4(\gamma + 1)^{-1} A(\lambda_s))]^{1/2}$$

Тогда, полагая, что на поршне S_r в направлении характеристики (3.4) при больших μ^2 скорость поршня совпадает с $|\mathbf{u}|$, получим для $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ в этом направлении уравнение первого порядка, откуда будем иметь

$$R = B(-\tau)^q, \quad B = \text{const} \quad (3.5)$$

Для случая согласованных α и γ

$$q = q_s = [(2 - \gamma)(3 - \gamma) / (\gamma + 1)]^{1/2} \quad (3.6)$$

Отметим, что при $1 < \gamma < 2$ выполнены неравенства

$$\frac{2}{\gamma + 1} > \frac{1}{\gamma} > q_s > q_0 = 2 \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1}$$

Здесь $2/(\gamma + 1)$ и $1/\gamma$ соответствуют законам движения плоского и цилиндрического поршня в задаче Релея–Гюгонио [5], q_0 – закону движения (1.8) для согласованных α и γ . Таким образом, степень кумуляции максимальна на оси $r = 0$.

Для того чтобы найти закон движения поршня DE (фиг. 1), т.е. решение уравнения (3.3), необходимо знать уравнение движения точки E . В [2] для нахождения закона этого движения была использована гипотеза о цилиндрическом одномерном характере кумуляции вдоль характеристики $G'E'$. Используем уточненный закон (3.5) и будем полагать, что точка E движется вдоль $G'E'$ по закону

$$r = D[(-\tau)^{q_s} + \tau], \quad D = \sqrt{3} / [2(\gamma + 1)^{1/2}(1 - q_s)] \quad (3.7)$$

Интегралы уравнений (3.2) для рассматриваемого согласованного случая имеют вид

$$\frac{r}{\tau} = C_1, \quad (-\tau)^{-2(2-\gamma)/(\gamma+1)} \left(z + \frac{2\sqrt{2-\gamma}}{\sqrt{3}(\gamma-1)} \tau \right) = C_2 \quad (3.8)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение уравнений (3.3) можно записать в виде $C_2 = \chi(C_1)$, где χ – произвольная функция, а вместо C_1, C_2 подставлены их выражения (3.8). Функцию χ найдем из требования, чтобы интегральная поверхность уравнения (3.3) содер-

жала кривую (3.7). Окончательно получим следующий закон движения части DE поршня:

$$z = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}} \left(1 - \frac{r}{\tau D}\right)^n \left(-\frac{r}{\tau} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{3(\gamma-1)^2}}\right) (-\tau)^m - \frac{2\sqrt{2-\gamma}}{\sqrt{3(\gamma-1)}} \tau = \Lambda(r, \tau)$$

$$n = \frac{3(\gamma-1)}{(\gamma+1)(q_s-1)}, \quad m = 2 \frac{2-\gamma}{\gamma+1}, \quad z \leq \sqrt{\frac{\gamma+1}{2-\gamma}} r + \sqrt{\frac{3}{2-\gamma}} \tau \quad (3.9)$$

Расчеты показали, что часть EF поршня S_t весьма близка по форме к конической поверхности, а закон движения точки F вдоль стенки OB близок к сферическому одномерному закону движения поршня, неограниченно сжимающего шар с единичным радиусом.

Таким образом, построен аналитически приближенный закон движения управляющего поршня S_t для согласованных α и γ . Оценим порядок величины энергии $E(\tau)$ при $\tau \sim 0$, необходимой для неограниченного сжатия:

$$E(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{\tau} \int_{DF(\tau)} p(\tau) u_n r dl d\tau = 2\pi a^2 \int_{-1}^{\tau} \int_0^{r(\tau)} c^{2\gamma/(\gamma-1)} (u_z - u_r \Lambda_r) r dr d\tau \quad (3.10)$$

Здесь $p(\tau)$ – значение давления на S_t , u_n – значение нормальной к поверхности S_t компоненты вектора скорости, dl – элемент длины дуги кривой DF , $r(\tau)$ – радиус точки F . Для оценки порядка возрастания $E(\tau)$ достаточно в (3.10) считать, что $r(\tau)$ определяется по (3.7), так как главный вклад в работу поршня S_t вносит участок поршня DE .

