УДК 533.6.011.5

© 1994 г. А.Н. Крайко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО РАСШИРЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ПУСТОТУ

В развитие [1], где исследовалась асимптотика одномерного расширения идеального совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa > 1$, изучаются закономерности нестационарного расширения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа в пустоту. Если t – время, а x – координата, отсчитываемая от плоскости, оси или центра симметрии, то формулы [1], учитывающие влияние стремящегося к нулю давления на разлет газа по инерции, справедливы в области плоскости xt, вытянутой в направлении оси t. Подход, примененный ниже, свободен от такого ограничения, а найденные с его помощью соотношения справедливы всюду вдали от начала координат. В дополнение к этому получены асимптотические формулы, описывающие сферически симметричный разлет гравитирующего газа, и выполнен асимптотический анализ для совершенного газа с $\kappa = 1$. Поправки на гравитацию, как и формулы инерционного разлета газа в пустоту, не зависят от его термодинамических свойств. Полученные результаты справедливы для таких времен t, для которых в результате расширения занимаемый газом объем значительно превысил свою начальную величину.

Как и [1], данное исследование примыкает к работам [2–9] по стационарным гиперзвуковым течениям, где выполнен анализ инерционного расширения газа [2–7] и найдены поправки из-за стремящегося к нулю давления [8, 9].

1. Пусть $\mathbf{u}$ – скорость; p и ρ – давление и плотность; T, h и s – температура, удельные энтальпия и энтропия газа – известные функции p и ρ. Тогда течение идеального газа описывается уравнениями [10]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\frac{1}{\rho}\nabla p=0,\quad \frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\mathbf{u}=0,\quad \frac{ds}{dt}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nabla h-T\nabla s=0\quad \left(\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla\right)$$

четвертое из которых – следствие первого и равенства: $Tds = dh - \rho^{-1}dp$.

При $t = 0$ газ занимает объем Ω_0 с поверхностью $\partial\Omega_0$, отделяющей его от окружающего пустого пространства. Длину L_0, характеризующую размер Ω_0, возьмем за пространственный масштаб. При наличии у Ω_0 плоскости или оси симметрии L_0 – расстояние от них до $\partial\Omega_0$. Поверхность $\partial\Omega_0$ может быть чисто геометрической или оболочкой, исчезающей в момент $t = 0$. В любом случае начальные распределения параметров, которым припишем нижний индекс "нуль", произвольны при нулевом (за счет выбора системы координат) суммарном количестве движения газа. Внешние силы при $t > 0$ предполагаются отсутствующими, а начало координат – совмещенным с центром масс газа.

При произвольных $\mathbf{u}_0$ расширяющийся (разлетающийся) газ может распасться на несколько несвязных "облаков". Менее "экзотичные" начальные условия (например, $p_0 \equiv \mathrm{const}$, $\mathbf{u}_0 \equiv 0$) обеспечивают эволюцию расширяющегося газа как связного целого. В общем случае скорость истечения в пустоту в разных точках $\partial\Omega_0$ различна. Максимальное значение u^m нормальной к $\partial\Omega_0$ ее компоненты возьмем за масштаб $\mathbf{u}$, L_0/u^m – за масштаб t, и константу c_υ с размерностью удельной теплоемкости – за масштаб s. Тогда последнее уравнение из (1.1) станет

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nabla\frac{h}{u^{m2}}-\frac{c_\upsilon T}{u^{m2}}\nabla s=0 \qquad (1.2)$$

Начальные поля параметров могут содержать скачки или приводить к их образованию. Если скачок возник из-за выделения энергии при $t < 0$, то за начало отсчета t возьмем момент его прихода в самую отдаленную точку $\partial\Omega$. В любом случае, однако, волны разрежения, вызванные расширением газа в пустоту, в конце концов приведут к исчезновению скачков и к прекращению роста s. Поэтому из-за увеличения размера L области Ω, который при выбранном масштабе $\mathbf{u}$ растет, как t, для больших t будет иметь $\nabla s = O(1/t)$. По той же причине изменение $\mathbf{u}$ (в пределах Ω при $t = \mathrm{const}$) и сама скорость – величины порядка единицы, и, следовательно $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = O(1/t)$. С другой стороны, после исчезновения скачков h/u^{m2} с ростом t всюду в Ω стремится к нулю и $\nabla(h/u^{m2}) = o(1/t)$. Из-за уменьшения T то же справедливо для третьего слагаемого в (1.2). Итак, в (1.2) второе и третье слагаемые $o(1/t)$, а $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = O(1/t)$. Отсюда: $\partial\mathbf{u}/\partial t = O(1/t)$, и для больших t (1.2) в "главных порядках" сводится к уравнению инерционного разлета частиц

$$d\mathbf{u}/dt = 0 \qquad (1.3)$$

Согласно (1.3) скорость $\mathbf{u}$ не меняется вдоль их траекторий. Для еще больших t траектории – лучи: $\mathbf{r} = \mathbf{u}t$ с радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из начала координат. Найдя отсюда $\nabla\mathbf{u} = 3/t$, после подстановки во второе уравнение из (1.1) получим, что вдоль траекторий частиц

