УДК 551.324

© 1994 г. С.Л. Тонконог, В.А. Чугунов, Л.Д. Эскин

МЕТОДЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧЕ О РАСТЕКАНИИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ НЕЛИНЕЙНОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Получены асимптотические формулы, описывающие динамику свободной поверхности тонкой пленки и закон движения ее границы при растекании слоя нелинейновязкой жидкости на горизонтальном основании и наличии эффекта проскальзывания. Приводятся результаты расчетов.

1. Постановка задачи. Динамика пленочных течений нелинейновязких жидкостей со степенным реологическим законом описывается в одномерном приближении уравнением [1, 2]

$$\partial l / \partial t = \partial q^{\varepsilon} / \partial x, \quad t > 0, \quad 0 < x < x_0 \tag{1.1}$$

где $l(x, t)$ – толщина пленки, q^{ε} – поток жидкости

$$q^{\varepsilon} = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)\left(\frac{l^{2+n}}{n+2}\left|\frac{\partial l}{\partial x}\right|^{n} + \varepsilon l^{1+m}\left|\frac{\partial l}{\partial x}\right|^{m}\right), \quad n > m \tag{1.2}$$

постоянная n определяется реологическим законом, а ε, m – законом проскальзывания пленки относительно ложа, предполагаемого здесь плоским.

Отметим, что после перехода к безразмерным переменным в приложениях обычно оказывается $\varepsilon \ll 1$ [1]. Здесь предполагается, что это условие выполнено.

Уравнение (1.1) будет рассматриваться с граничными условиями

$$x = 0: \quad \partial l / \partial x = 0 \ (\text{следовательно, } q^{\varepsilon} = 0) \tag{1.3}$$

$$x = x_0(t) \ (\text{точка фронта}): \ l = 0, \ q^{\varepsilon} = 0 \tag{1.4}$$

$$t = 0: \quad l = M\delta(x) \tag{1.5}$$

где M – масса жидкости, приходящаяся на единицу ширины пленки, $\delta(x)$ – дельта функция. (Граничные условия (1.3), (1.4) обеспечивают возможность четного продолжения решения l в область $x < 0$ с сохранением гладкости при $x = 0$.)

Смешанная задача (1.1)–(1.5) описывает процесс растекания неньютоновской жидкости, сосредоточенной в начальный момент вдоль оси $x = 0$. Отсутствие стоков при $x = 0$ и $x = x_0(t)$ обеспечивает сохранение массы растекающейся пленки, откуда

$$\int_0^{x_0(t)} l(x,t)dx = \frac{1}{2}M \tag{1.6}$$

Наряду с (1.1) будем рассматривать и невозмущенное уравнение

$$\partial l / \partial t = \partial q^0 / \partial x \tag{1.7}$$

где поток q^0 получается из (1.2) при $\varepsilon = 0$.

Было показано [2], что невозмущенное уравнение (1.7) инвариантно относительно группы растяжений с инфинитезимальным оператором

$$X_{\lambda} = t(1 + \lambda(n+1))\frac{\partial}{\partial t} + (2+\lambda)x\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial l} \tag{1.8}$$

причем только автомодельное решение уравнения (1.7), инвариантное относительно группы с оператором (1.8) при $\lambda = -3$, удовлетворяет условиям (1.3)–(1.5), а следовательно, и условию сохранения массы. Это решение уравнения (1.7) находится в замкнутой форме [2]

$$l(x,t) = D_n t^{-\alpha}(\xi_0^{1+1/n} - \xi^{1+1/n})^{\beta}, \quad 0 < \xi < \xi_0 \tag{1.9}$$

$$\xi = xt^{-\alpha}, \quad D_n = (\alpha^{1/n}\gamma^{-1})^{\beta}, \quad x_0(t) = \xi_0 t^{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{1}{3n+2}, \quad \beta = \frac{n}{2n+1}, \quad \gamma = \frac{n+1}{2n+1}$$

Постоянная ξ_0 находится из условия сохранения массы (1.6).