Используем для согласованных α и γ при $N = 1$ получающиеся из (2.1) выражения

$$c = \sqrt{3} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \sqrt{2-\gamma} (\xi + \xi_0), \quad \xi_0 = \frac{2\sqrt{2-\gamma}}{\sqrt{3(\gamma-1)}}$$

$$u_z = 2 \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \xi + 3 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi_0, \quad u_r = \eta$$

в которых на поршне z – функция от r , τ (3.9). Тогда после вычислений главного члена асимптотики $E(\tau)$ получим

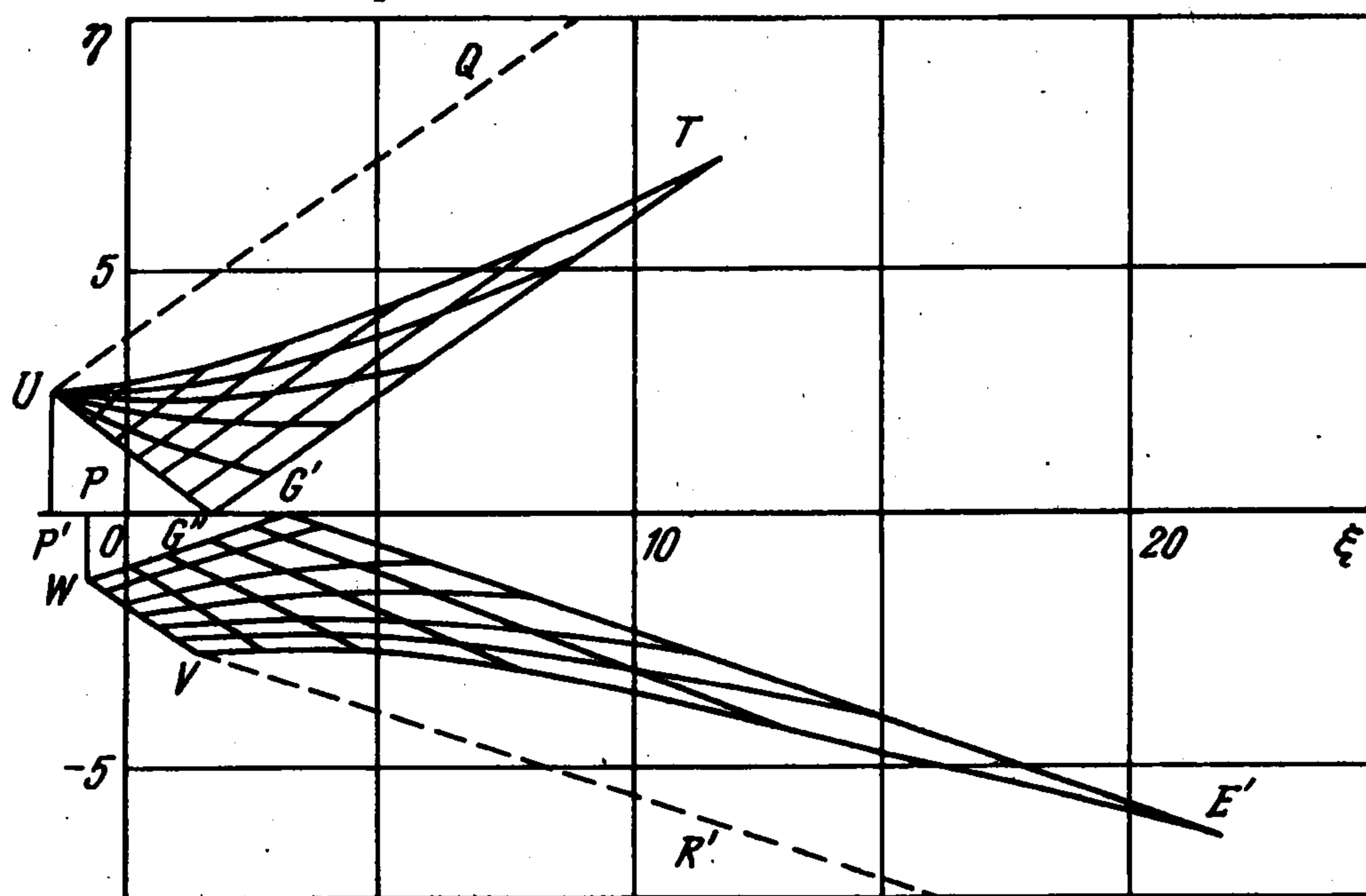
$$E(\tau) = O((-\tau)^{-6(\gamma-1)/(\gamma+1)}).$$