$$\rho = \rho_i(t_i/t)^j \qquad (1.4)$$

В (1.4) $j = 3$ и t_i таково, что при $t \geqslant t_i$ в Ω уравнение (1.2) в "главных порядках" сводится к (1.3), а в уравнениях траекторий: $\mathbf{r} = \mathbf{u}t$ отброшенные слагаемые малы по сравнению с $\mathbf{r}$. Плотность ρ_i в (1.4) меняется от частицы к частице. Согласно третьему уравнению (1.1) вдоль траекторий при $t \geqslant t_i$

$$s(p, \rho) = s(p_i, \rho_i) \qquad (1.5)$$

Для совершенного газа из (1.4) и (1.5) имеем

$$p = p_i(t_i/t)^{j\kappa} \qquad (1.6)$$

Пусть при наличии центра, оси или плоскости симметрии u–x-компонента $\mathbf{u}$ (в сферически симметричном случае другие компоненты $\mathbf{u}$ равны нулю). Тогда при $t \geqslant t_i$

$$u = x/t \qquad (1.7)$$

а в силу второго уравнения (1.1), записанного с учетом соответствующей симметрии, в (1.4) и (1.6) $j = 1 + \nu$ с $\nu = 0$, 1 и 2 в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях. Так как при $\nu = 0$ и 1 газ из-за симметрии расширяется не по всем направлениям, то в этих случаях ρ с ростом t падает медленнее, чем для сферического и произвольного пространственного расширения.

При наличии для $\nu = 1$ начальной закрутки в частице сохраняется момент количества движения $\gamma = x\upsilon$, где υ – окружная компонента $\mathbf{u}$, т.е. вдоль траекторий частиц $\upsilon = \gamma/x =$

$=\gamma/(ut)$, и с ростом t указанная компонента убывает как $1/t$, а входящее в уравнение для u слагаемое υ^2/x – как $1/t^3$. Следовательно, и здесь для достаточно больших $t \gg t_i$ в "главных порядках" u описывается уравнением инерционного разлета (1.3) с заменой $\mathbf{u}$ на u.

2. В одномерном случае при $t \gg t_i$ объем Ω_i представляется точкой, и ввиду отсутствия характерного линейного размера естественно попытаться построить автомодельное решение уравнений, определяющих u и ρ. Для таких t из массы m и энергии E расширяющегося газа – определяющих параметров задачи, влияющих на u и ρ, составим величину $c=\sqrt{E/m}$ с размерностью скорости. Воспользовавшись затем известными соображениями теории размерностей [11], запишем u и ρ в форме

$$u(x,t)=cU(\xi),\quad \rho(x,t)=\frac{m}{(ct)^{1+\nu}}R(\xi),\quad \xi=\frac{x}{ct} \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.3) и во второе уравнение из (1.1), придем к системе (штрих – производная по ξ):

$$(U-\xi)U'=0,\quad (U-\xi)R'=(1+\nu-U'-\nu U/\xi)R \tag{2.2}$$

Ее первое уравнение допускает два решения: $U'=0$ и

$$U=\xi \tag{2.3}$$

Если $U'=0$, то $U(\xi)\equiv\text{const}$. В силу условия симметрии $U(0)=0$, отсюда имеем: $U(\xi)\equiv 0$, что не описывает расширения в пустоту. Не спасает положения и допущение пустоты в окрестности $\xi=0$, ибо тогда единственное приемлемое решение второго уравнения из (2.2) – $R(\xi)=0$. Остается решение (2.3), совпадающее с (1.7). При этом, однако, во втором уравнении (2.2) обращаются в нуль множители при R' и при R. Отсюда $R(\xi)$ – произвольная функция, удовлетворяющая интегральным законам сохранения массы, и энергии. Если ξ^m – максимальное значение ξ, определяющее движение границы $\partial\Omega$, то при учете (2.1) и того, что $c^2=E/m$, они имеют вид

$$\int_0^{\xi^m}\xi^\nu R(\xi)d\xi=1,\quad \int_0^{\xi^m}\xi^{2+\nu}R(\xi)=2 \tag{2.4}$$

В рассмотренном приближении уравнение (1.7) для u не содержит p, а при $\nu=1$ еще и $\gamma=x\upsilon$, что и привело к автомодельному решению (2.1). При учете p три уравнения одномерного течения, пришлось бы решать вместе, привлекая конкретную зависимость $s(p,\rho)$. Так для совершенного газа $s=s_0+c_\upsilon\ln[p/(k\rho^\kappa)]$ с размерными константами s_0, c_υ и k. При $\kappa\neq 1$ из k, m, E, x и t можно составить отличную от ξ безразмерную переменную, что делает задачу неавтомодельной.