Однако наличие проскальзывания разрушает симметрию (1.8). Возмущенное уравнение (1.1) не инвариантно относительно группы растяжений с оператором X_λ, но, как показано в [2], допускает группу растяжений с оператором

$$X = (m-2n-1)t\frac{\partial}{\partial t} + (2m-2n-1)x\frac{\partial}{\partial x} + (m-n)\frac{\partial}{\partial l} \tag{1.10}$$

К сожалению, решение уравнения (1.1), инвариантное относительно этой группы, не может удовлетворять закону сохранения (1.6) и, следовательно, не может быть решением задачи (1.1)–(1.5) о свободном растекании пленки.

Ниже развит алгоритм решения задачи (1.1)–(1.5),основанный на построении асимптотического разложения при $\varepsilon \ll 1$ решения, инвариантного относительно группы растяжений, допускаемой уравнением (1.1) и преобразующей не только t, x, l, но и параметр ε. Отметим, что такие группы использовались в [3] для исследования нелинейного волнового уравнения.

2. Построение группы преобразований. Инфинитезимальный оператор группы растяжений, действующей на переменные t, x, l, параметр ε и оставляющей инвариантным уравнение (1.1), будем искать в виде (обобщение (1.8) при $\lambda = -3$)

$$Y = -(3n+2)t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial l} + s\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

где постоянная s подлежит определению. Оператор Y порождает группу растяжений

$$\tilde{t} = \omega^{-(3n+2)}t, \quad \tilde{x} = \omega^{-1}x, \quad \tilde{l} = \omega l, \quad \tilde{\varepsilon} = \omega^{s}\varepsilon \tag{2.1}$$

Из условия инвариантности уравнения (1.1) относительно группы (2.1) находим $s = 3(n-m) + 1$:

$$Y = -(3n+2)t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial l} + (3(n-m)+1)\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tag{2.2}$$

после чего получим три независимых инварианта группы

$$I_1 = \xi = xt^{-\alpha}, \quad I_2 = \eta = \varepsilon t^{\alpha(1+3(n-m))}, \quad I_3 = lt^{\alpha}$$

Представляя стандартным образом инвариантное решение уравнения (1.1) в виде $I_3 = \psi(\xi,\eta)$, найдем

$$l = t^{-\alpha}\psi(\xi,\eta) \tag{2.3}$$

Считая функцию l монотонно-убывающей по x и подставляя (2.3) в (1.1), получим уравнение для неизвестной функции ψ

$$\alpha[\psi + \xi\psi_\xi - (1+3(n-m))\eta\psi_\eta] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\psi^{n+2}(-\psi_\xi)^n}{n+1} + \eta\psi^{m+1}(-\psi_\xi)^m\right) \tag{2.4}$$

Закон движения границы $x_0 = x_0(t)$ в новых переменных ξ, η запишется в виде $\xi_0 = g(\eta)$, где $g(\eta)$ – новая неизвестная функция, подлежащая определению вместе с ψ. При решении краевых задач удобнее иметь дело с фиксированными границами, поэтому вместо независимой переменной ξ введем новую: $z = \xi/g(\eta)$. Перейдя в уравнении (2.4) к переменным z, η и сохраняя за неизвестной функцией старое обозначение $\psi(z, \eta)$, получим из (2.4) уравнение

$$\alpha\left[\psi + z\psi_z - (1+3(n-m))\eta\left(\psi_\eta - \frac{z\psi_z g_\eta}{g}\right)\right] = \frac{\partial q}{\partial z} \tag{2.5}$$

Закон сохранения массы (1.6) приводит для функции $\psi(z, \eta)$ к соотношению

$$g(\eta)\int_0^1 \psi(z,\eta)dz = \frac{1}{2}M \tag{2.6}$$

а граничные условия (1.3), (1.4) запишутся в виде

$$z = 0{:}\ \partial\psi/\partial z = 0; \quad z = 1{:}\ \psi = 0, \quad q = 0 \tag{2.7}$$

Здесь и в (2.5) поток q определяется формулой

$$q = \frac{\psi^{n+2}(-\psi_z)^n}{(n+2)g^{n+1}} + \eta\frac{\psi^{m+1}(-\psi_z)^m}{g^{m+1}} \tag{2.8}$$

