УДК 532.5

© 1994 г. С.В. Мелешко

# ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

Предлагается обобщение определения группы эквивалентностей и дается групповая классификация системы уравнений, описывающей двумерные течения идеального газа [1]. Частным случаем таких движений являются плоские течения, которые с групповой точки зрения изучались ранее [2–4]. Используемый алгебраический подход опирается на анализ, развиваемый в последнее время [5–6].

**1. Факторсистема.** Рассматривается решения уравнений газовой динамики, инвариантные относительно оператора $X_1$ из оптимальной системы подалгебр алгебры $L_{11}$ [5]. Для простоты сравнения с имеющимися результатами по плоским течениям изложение материала проводится для подобного ему оператора $X_3 = \partial_z$, инварианты которого: $t, x, y, u, \upsilon, w, \rho, p$. Используются обычные обозначения $t$ – время, $(x, y, z)$ – пространственные координаты, $U = (u, \upsilon, w)$ – скорость, $\rho$ – плотность, $p$ – давление газа. Инвариантное решение имеет представление

$$U = U(t,x,y), \quad \rho = \rho(t,x,y), \quad p = p(t,x,y)$$

а факторсистема:

$$\begin{gathered} d_1U + \rho^{-1}\nabla_1 p = 0, \quad d_1\rho + \rho\,\mathrm{div}_1 U = 0 \\ d_1 p + A(p,\rho)\,\mathrm{div}_1 U = 0 \\ (d_1 = \partial_t + u\partial_x + \upsilon\partial_y, \quad \nabla_1 = (\partial_x, \partial_y, 0), \quad \mathrm{div}_1 U = u_x + \upsilon_y) \end{gathered} \tag{1.1}$$

Частные решения системы (1.1) с $w = 0$ описывают плоскопараллельные течения газа в плоскости $R^2(x, y)$.

**2. Группа эквивалентностей.** Для задач групповой классификации существенно определение таких преобразований, которые изменяют произвольные элементы, содержащиеся в уравнениях, сохраняя дифференциальную структуру самих уравнений.

Здесь будет дано построение группы преобразований эквивалентности, которая является более широкой, чем используемая в [7]. Обобщение достигается за счет включения произвольных элементов во все координаты инфинитезимального оператора, с помощью которого выстраивается группа эквивалентности. При этом расширяются возможности для выбора представителя в групповой классификации. Для простоты изложения идеи обсуждение проводится на примере дифференциального уравнения

$$F(x, u, \phi, u_x) = 0 \tag{2.1}$$

где $x = (x, y)$ – независимые переенные, $u = u(x)$ – искомая функция, $\phi = \phi(u, x)$ – произвольный элемент. Ищется однопараметрическая группа непрерывных преобразований

$$x' = f^x(x,u,\phi;a), \quad u' = f^u(x,u,\phi;a), \quad \phi' = f^\phi(x,u,\phi;a) \tag{2.2}$$

с групповым параметром $a$ и инфинитезимальным оператором

$$X^e = \xi^x\partial_x + \xi^y\partial_y + \zeta^u\partial_u + \zeta^\phi\partial_\phi \tag{2.3}$$

Предполагается, что все координаты инфинитезимального оператора $X^e$ зависят от $(x, u, \phi)$ в отличие от подхода работы [7], где таковой является только компонента $\zeta^\phi$. Функции $\phi(u, x)$ и $u(x)$ действуют в различных пространствах, поэтому, прежде чем выписывать формулы для координат продолженного оператора $X^e$, необходимо понять, как функции $\phi(u, x)$, $u(x)$ преобразуются под действием группы (2.2), на которую накладывается следующее ограничение. Любое решение $u_0(x)$ уравнения (2.1) с функцией $\phi(u, x)$ под действием (2.2) переходит снова в решение уравнения вида (2.1), но с другой (преобразованной) функцией $\phi_a(u, x)$, которая определяется обычным образом. А именно, разрешая относительно $(x, u)$ соотношения

$$x' = f^x(x, u, \phi(u, x); a), \quad u' = f^u(x, u, \phi(u, x); a)$$

находятся

$$x = g^x(x', u'; a), \quad u = g^u(x', u'; a) \tag{2.4}$$

после чего определяется преобразованная функция $T_a(\phi)$:

$$\phi_a(u', x') = f^\phi(x, u, \phi(x, u); a)$$

где вместо $(x, u)$ подставлены их выражения (2.4). Преобразованное решение $T_a(u) = u_a(x)$ получается разрешением соотношений

$$x' = f^x(x, u_0(x), \ \phi(u_0(x), x); a)$$

относительно $x = \psi^x(x'; a)$ и подстановки их в

$$u_a(x') = f^u(u, u_0(x), \ \phi_a(u_0(x), x); a)$$

*Лемма.* Построенные таким образом преобразования $T_a(u)$ образуют группу.

*Доказательство.* Так как (2.2) образует однопараметрическую группу непрерывных преобразований, то по способу построения выполняется равенство $T_b(T_a(\phi)) = T_{a+b}(\phi)$. При учете этого свойства сравнение $T_b(T_a(u))$ и $T_{a+b}(u)$ завершает доказательство утверждения леммы.