Введем в рассмотрение величину $v = E(\tau) \rho_m^{-1}(\tau)$, где ρ_m – максимальная плотность газа в момент τ , $E(\tau)$ – интегральная энергия, необходимая для получения такого сжатия. Для случая сферического сжатия [5] $v = v_s \sim (\tau)^{6(2-\gamma)/(3\gamma-1)}$, а для рассмотренного конического $v = v_c \sim (-\tau)^{6(2-\gamma)/(\gamma+1)}$. Если $\gamma < 2$, то и v_s и v_c стремятся к нулю при $\tau \rightarrow 0$ и справедливо соотношение

$$v_c \sim v_s^{(3\gamma-1)/(\gamma+1)} \quad (3.11)$$

Величина v характеризует экономичность процесса сжатия при получении больших локальных плотностей вещества с точки зрения затрат энергии. В (3.11) $v_c = o(v_s)$, и поэтому рассмотренный процесс конической кумуляции оказывается энергетически более экономичным, чем процесс сферического сжатия, и обеспечивает к тому же более высокую степень кумуляции всех величин.

Обнаруженный в рамках приближения идеального газа эффект сверхкумуляции может сыграть существенную роль, хотя, вероятно, и будет ослаблен учетом реальных уравнений состояния, теплопроводности, вязкости, излучения при больших темпера-



Фиг. 7

турах. Большая часть энергии E в рассмотренном процессе идет на приращение внутренней энергии, при этом не происходит вредного преждевременного сильного разогрева газа, что характерно для сжатия с помощью ударных волн.

4. Класс решений (1.6) можно применить не только к задачам о сильных сжатиях, но и к решению задач об истечении газа в вакуум из бесконечных конусов.

Пусть газ с теми же исходными параметрами (разд. 1) находится в момент $t = 0$ внутри бесконечного конуса с вершиной в начале координат и углом полураствора α (фиг. 1). Боковая поверхность конуса при $t = 0$ мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум. Плоский вариант такой задачи был решен в [9].

Будем считать, что условия на характеристиках $H'G'$ и $G'E'$ поменялись местами и вдоль $G'E'$ выполняются условия (1.4), а вдоль $H'G'$ справедливо представление (2.1) при $N = 1$ и $\lambda \geq 0$. (Функция $A(\lambda)$ продолжена четным образом). Так как распад разрыва происходит в рассматриваемой задаче при $t = 0$, то вместо ξ и η из (1.1) следует положить

$$\xi = z/t, \quad \eta = r/t, \quad t \in (0, \infty)$$

Для $\theta = c^2$ справедливо представление

$$\theta = (\gamma - 1)\mu^2(A - 2A^2 - A'^2/2)$$

из которого следует, что при $\lambda = \pi/2$ и $\xi = -\xi_0 = -2\sqrt{2 - \gamma}/[\sqrt{3}(\gamma - 1)]$ функция θ обращается в нуль, что соответствует началу зоны вакуума. Для решения поставленной задачи используется функция $A(\lambda)$, определенная при $\lambda \in [0, \pi/2]$, т.е. вся сепаратриса, проходящая через седло при $\lambda = \frac{1}{2}\arccos[(2\gamma - 1)/3]$ (фиг. 3).