3. Решение задачи. Решение $\psi(z, \eta)$ граничной задачи (2.5), (2.7) будем искать в виде ряда по степеням инварианта η, в аналогичном виде будем искать и неизвестную функцию $g(\eta)$. Здесь ограничимся вычислением с точностью $O(\eta^2)$, поэтому запишем

$$\psi(z,\eta) = \upsilon(z) + \eta u(z) + O(\eta^2), \quad g(\eta) = a + b\eta + O(\eta^2) \tag{3.1}$$

с неизвестными функциями $\upsilon(z)$, $u(z)$ и постоянными (не зависящими от z) коэффициентами a, b. Подставляя (3.1) в уравнение (2.5), предварительно умноженное на $g^{n+1}(\eta)$, и сравнивая коэффициенты при η^0, η в полученном равенстве, найдем уравнения для определения неизвестных функций υ, u

$$\alpha a^{n+1}(\upsilon + z d\upsilon/dz) = dq_0/dz \tag{3.2}$$

$$\alpha[a^{n+1}(zu)_z + (n+1)a^n b(z\upsilon)_z - (1+3(n-m))(a^{n+1}u - a^n bz\upsilon_z)] = dq_1/dz \tag{3.3}$$

Здесь

$$q_0 = \upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^n/(n+2) \tag{3.4}$$

$$q_1 = \upsilon^{m+1}(-\upsilon_z)^m a^{n-m} + [(n+2)\upsilon^{n+1}u(-\upsilon_z)^n - n\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^{n-1}u_z]/(n+2) \tag{3.5}$$

Граничные условия (2.7), (2.8) дают после подстановки в них выражений (3.1) и расщепления по степеням η следующие условия:

$$z = 0{:}\ \upsilon_z = 0; \quad z = 1{:}\ \upsilon = 0, \quad q_0 = 0 \tag{3.6}$$

для уравнения (3.2) и

$$z = 0{:}\ u_z = 0; \quad z = 1{:}\ u = 0, \quad q_1 = 0 \tag{3.7}$$

для уравнения (3.3).

Наконец, из закона сохранения масс (2.6) получаем

$$\int_0^1 \upsilon(z)dz = \frac{1}{2a}M, \quad \int_0^1\left(\upsilon + \frac{a}{b}u\right)dz = 0 \tag{3.8}$$

причем второе равенство (3.8) является непосредственным следствием (3.3) и граничных условий (3.6), (3.7), в чем можно убедиться, интегрируя в обеих частях уравнения (3.3) по z от 0 до 1.

Уравнение (3.2) – нелинейное уравнение для $\upsilon(z)$ допускает понижение порядка, и его единственное решение, удовлетворяющее граничным условиям (3.6), находится в замкнутой форме

$$\upsilon(z)=C_n a^{\gamma}(1-z^{1+1/n})^{\beta},\quad C_n=[\gamma^{-1}((n+2)\alpha)^{1/n}]^{\beta} \tag{3.9}$$

Неизвестная постоянная a находится из первого условия (3.8), которое после подстановки в него выражения (3.9) дает уравнение для определения a. Окончательно получим

$$a=\left[\frac{M(n+1)}{2nC_n}\left(B\left(\frac{3n+1}{n+1},\ \beta\right)\right)^{-1}\right]^{(n+1)\alpha/\gamma} \tag{3.10}$$

(B – бета-функция Эйлера.)

Итак, найдены члены нулевого порядка в разложениях (3.1). Перейдем к определению неизвестной функции u и коэффициента b.

Уравнение (3.3) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка относительно u, коэффициенты которого выражаются через функцию υ и ее производные до второго порядка включительно и константы a, b. Отметим, что для остальных коэффициентов разложения $\psi(z,\eta)$ по степеням η так же, как и для функции u, получаются линейные уравнения второго порядка. Введем новую неизвестную функцию $w=u+ba^{-1}\upsilon$, после чего уравнение (3.3) принимает вид

$$\alpha(1+3(n-m))a^{n+1}w=\frac{d}{dz}(q_1-\alpha zua^{n+1}-\alpha(4n-3m+2)a^n bz\upsilon) \tag{3.11}$$