В приближении (1.7) не только получается автомодельное решение для u и ρ, но и упрощается определение других переменных. Энтропия, а при $\nu=1$ и γ согласно точным уравнениям

$$ds/dt=0,\quad d\gamma/dt=0 \tag{2.5}$$

сохраняются вдоль траекторий частиц. В данном приближении траектории – прямые $\xi=\text{const}$ и из (2.5) имеем

$$s\left[p(x,t),\frac{m}{(ct)^{1+\nu}}R(\xi)\right]=c_\upsilon S(\xi),\quad \upsilon(x,t)=\frac{\gamma(\xi)}{ct\xi} \tag{2.6}$$

Входящие сюда функции $S(\xi)$ и $\gamma(\xi)$, как и $R(\xi)$, не определяются из автомодельных уравнений, причем второе равенство (2.6) в отличие от первого в рамках анализа равномерностей вообще нельзя получить из (2.5). Действительно, подставив $s(x, t) = c_\upsilon S(\xi)$ и $\gamma(x, t) = c^2 t\Gamma(\xi)$ в (2.5), придем к уравнениям

$$(U-\xi)S' = 0, \quad (U-\xi)\Gamma' + \Gamma = 0$$

Отсюда следует, что для $U = \xi$ функция $S(\xi)$ произвольна, а $\Gamma(\xi) \equiv 0$. Хотя равенство $\Gamma(\xi) \equiv 0$ противоречит следующему из (2.5) интегралу $\gamma = \gamma(\xi)$ с произвольной функцией $\gamma(\xi)$, это противоречие, однако, кажущееся. При $t \gg t_i$, когда $x_i \leqslant L_i \ll L \sim ct$, имеем: $\Gamma(\xi) = \gamma/(c^2 t) \sim x_i/L \approx 0$, ибо в масштабе $L \sim ct$ начальный размер L_i превращается в точку и говорить об отличной от нуля закрутке бессмысленно. Если же в качестве масштаба γ взять cL_i, то, положив $\gamma(x, t) = cL_i\Gamma(\xi)$, для определения функции $\Gamma(\xi)$ порядка единицы придем к такому же уравнению, что для S, и ко второму равенству (2.6).

Аналогичные особенности возникают, если из первого равенства (2.6) определять p. Для совершенного газа оно дает

$$p(x,t) = \frac{m^\kappa}{(ct)^{(1+\nu)\kappa}} P(\xi), \quad P(\xi) = k(\xi)[R(\xi)]^\kappa \tag{2.7}$$

с размерной энтропийной функцией $k(\xi) = p_i\rho_i^{-\kappa}$. При свободном расширении первоначально покоящегося однородного газа $k(\xi) = \text{const}$. Если же забыть о том, что расширяющийся при $t \gg t_i$ "из точки" газ "помнит" начальное распределение энтропии, которая влияет на автомодельное решение (2.6) или (2.7) через масштаб для p, то из анализа размерностей вместо (2.6) и (2.7) придем к

$$p(x,t) = \frac{mc^2}{(ct)^{(1+\nu)}} P(\xi) \tag{2.8}$$

Подставив (2.1) и (2.8) в первое уравнение (2.5), переписанное в форме (a – скорость звука): $dp/dt = a^2 d\rho/dt$, получим для совершенного газа

$$(U-\xi)RP' - \kappa(U-\xi)PR' + (1+\nu)(\kappa-1)RP = 0$$

Отсюда, в силу (2.3), $P(\xi) \equiv 0$. Так как, согласно (2.1) и (2.8)

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{c^2(ct)^{(1+\nu)(\kappa-1)}P(\xi)}{m^{\kappa-1}[R(\xi)]^\kappa}$$

то $P(\xi) \equiv 0$ реализует единственную возможность сохранения $p\rho^{-\kappa}$ вдоль траекторий частиц. Как и в ситуации с $\Gamma(\xi) \equiv 0$, найденное в рамках стандартного анализа размерностей решение (2.8) с $P(\xi) \equiv 0$ – результат неудачного масштабирования p. Естественный же его масштаб, приводящий к нетривиальным решениям (2.6) и (2.7), связан с "запоминаемой" газом энтропией.

Присутствие в автомодельном решении (2.1), (2.3) и (2.6) произвольных функций $R(\xi)$, $S(\xi)$, $k(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ отражает предысторию расширения газа при $t < t_i$. Именно тогда по начальным условиям при $t = 0$ в $\Omega_0 \ll \Omega_i$ процессы, описываемые полными уравнениями (1.1) и соотношениями на разрывах, формируют к $t = t_i$ поля плотности, энтропии и закрутки, определяющие эти функции. Те же начальные условия и процессы определяют и величину ξ^m, а в случаях, когда в окрестности оси t образуется пустота, – минимальное отличное от нуля значение ξ.

Описанное выше влияние на автомодельное решение начальных неавтомодельных условий напоминает задачи с "неполной автомодельностью" [12], тем не менее, принципиально отличаясь от примеров, рассмотренных в [12]. Выше структура искомого решения, как и в [11], определяется анализом размерностей и простейшими интегралами уравнений течения.

3. В асимптотических формулах первого приближения из разд. 1 и 2 выражения для $\mathbf{u}$, u, ρ и υ универсальны – не зависят от уравнения состояния. Формулы (1.6), (2.6) и (2.7) для p не универсальны в любом приближении. Так как уточнение полученных формул предполагает учет p в уравнении движения, то результат такого уточнения зависит от термодинамики газа. Ограничившись одномерным случаем, получим сначала требуемые асимптотические выражения для совершенного газа с $\kappa > 1$. Начнем с уточнения формулы (2.3) для скорости. После этого найдем отклонение траекторий от прямых: $x = \xi ct$ с $U = \xi$ = const и выясним, как это влияет на асимптотические формулы для ρ и p.