Итак, пусть в области $WG'P$ (фиг. 7) справедливо решение (2.1). Тогда в области $R'WG'F'$ необходимо решать задачу Гурса с данными на характеристиках WG' и $G'E'$. Снова, как и в разд. 3, при $N = 1$ это решение будет решением общего типа. Применение метода характеристик имеет специфику, связанную с тем, что все характеристики двойственного семейства, исходящие из точек прямой $G'E'$, приходят в некоторую окрестность точки W . Этот факт, хотя и получен путем численных расчетов, не случаен.

В плоском случае для согласованных α и γ решение в области $TG''UQ$ будет простой центрированной волной Римана. Поведение характеристик в этой области легко исследовать аналитически. Уравнения семейства характеристик, исходящих из

$G''T$, в системе координат ξ', η' , получающейся из исходной поворотом вокруг начала координат на угол α по часовой стрелке, имеют вид

$$\xi' = \sqrt{\frac{\gamma+1}{3-\gamma}} \left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \left(\eta' - \frac{2}{\gamma-1} \right)^2 + C_1 \left(\eta' - \frac{2}{\gamma-1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \right]^{1/2}, \quad C_1 = \text{const}$$

В точке U излома фронта истечения в вакуум ($\xi' = 0, \eta' = 2/(\gamma - 1)$) все характеристики проходят через эту точку. На фиг. 7 приведены картины характеристик для $\gamma = 5/3$, полученные расчетным путем: при $N = 0$ – в верхней, при $N = 1$ – в нижней полуплоскости. Точка V аппроксимирует предельную точку для характеристик, исходящих из $G'E'$. Участок фронта истечения WVR' в общем случае криволинеен, участки WP и VR' – прямолинейны, W, V – точки нарушения гладкости фронта.

Отметим, что для несогласованных α и γ необходимо находить интегральную кривую уравнения (1.10), проходящую через точку типа седла, а значение $\lambda = \lambda_w$, соответствующее обращению скорости звука в нуль, определяется условием

$$A(\lambda_w) - 2A^2(\lambda_w) - A'^2(\lambda_w)/2 = 0$$

Найденное $A(\lambda)$ определяет течение в аналоге области $WG'P$, а в аналоге области $R'WG'E'$ решение можно найти методом характеристик. Характеристика WG' в общем случае уже не будет прямолинейной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17361).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 3. С. 548–552.
2. Сидоров А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 444–448.
3. Sidorov A.F. Calculation Methods of Optimal Control of Space Unshocked Compression of ideal gas // Proc. 5th Intern. Sympos. on Computational Fluid Dynamics. 1993. V. 3. P. 137–143.
4. Накколс Дж.Г. Осуществимость итерационно-термоядерного синтеза // Успехи физ. наук. 1984. Т. 143, № 3. С. 467–482.
5. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 172 с.
6. Овсянников Л.В. Новое решение уравнений гидродинамики // Докл. АН СССР. 1956. Т. III. № 1. С. 47–49.
7. Богоявленский О.И., Новиков С.П. Однородные модели в общей теории относительности и газовой динамике // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31. № 5. С. 33–48.
8. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 343 с.
9. Сучков В.А. Истечение в вакуум на косо́й стенке // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 739–740.
10. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. О пространственных бегущих волнах в баротропном газе // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 169–174.
11. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
12. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. О точных решениях некоторых краевых задач газовой динамики в классах двойных и тройных волн // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР: Методы решения краевых задач механики сплошной среды. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1978. Вып. 25. С. 52–66.