Подставляя в правую часть (3.11) q_1 из (3.5) и заменяя u на $w-ba^{-1}\upsilon$, получим при учете (3.2) и (3.4) уравнение для w

$$\begin{gathered}-\alpha(1+3(n-m))a^{n+1}w=\frac{d}{dz}\left[\upsilon^{n+1}(-\upsilon_z)^n w-\alpha a^{n+1}zw-\frac{n}{n+2}\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^{n-1}w_z\right]+f\\ f=\frac{d}{dz}[\upsilon^{m+1}(-\upsilon_z)^m a^{n-m}-3\alpha(2n-m+1)a^n bz\upsilon]\end{gathered} \tag{3.12}$$

Из (3.6), (3.7) следуют граничные условия

$$z=0: w_z=0;\quad z=1: w=0 \tag{3.13}$$

для функции w. Коэффициенты уравнения (3.12) вычисляются при помощи (3.9). В результате получаем

$$\begin{gathered}\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^{n-1}=(n+2)\alpha\gamma^{-1}a^{n+1}z^{1-1/n}(1-z^{1+1/n}),\quad \upsilon^{n+1}(-\upsilon_z)^n=(n+2)\alpha a^{n+1}z\\ \upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^n=(n+2)\alpha C_n a^{2\gamma}z(1-z^{1+1/n})^{\beta}\\ \upsilon^{m+1}(-\upsilon_z)^m=(C_n a^{\gamma})^{2m+1}\gamma^m z^{m/n}(1-z^{1+1/n})^{\delta},\quad \delta=\frac{n-m}{2n+1}\end{gathered} \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.14) следует, что уравнение (3.12) можно переписать в виде

$$(3(n-m)+1)w=\frac{d}{dz}[n\gamma^{-1}z^{1-1/n}(1-z^{1+1/n})w_z-(n+1)zw]-\frac{f(z)}{\alpha a^{n+1}} \tag{3.15}$$

причем его коэффициенты имеют лишь алгебраическую особенность (точку ветвления) при $z=0$ и $z=1$ и в окрестности $z=1$ разлагаются в степенные ряды вида

$$(z-1)^{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-1)^k \tag{3.16}$$

Далее понадобятся старшие члены разложений

$$z^{1-1/n}(1-z^{1+1/n})\sim\frac{n+1}{n}(1-z),$$

$$\upsilon^{m+1}(-\upsilon_z)^m\sim(C_n a^{\gamma})^{2m+1}\gamma^m\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\delta}(1-z)^{\delta} \tag{3.17}$$

$$\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^n\sim\beta^{-\beta}((n+2)\alpha a^{n+1})^{2\gamma}(1-z)^{\beta},\quad \upsilon\sim\beta^{-\beta}((n+2)\alpha a^{n+1})^{\beta/n}(1-z)^{\beta}$$

Общее решение неоднородного уравнения (3.16) имеет вид

$$w=Aw_1+Bw_2+w_3 \tag{3.18}$$

Здесь $w_{1,2}$ – любые два независимых решения однородного уравнения

$$(3(n-m)+1)w=\frac{d}{dz}[n\gamma^{-1}z^{1-1/n}(1-z^{1+1/n})w_z-(n+1)zw] \tag{3.19}$$

A, B – произвольные постоянные, а w_3 – любое частное решение уравнения (3.15).

Согласно известным результатам аналитической теории дифференциальных уравнений решения w_1, w_2 и w_3 также следует искать в виде разложений по степеням $z-1$, аналогичных разложениям (3.16) для коэффициентов уравнения. Полагая

$$w=(1-z)^{\tau}(1+b_1(1-z)+\ldots) \tag{3.20}$$

и подставляя это разложение в (3.19) получим, учитывая первое из соотношений (3.17), характеристическое уравнение для показателя τ

$$(2n+1)\tau^2+(n+1)\tau=0$$

откуда получаем два независимых решения уравнения (3.19), разлагающихся в окрестности $z=1$ в степенные ряды

$$w_1=(1-z)^{-\gamma}(1+b_{11}(1-z)+\ldots),\quad w_2=1+b_{21}(1-z)+\ldots \tag{3.21}$$