Погрешности формулы (2.3): $U = \xi$ обусловлены двумя причинами. Во-первых, распределение $U \equiv u/c$ при $t = t_i$ даже для частиц, разлетающихся с постоянной скоростью, отклоняется от $U = \xi$, т.е. от автомодельного решения (2.3) на $\delta(\xi)$, хотя в режиме разлета $\delta \to 0$ при $t_i \to \infty$. При $\delta(\xi) \neq 0$ и конечных t_i, если бы даже для $t \geqslant t_i$ уравнение (1.3) было точным, траектории частиц будут не лучами: $x = \xi ct$, выходящими из начала координат, а прямыми

$$x = x_i + (\xi_i + \delta_i)c(t - t_i) \tag{3.1}$$

пересекающими ось t в разных точках. В (3.1) и далее $\delta_i = \delta(\xi_i)$ и согласно определению $\delta(0) = 0$. На траекториях в силу (1.3) по-прежнему U = const, но теперь в отличие от (2.3)

$$U(x,t) \equiv U(\xi_i) = \xi_i + \delta_i = \frac{x - x_i}{c(t - t_i)} \neq \frac{x}{ct} = \xi \tag{3.2}$$

Во-вторых, в (1.3) опущены слагаемые, пропорциональные $\partial p/\partial x$, а при $\nu = 1$ и υ^2. За большой временной интервал они могут изменить форму траекторий. В рассматриваемом приближении оба эффекта можно учесть по отдельности, а затем просуммировать. Влияние $\delta_i \not\equiv 0$ выражают формулы (3.1) и (3.2). Учтем теперь влияние $\partial p/\partial x$. Точный "предшественник" уравнения (1.3) имеет вид

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu(2 - \nu)\frac{\upsilon^2}{x} = 0 \tag{3.3}$$

Второе слагаемое в (3.3) определим из "первого приближения"

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{F(\xi)}{(ct)^{n+1}} \equiv -\frac{m^{\kappa-1}P'(\xi)}{(ct)^{n+1}R(\xi)}, \quad n = (1+\nu)(\kappa - 1) \tag{3.4}$$

а третье – опустим. Так как $\upsilon^2/x = \gamma^2/x^3 = \gamma^2(\xi ct)^{-3}$, то в силу этого для $\nu = 1$ последующие формулы верны либо при $\gamma \equiv 0$ и любых $\kappa > 1$, либо при $\gamma \not\equiv 0$, но $\kappa < 2$, когда третье слагаемое в (3.3) много меньше второго.

Положив $u = c\xi + c\Delta U(x, t)$, после подстановки (3.4) и данного выражения в (3.3) и пренебрежения членами квадратичными относительно ΔU придем к уравнению

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial t} + c\xi\frac{\partial \Delta U}{\partial x} + \frac{1}{t}\Delta U = \frac{F(\xi)}{(ct)^{n+1}} \tag{3.5}$$

Его решение, согласно сказанному ранее, должно удовлетворять условиям:

$$\Delta U(0, t) = \Delta U(x, t_i) = 0 \tag{3.6}$$

Применив к (3.5) и (3.6) разделение переменных и учтя, что в силу симметрии $F(0) \sim$

$\sim P'(0) = 0$, после несложных выкладок найдем

$$\Delta U = \tau(t)\varphi(\xi), \quad \tau(t) = [\Phi(ct) - \Phi(ct_i)]/(ct) \tag{3.7}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{F(\xi)}{c^2}, \quad \Phi(z) = \begin{cases} z^{1-n}/(1-n) & \text{при} \quad n \neq 1 \\ \ln z & \text{при} \quad n = 1 \end{cases}$$

В "первом приближении" вдоль траекторий $\xi = \text{const}$. Из-за добавки (3.7) к скорости теперь это свойство не выполняется даже при $\delta_i \equiv 0$, и $\xi = \xi_i + \Delta\xi$, причем по определению: $\Delta\xi(\xi_i, t_i) = 0$. Для нахождения $\Delta\xi$ воспользуемся тем, что вдоль траекторий: $dx/dt = u = c(\xi + \Delta U)$ с ΔU из (3.7), и тем, что $\xi = x/(ct)$. Продифференцировав последнее равенство и опустив малое в данном приближении произведение $\varphi'\Delta\xi$, придем к уравнению

$$\frac{d\Delta\xi}{d(ct)} = \frac{\varphi_i}{(ct)^2}[\Phi(ct) - \Phi(ct_i)]$$

Его интегрирование при условии $\Delta\xi(\xi_i, t_i) = 0$ дает

$$\Delta\xi = \varphi_i[\Phi(ct_i)\left(\frac{1}{ct} - \frac{1}{ct_i}\right) + \chi(ct) - \chi(ct_i)] \tag{3.8}$$

$$\chi(z) = \begin{cases} 1/[n(n-1)z^n] & \text{при} \quad n \neq 1 \\ -(1 + \ln z)/z & \text{при} \quad n = 1 \end{cases}$$

Подставив (3.7) и (3.8) в уравнение траектории

$$dx/dt = U(\xi_i, t) = \xi + \Delta U = \xi_i + \Delta\xi + \Delta U$$

отбросив квадратичные слагаемые и выполнив интегрирование, получим

$$x = x_i + [\xi_i + \frac{\varphi_i}{n(ct_i)^n}]c(t - t_i) + \varphi_i[\Lambda(ct) - \Lambda(ct_i)] \tag{3.9}$$

$$\Lambda(z) = \begin{cases} z^{1-n}/[n(n-1)] & \text{при} \quad n \neq 1 \\ -\ln z & \text{при} \quad n = 1 \end{cases}$$