Частное решение неоднородного уравнения (3.15) также будем искать в виде степенного ряда

$$w_3=(1-z)^{\zeta}(c_1+c_2(1-z)+\ldots) \tag{3.22}$$

Из (3.17) следует, что старший член в разложении свободного члена уравнения (3.15) имеет вид

$$\delta\alpha^{-1}\gamma^m\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\delta}C_n^{2m+1}a^{2\gamma(m-n)}(1-z)^{\delta-1} \tag{3.23}$$

Подставляя разложение (3.22) в уравнение (3.15), найдем показатель ζ и коэффициент c_1, остальные коэффициенты c_i $i\geqslant 2$ не понадобятся. Получим при учете (3.17), (3.23)

$$\zeta=\delta>0,\quad c_1=-\frac{2n+1}{\alpha(2n+1-m)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\delta}C_n^{2m+1}a^{-\delta} \tag{3.24}$$

Поскольку $\zeta>0$, то из (3.21), (3.22) следует, что граничное условие (3.13) при $z=1$ для решения w уравнения (3.15), определенного соотношением (3.18), будет выполнено, только если в (3.18) положить $A=B=0$.

Проверим теперь, что функция $u = w_3 - ba^{-1}\upsilon$ удовлетворяет второму граничному условию в точке $z = 1$, а именно условию $q_1 = 0$ в (3.7). Учитывая, что при $z = 1$ имеем $u = 0$, а $n > m$, при помощи (3.14) убеждаемся, что в точке $z = 1$ обращаются в нуль первые два слагаемых в выражении (3.5) для q_1. Остается проверить, что и последнее слагаемое в (3.5) $\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^{n-1}u_z$ также равно нулю при $z = 1$. Имеем

$$\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^{n-1}u_z = \upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^{n-1}(w_3)_z + ba^{-1}\upsilon^{n+2}(-\upsilon_z)^n \tag{3.25}$$

Второе слагаемое в правой части (3.25) обращается в нуль при $z = 1$ в силу (3.14), а первое слагаемое в окрестности $z = 1$ разлагается в степенной ряд по степеням $1 - z$, причем старший член этого разложения равен $d(1-z)^\zeta$ (d – несущественная постоянная), в чем нетрудно убедиться с помощью (3.14), (3.17) и (3.22). Так как $\zeta > 0$, то и первое слагаемое в правой части (3.25) равно нулю при $z =1$.

Решение $w = w_3$ уравнения (3.18) (а вместе с ним и функция u) зависит от коэффициента b в разложении (3.1). Этот коэффициент определяется единственным образом граничным условием $w_z = 0$ при $z = 0$.

Заметим теперь, что при $t \to 0$ точка фронта $x_0(t) = t^\alpha g(\eta)$ стремится к нулю, т.е. носитель построенного решения стягивается к началу координат. Отсюда следует, что построенное решение, удовлетворяющее закону сохранения (1.6), автоматически будет удовлетворять и начальному условию (1.5).

Укажем простой и удобный способ вычисления коэффициента b в разложении (3.1) для $g(\eta)$ (именно этот коэффициент определяет вместе с параметром a с точностью $O(\eta^2)$ влияние проскальзывания). С этой целью заметим, прежде всего, что функция $f(z)$ – свободный член уравнения (3.15) имеет вид

$$f(z) = f_1(z) + bf_2(z)$$

$$f_1 = a^{n-m}(\upsilon^{m+1}(-\upsilon_z)^m)_z, \quad f_2 = -3a^n\alpha(2n-m+1)(z\upsilon)_z$$

Функции $f_{1,2}$ и коэффициенты однородного уравнения (3.19) не зависят от b. В силу линейности уравнения (3.15) следует, что его решение w_3 представляется в виде

$$w_3 = w_{31}(z) + bw_{32}(z) \tag{3.26}$$

где w_{31}, w_{32} – соответственно решения уравнения (3.15), в котором $f(z)$ заменяется сначала на $f_1(z)$, а затем на $f_2(z)$. Эти решения уже не зависят от b и из (3.26) и граничного условия $(w_3)_z = 0$ при $z = 0$ находим

$$b = -(w_{31})_z / (w_{32})_z \tag{3.27}$$

Так как старший член разложения $f_1(z)$ по степеням $1 - z$ совпадает со старшим членом разложения $f(z)$, то совпадают и старшие члены разложений w_3 и w_{31}, т.е.