Объединение (3.2) с (3.7) и (3.1) с (3.9) и пренебрежение малыми более высокого порядка дает асимптотические формулы "второго приближения"

$$U(\xi_i, t) = \xi_i + \delta_i + \frac{\varphi_i}{n}\left[\frac{1}{(ct_i)^n} - \frac{1}{(ct)^n}\right]$$

$$x(\xi_i, t) = x_i + \left[\xi_i + \delta_i + \frac{\varphi_i}{n(ct_i)^n}\right]c(t - t_i) + \varphi_i[\Lambda(ct) - \Lambda(ct_i)] \simeq \tag{3.10}$$

$$\simeq x_i\alpha_i\frac{t}{t_i}\left(1 - \frac{\delta_i t_i}{\xi_i t} + \frac{\varphi_i}{\xi_i}\Psi\right)$$

$$\alpha_i = 1 + \frac{\delta_i}{\xi_i} + \frac{\varphi_i}{\xi_i n(ct_i)^n},$$

$$\Psi = \Psi(t, t_i) = \frac{1}{ct}\left[\Lambda(ct) - \Lambda(ct_i) - \frac{1}{n(ct_i)^{n-1}}\right]$$

В (3.10) второе выражение для x отличается от первого слагаемыми, квадратичными по δ_i и φ_i.

При $n > 0$, что отвечает $\kappa > 1$, связанная с $\partial p/\partial x \neq 0$ добавка к скорости частиц на стадии разлета газа согласно (3.10) остается малой при всех $t > t_i$, монотонно возрастая (по модулю) от нуля при $t = t_i$ до $|\varphi_i|/[n(ct_i)^n]$ при $t \to \infty$. Несмотря на это, траектории частиц могут сколь угодно сильно отклоняться не только от лучей $x = \xi_i ct$, но и от прямолинейных траекторий инерционного разлета частиц (3.1). Как видно из (3.10), это имеет место, если $n \leqslant 1$ или, согласно определению n, если $\kappa \leqslant \kappa_\nu = 1 + 1/(1 + \nu)$. При $\kappa \leqslant \kappa_\nu$ в формуле для x из (3.10) слагаемое, пропорциональное $\Lambda(ct)$, растет с ростом t неограниченно, хотя и медленнее $\xi_i ct$. Данный результат совпадает с выводом, сделанным в [1], с той разницей, что анализ [1] справедлив лишь в области плоскости xt, вытянутой вдоль оси t. Можно показать, что на границе расширяющегося газа с пустотой $\varphi_i = 0$. Поэтому граничная траектория, как и траектория частицы, покоящейся при $x = 0$, прямолинейна для любых κ.

Лагранжева запись решения в форме (3.10) позволяет легко получить искомую формулу для ρ. Действительно, связь ρ в произвольной точке траектории с $\rho_i = \rho(x_i, t_i)$ в силу уравнения неразрывности можно записать в виде [13]

$$\rho J = \rho_i, \quad J = \left(\frac{x}{x_i}\right)^\nu \frac{\partial x}{\partial x_i} \tag{3.11}$$

где J – якобиан преобразования для рассматриваемого одномерного случая. Из (3.10) с той же точностью, что и выше,

$$\frac{\partial x}{\partial x_i} = \beta_i \frac{t}{t_i}(1 - \delta_i' \frac{t_i}{t} + \varphi_i' \Psi), \quad \beta_i = 1 + \delta_i' + \frac{\varphi_i}{n(ct_i)^n} \tag{3.12}$$

Здесь, как и ранее, штрихами обозначены производные по ξ_i.

Подставив (3.10) и (3.12) в (3.11), получим

$$\rho(\xi_i, t) = \frac{\rho_i}{\alpha_i^\nu \beta_i}\left(\frac{t_i}{t}\right)^{1+\nu}\left(1 - \frac{\delta_i t_i}{\xi_i t} + \frac{\varphi_i}{\xi_i}\Psi\right)^{-\nu}\left(1 - \delta_i' \frac{t_i}{t} + \varphi_i' \Psi\right)^{-1} \tag{3.13}$$

при малых ξ_i, для которых $\delta_i / \xi_i \simeq \delta_i'$, $\varphi_i / \xi_i \simeq \varphi_i'$ и $\beta_i \simeq \alpha_i$, (3.13) сводится к соответствующей формуле из [1].

Для $t \geqslant t_i$ вдоль каждой траектории, определяемой фиксированной величиной ξ_i, в любом приближении сохраняется энтропийная функция $k(\xi_i) = p/\rho^\kappa$. Благодаря этому $p(\xi_i, t) = k(\xi_i)\rho^\kappa$ с $\rho(\xi_i, t)$ из (3.13).

Примененный подход справедлив при условии малости всех поправок к асимптотическим формулам первого приближения. Если $n > 0$, то это требование всегда можно удовлетворить за счет выбора достаточно большого t_i. Согласно (3.10) оно должно быть таким, чтобы

$$|\delta_i| \ll \xi_i, \quad |\varphi_i| \ll n(ct_i)^n \xi_i \tag{3.14}$$

Выполнение (3.14) обеспечивает относительную малость соответствующих возмущений, в том числе, – отношения (к $\xi_i ct$) неограниченно растущего для $1 < \kappa < \kappa_\nu$ отклонения траекторий от лучей: $x = \xi_i ct$.

4. Если $n = 0$, т.е. $\xi = 1$, то второе неравенство (3.14), которое теперь нельзя удовлетворить за счет выбора t_i, дает $\varphi_i \equiv \varphi(\xi_i) \equiv 0$. Это означает, что при $\kappa \to 1$ на стадии разлета (если он реализуется) не только в первом, но и во втором приближении траектории частиц – прямые линии. Поскольку, однако, в этом случае u^m и c бесконечны, а выше предполагалась конечность c, то, хотя формально такой же результат при $c \to \infty$ следует из

(3.4) и (3.7), предельный переход $\kappa \to 1$ нуждается в обосновании. Сделаем это несколькими способами.

Перепишем равенство $Tds = dh - \rho^{-1}dp$ для совершенного газа в виде

$$\frac{1}{\rho}dp = a^2\left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{\kappa}ds\right) \tag{4.1}$$

и рассмотрим задачу о поршне, расширяющемся при $t > 0$ с постоянной скоростью c, которую возьмем за масштаб u. В дальнейшем c устремим к бесконечности. Так как для газа с $\kappa = 1$ скорость расширения в пустоту бесконечна, то при любых $c \leqslant \infty$ газ не отстает от поршня, а при $c < \infty$ плотность отлична от нуля. Подставив (4.1) с $\kappa = 1$ в (3.3) без υ^2/x и приняв тот же способ перехода к безразмерному виду, что и при получении (1.2), найдем

$$\frac{du}{dt} + \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0 \tag{4.2}$$

При $\kappa = 1$ a – функция только s. Поэтому после затухания ударных волн (если при $t \leqslant t_i$ таковые были) a^2 вместе с s сохраняется в частице, т.е. не убывает, как для $\kappa > 1$. Несмотря на это, при оценке "по порядку величин" слагаемое с a^2 при $t \geqslant t_i$ и больших t станет много меньше $u(\partial u/\partial x)$. Это оправдывает примененную выше процедуру решения и формулы (2.1), (2.3), (3.1), (3.2) и (3.7). В (3.7) под $\varphi(\xi)$ теперь следует понимать

$$\varphi(\xi) = -\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{R'}{R} + S'\right) \equiv -\frac{F(\xi)}{c^2} \tag{4.3}$$

где в общем случае a, как R и S, – функция ξ. Действуя далее так же, как в разд. 3, придем к выражениям

$$U(\xi_i, t) = \xi_i + \delta_i - \varphi_i \ln(t/t_i)$$
$$x(\xi_i, t) = x_i + (\xi_i + \delta_i - \varphi_i)c(t - t_i) + \varphi_i ct \ln(t/t_i) \tag{4.4}$$

которые с отличием в определении φ_i совпадают с пределом (3.10) при $n \to 0$.

Эти выражения не дают решения рассматриваемой задачи о поршне, ибо при $\xi_i = \xi_i^m$ условие непротекания $U(\xi_i^m, t) = 1$ из-за последнего слагаемого в первой формуле (4.4) для $t > t_i$ выполняется с погрешностью порядка φ_i. Не будем, однако, вносить в (4.4) соответствующих поправок, поскольку в интересующем нас пределе (4.4) при фиксированном t и $c \to \infty$ указанные поправки согласно (4.3) исчезают вместе с $\varphi_i \to 0$.

Переходя к искомому пределу, сделаем естественное предположение о существовании конечной функции $F_\infty(\xi) = \lim F(\xi)$ при $c \to \infty$ и $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, а от ξ и U перейдем к $\xi^\circ = x/(c^\circ t) = \xi c/c^\circ$ и $U^\circ = u/c^\circ = Uc/c^\circ$. Здесь в отличие от $c \to \infty$ постоянная c° с размерностью скорости конечна. В качестве c° удобно взять максимальное значение $a = a^m$ при $t = t_i$. Если при $t = 0$ параметры газа постоянны и $u_0 \equiv 0$, то в пределе $c \to \infty$, отвечающем заведомо безударному расширению в пустоту, $a^m = a_0$. В итоге при $c \to \infty$ вместо (4.4) и (3.13) получим

$$U^\circ(\xi_i^\circ, t) = \xi_i^\circ + \delta_i^\circ, \quad x(\xi_i^\circ, t) = x_i + (\xi_i^\circ + \delta_i^\circ)c^\circ(t - t_i)$$
$$\rho(\xi_i^\circ, t) = \frac{\rho_i}{\alpha_i^\nu \beta_i}\left(\frac{t_i}{t}\right)^{1+\nu}\left(1 - \frac{\delta_i^\circ t_i}{\alpha_i \xi_i^\circ t}\right)^{-\nu}\left(1 - \frac{\delta_i^{\circ\prime} t_i}{\beta_i t}\right)^{-1} \tag{4.5}$$
$$\alpha_i = 1 + \delta_i^\circ/\xi_i^\circ, \quad \beta_i = 1 + \delta_i^{\circ\prime}$$

что подтверждает выводы, чисто формально сделанные в начале настоящего раздела.