$$w_{31} \sim C_1(1-z)^\zeta, \quad z \to 1 \tag{3.28}$$

(ζ, c_1 определяются соотношением (3.24)). Для производной получим

$$(w_{31})_z \sim -\zeta c_1(1-z)^{\zeta-1}, \quad z \to 1 \tag{3.29}$$

Старший член разложения по степеням $1 - z$ функции f_2 находится с помощью соотношения из (3.17) для υ и имеет вид

$$f_2 \sim c_2(1-z)^{-\gamma}, \quad c_2 = 3(\gamma+\delta)\gamma^{-\beta}((n+2)\alpha)^{\beta/n}a^{-\beta}$$

Теперь получаем и старшие члены разложений по степеням $1 - z$ решения w_{32} и его производной $(w_{32})_z$

$$w_{32} \sim \frac{c}{n}(1-z)^\beta, \quad (w_{32})_z \sim -\frac{c}{2n+1}(1-z)^{-\gamma}$$

$$c = -3(2n-m+1)\beta^\gamma((n+2)\alpha)^{\beta/n}a^{-\beta} \tag{3.30}$$

Асимптотические представления (3.28)–(3.30) дают возможность приближенно найти начальные данные задачи Коши в точке $z = 1 - \varepsilon$ (ε – достаточно малое число), которые позволяют численными методами найти с необходимой точностью решения w_{31}, w_{32} и их производные при $z = 0$, а затем при помощи (3.27) и величину коэффициентов b. Результаты вычислений параметра b в зависимости от параметра m в законе проскальзывания представлены на фигуре.

Немонотонный характер зависимости $b = b(m)$ (кривая имеет единственный минимум) можно легко объснить, если учесть, что в используемой здесь (и общепринятой в настоящее время [4]) модели проскальзывания безразмерная скорость скольжения равна $\upsilon_0 = \varepsilon\sigma^m$ ($\sigma = l\,|\,\partial l/\partial x\,|$ – сдвиговое напряжение). Очевидно, что величина σ значительна в краевой зоне вблизи точки фронта $x = x_0(t)$, так как $\partial l/\partial x \to \infty$ при $x \to x_0(t)$, и наоборот $\partial l/\partial x \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, увеличение m резко увеличивает скорость проскальзывания в краевой зоне, что влечет рост коэффициента b. Уменьшение m, с одной стороны, уменьшает скорость проскальзывания по абсолютной величине в краевой зоне, но с другой стороны, расширяет область, в которой проскальзывание существенно. Когда второй фактор становится превалирующим над первым, вновь начинается возрастание параметра b.

В заключение отметим, что имеет место простая степенная зависимость b от a, т.е. от массы пленки и параметра n реологического закона. Действительно, из соотношений (3.9), (3.14) получаем, что

$$f_1(a) = f_1(1)a^{\varphi}, \quad f_2(a) = f_2(1)a^{\chi}$$

$$\varphi = \frac{2n^2+2n+m+1}{2n+1}, \quad \chi = \frac{2n^2+2n+1}{2n+1}$$

Очевидно, аналогичное соотношение определяет заависимость от параметра a решений w_{31}, w_{32} и их производных по независимой переменной z. Отсюда в силу соотношения (3.27) получаем

$$b(a) = b(1)a^{m/(m+1)}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01191).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ritz C.* Un modele thermo-mecanique d'evolution pour le bassin glaciaire antarctique Vostok-Glacier Byrd: sensibilite aux valeurs des parametres mal connus // These Doctorat d'Etat. Centre national de la recherche scientifique. Laboratoire de Glaciologie et Geophysique de l'Environnement. 1992. 377 p.
2. *Саламатин А.Н., Чугунов В.А., Мазо А.Б.* Численные и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении // Задачи механики природных процессов. М: Изд-во МГУ, 1983. С. 82–96.
3. *Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Методы возмущений в групповом анализе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 34. С. 85–147.
4. *Kamb B.* Sliding Motion of Glaciers: Theory and Observation. Revs Geophys. and Space Phys. 1970. V. 8. № 4, P. 673–728.

Казань

Поступила в редакцию
11.I.1994