С увеличением t_i добавка $\delta_i^\circ = U_i^\circ - \xi_i^\circ \to 0$ и формула для ρ при $t \geqslant t_i$ переходит в (1.4) с

$j = 1 + \nu$. С другой стороны, если в выражении (2.1) для ρ заменить c на $c°$, а $R(\xi)$ на $R°(\xi°)$, то

$$R^{\circ}(\xi^{\circ}) = \lim_{c\to\infty} R(\xi)\left(\frac{c^{\circ}}{c}\right)^{1+\nu} = 0 \tag{4.6}$$

и, следовательно, $\rho \equiv 0$ при $t > t_i$. Хотя стадия инерционного разлета газа, для которой справедливы формулы (4.5), предполагает малость ρ, выражения для ρ из (1.4) с $j = 1 + \nu$ и (4.5) содержательнее тождества $\rho \equiv 0$. Как уже отмечалось, $R(\xi) \not\equiv 0$ и $P(\xi) \not\equiv 0$ – результат "запоминания" газом неавтомодельного этапа расширения.

Согласно разд. 2, при $\kappa = 1$ из x, t, m, E и энтропийной функции $p_0/\rho_0 = a_0^2$ можно составить единственную независимую безразмерную комбинацию: $\xi° = x/(a_0 t)$. Помня сделанное выше замечание о $R(\xi)$ и $P(\xi)$, примем теперь, что для больших t, когда начальный объем представляется точкой, из определяющих параметров остаются постоянные m, E и a_0. Тогда и задача о поршне с постоянной скоростью поршня c, и ее предел при $c \to \infty$ – задача о расширении газа с $\kappa = 1$ в вакуум будут автомодельными.

В задаче о поршне, положив

$$u(x,t) = a_0 U^{\circ}(\xi^{\circ}), \quad \rho(x,t) = \frac{m}{(a_0 t)^{1+\nu}} R^{\circ}(\xi^{\circ}), \quad \xi^{\circ} = \frac{x}{a_0 t} \tag{4.7}$$

для определения $U°(\xi°)$ и $R°(\xi°)$ при $0 \leqslant \xi° \leqslant c/a_0$ из второго уравнения (1.1) и из (4.2) с $s \equiv \text{const}$ получим

$$(U^{\circ} - \xi^{\circ})R^{\circ\prime} - (1 + \nu - U^{\circ\prime} - \nu U^{\circ}/\xi^{\circ})R^{\circ} = 0 \tag{4.8}$$

$$(U^{\circ} - \xi^{\circ})R^{\circ}U^{\circ\prime} - R^{\circ\prime} = 0 \tag{4.9}$$

Здесь в отличие от предыдущего во втором уравнении сохранено $\partial p/\partial x = a_0^2(\partial\rho/\partial x)$.

В согласии с (4.7) систему (4.8) следует решать при условиях

$$U^{\circ}(0) = 0, \quad U^{\circ}(c/a_0) = c/a_0 \tag{4.10}$$

Подставив $R°'/R°$ из (4.9) в (4.8) и введя обозначение $W = U° - \xi°$ для определения W придем к уравнению

$$W' = \frac{\xi^{\circ}W^2 - \nu W}{\xi^{\circ}(1 - W^2)} \tag{4.11}$$

решение которого в силу (4.10) должно удовлетворять условиям: $W(0) = W(c/a_0) = 0$. Единственное решение уравнения (4.11), удовлетворяющее этим условиям, есть $W \equiv 0$, т.е. $U°(\xi°) = \xi°$. Отсюда и из (4.9) имеем $R°' = 0$, и следовательно, $R°(\xi) \equiv R°(0) = \overset{\circ}{R}_0$. Постоянную $\overset{\circ}{R}_0$ найдем из переписанного с учетом (4.7) интегрального условия сохранения массы – первого равенства (2.4): $\overset{\circ}{R}_0 = (1 + \nu)\varepsilon^{1+\nu}$, где $\varepsilon = a_0/c$. Отсюда в предельном случае $c \to \infty$, который отвечает расширению в пустоту газа с $\kappa = 1$, будем иметь

$$U^{\circ} \equiv \xi^{\circ}, \quad R^{\circ} \equiv 0, \quad 0 \leqslant \xi^{\circ} \leqslant \infty \tag{4.12}$$

Второе интегральное условие (2.4) в задаче о поршне не выполняется, ибо газ совершает работу и его энергия не сохраняется. Если же это условие переписать с учетом принятого способа перехода к безразмерным величинам и того, что в исследуемом случае $h = h_0 +$

$+a_0^2\ln(\rho/\rho_0)$, то из него для работы газа A найдем

$$A = ma_0^2\left[\ln\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{1+\nu}{2(3+\nu)}\left(\frac{c}{a_0}\right)^2\right]$$

Данная формула может использоваться, начиная с таких t, а следовательно, и ρ, для которых течение достаточно близкó к автомодельному решению с $R°(\xi) \equiv \mathrm{const} \neq 0$.

При выводе (4.9) предполагалось, что $s \equiv s_0 \equiv \mathrm{const}$. Это заведомо верно в предельном случае $c = \infty$. Поэтому, применив найденное выше решение с $R°(\xi°) = \mathrm{const}$ непосредственно к данному случаю и учтя, что на "границе" (при $\xi° = \infty$) плотность обращается в нуль, сразу придем к (4.12). Правда, при таком подходе полученный результат может показаться странным, как и граница $\partial\Omega$, мгновенно переместившаяся в бесконечность. Но уж таков газ с $\kappa = 1$.

Как уже отмечалось, связь $R°(\xi°)$ и $R(\xi)$ при $c \to \infty$ дается равенством (4.6), показывающим непротиворечивость соответствующих представлений. Что же касается задачи о поршне с $c < \infty$, то в ней полностью автомодельное решение (4.7) с $R°(\xi°) \equiv (1 + \nu)\varepsilon^{1+\nu}$, "забывшее" начальный неавтомодельный этап, менее точно и содержательно, чем также описывающие разлет газа автомодельное лишь по скорости решение "первого приближения" (2.1) и неавтомодельное решение "второго приближения" (4.5).

5. Подход, примененный в разд. 3, позволяет учесть влияние гравитации на сферически симметричный разлет газа. Уравнение движения в этом случае имеет вид [11, 14]

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\pi G}{x^2}\int_0^x \rho x^2 dx = 0 \qquad (5.1)$$

где G – гравитационная постоянная.

Если, несмотря на наличие гравитации, в газе реализуется режим разлета, то в первом приближении третьим слагаемым в (5.1) можно пренебречь, а затем действовать так же, как в разд. 3. В результате вместо (3.10) и (3.13) получим:

$$U(\xi_i, t) = \xi_i + \delta_i + \frac{\varphi_i}{n}\left[\frac{1}{(ct_i)^n} - \frac{1}{(ct)^n}\right] + \frac{f_i}{ct}\ln\frac{t}{t_i} \qquad (5.2)$$

$$x(\xi_i, t) = x_i + \left[\xi_i + \delta_i + \frac{\varphi_i}{n(ct_i)^n} + \frac{f_i}{ct_i}\right]c(t - t_i) + \varphi_i[\Lambda(ct) - \Lambda(ct_i)] -$$

$$-f_i\ln\frac{t}{t_i} \simeq x_i\alpha_i\frac{t}{t_i}\left[1 - \frac{\delta_i t_i}{\xi_i t} + \frac{\varphi_i}{\xi_i}\Psi - \frac{f_i}{\alpha_i\xi_i ct}\left(1 + \ln\frac{t}{t_i}\right)\right]$$

$$\rho(\xi_i, t) = \frac{\rho_i}{\alpha_i^\nu\beta_i}\left(\frac{t_i}{t}\right)^{1+\nu}\left[1 - \frac{\delta_i t_i}{\xi_i t} + \frac{\varphi_i}{\xi_i}\Psi - \frac{f_i}{\alpha_i\xi_i ct}\left(1 + \ln\frac{t}{t_i}\right)\right]^{-\nu} \times$$

$$\times\left[1 - \delta_i'\frac{t_i}{t} + \varphi_i'\Psi - \frac{f_i'}{\beta_i ct}\left(1 + \ln\frac{t}{t_i}\right)\right]^{-1},$$

$$f(\xi) = -\frac{4\pi mG}{c^2\xi^2}\int_0^\xi R(\xi)\xi^2 d\xi$$

$$\alpha_i = 1 + \frac{\delta_i}{\xi_i} + \frac{\varphi_i}{\xi_i n(ct_i)^n} + \frac{f_i}{\xi_i ct_i}, \quad \beta_i = 1 + \delta_i' + \frac{\varphi_i'}{n(ct_i)^n} + \frac{f_i'}{ct_i}$$

Здесь δ, φ, Λ и Ψ – те же, что в (3.10), $f_i = f(\xi_i)$, а штрихами по-прежнему обозначены производные по ξ_i. Формулы "второго приближения", описывающие разлет гравитирующего газа с $\kappa = 1$, получаются из (5.2) при $c \to \infty$ и не отличаются от (4.5). Вопрос о том, реализуется ли в гравитирующем газе режим почти инерционного разлета, определяется эволюцией течения на его начальном этапе [11, 14].

Автор благодарит А.Л. Ни за обсуждение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–17514).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А.Н.* О свободном нестационарном расширении идеального газа // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 155–163.
2. *Ладыженский М.Д.* О некоторых свойствах гиперзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1960. Вып. 778. 24 с.
3. *Ладыженский М.Д.* О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 296–299.
4. *Гусев В.Н., Ладыженский М.Д.* Газодинамический расчет ударных труб и гиперзвуковых сопел в условиях равновесной диссоциации и ионизации воздуха // Тр. ЦАГИ. 1960. Вып. 779. 39 с.
5. *Ладыженский М.Д.* Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 2. С. 289–299.
6. *Ладыженский М.Д.* О гиперзвуковых течениях в соплах // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 99–105.
7. *Ладыженский М.Д.* Пространственные гиперзвуковые течения газа. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.
8. *Крайко А.Н., Шеломовский В.В.* О свободном расширении двумерных струй идеального газа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 271–280.
9. *Лифшиц Ю.Б., Маревцева Н.А.* О свободном расширении трехмерных струй идеального газа // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 428–432.
10. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
11. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
12. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 208 с.
13. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 351 с.
14. *Богоявленский О.И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.1993