В соответствии с построением продолженный оператор

$$\overline{X}^e = X^e + \zeta^{u_x}\partial_{u_x} + \zeta^{u_y}\partial_{u_y} + \zeta^{\phi_u}\partial_{\phi_u} + \zeta^{\phi_x}\partial_{\phi_x} + \zeta^{\phi_y}\partial_{\phi_y} + \ldots$$

имеет следующие координаты, связанные с зависимыми функциями:

$$\zeta^{u_\lambda} = D^e_\lambda\zeta^u - u_x D^e_\lambda\xi^x - u_y D^e_\lambda\xi^y$$

$$D^e_\lambda = \partial_\lambda + u_\lambda\partial_u + (\phi_u u_\lambda + \phi_\lambda)\partial_\phi$$

Здесь $\lambda$ принимает значения $x$, $y$. Координаты продолженного оператора $\overline{X}^e$, связанные с произвольным элементом, определяются по формулам

$$\zeta^{\phi_\lambda} = \tilde{D}^e_\lambda\zeta^\phi - \phi_x\tilde{D}^e_\lambda\xi^x - \phi_y\tilde{D}^e_\lambda\xi^y - \phi_u\tilde{D}^e_\lambda\zeta^u$$

$$\tilde{D}^e_\lambda = \partial_\lambda + \phi_\lambda\partial_\phi \quad (\lambda = u, x, y)$$

Для построения группы эквивалентностей уравнений (2.6) необходимо найти группу (2.7), допускаемую ими с продолженным оператором $\overline{X}^e$, построенным выше. При этом следует учитывать возможные специальные, заранее известные свойства произвольных элементов (например, $\phi_x = 0$).

В качестве одного из примеров расширения группы эквивалентностей при таком подходе может служить группа для системы двух уравнений с двумя независимыми переменными [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}p(u,\upsilon)=0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}=g(u,\upsilon) \tag{2.5}$$

Если осуществлять поиск группы эквивалентностей этой системы, чтобы все коэффициенты оператора могли зависеть от произвольных элементов, то к операторам из [8] добавляется еще один $p\partial_u + x\partial_t$, соответствующий преобразованию

$$u'=ap(u,\upsilon)+u, \quad \upsilon'=\upsilon, \quad x'=x, \quad t'=t+ax, \quad g'=g, \quad p'=p$$

Возвращаясь к системе (1.1), для ее групповой классификации операторы преобразований эквивалентности ищем в виде

$$X^e = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \xi^y\partial_y + \zeta^u\partial_u + \zeta^\upsilon\partial_\upsilon + \zeta^w\partial_w + \zeta^\rho\partial_\rho + \zeta^p\partial_p + \zeta^A\partial_A \tag{2.6}$$

В отличие от [7] здесь допускается зависимость от произвольного элемента $A$ во всех координатах инфинитезимального оператора $X^e$. Так как $A = A(p, \rho)$, то оператор (2.6) должен удовлетворять условиям инвариантности системы (1.1), дополненной уравнениями

$$A_t = A_x = A_y = A_u = A_\upsilon = A_w = 0 \tag{2.7}$$

Координаты продолженного оператора

$$\overline{X}^e = X^e + \zeta^{u_t}\partial_{u_t} + \zeta^{u_x}\partial_{u_x} + \zeta^{u_y}\partial_{u_y} + \ldots \tag{2.8}$$

находятся по формулам

$$\zeta^{h_\lambda} = D_\lambda^e\zeta^h - h_t D_\lambda^e\xi^t - h_x D_\lambda^e\xi^x - h_y D_\lambda^e\xi^y$$

$$D_\lambda^e = \partial_\lambda + u_\lambda\partial_u + \upsilon_\lambda\partial_\upsilon + w_\lambda\partial_w + \rho_\lambda\partial_\rho + p_\lambda\partial_p + (A_\rho\rho_\lambda + A_p p_\lambda)\partial_A$$

$$(h = u, \upsilon, w, \rho, p; \quad \lambda = t, x, y)$$

Координаты продолженного оператора (2.8), связанные с произвольным элементом, в силу (2.7) определяются по формулам

$$\zeta^{A_\lambda} = \tilde{D}_\lambda^e\zeta^A - A_\rho\tilde{D}_\lambda^e\zeta^\rho - A_p\tilde{D}_\lambda^e\zeta^p \quad (\lambda = t, x, y)$$

$$\zeta^{A_h} = \tilde{D}_h^e\zeta^A - A_\rho\tilde{D}_h^e\zeta^\rho - A_p\tilde{D}_h^e\zeta^p \quad (h = u, \upsilon, w, \rho, p)$$

$$\tilde{D}_\lambda^e = \partial_\lambda \quad (\lambda = t, x, y), \quad \tilde{D}_h^e = \partial_h \quad (h = u, \upsilon, w)$$

$$\tilde{D}_\rho^e = \partial_\rho + A_\rho\partial_A, \quad \tilde{D}_p^e = \partial_p + A_p\partial_A$$

Построенная по оператору (2.6) группа преобразований, допускаемая уравнениями (1.1), (2.7), преобразует систему (1.1), сохраняя ее дифференциальную структуру и изменяя только произвольный элемент $A$.

Для системы (1.1) группа эквивалентностей совпадает с классической, когда от произвольных элементов предполагается зависимость только коэффициентов инфинитезимального оператора, стоящих при производных от произвольных элементов [7]. Она порождается операторами

$$\partial_x, \partial_y, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad t\partial_y + \partial_\upsilon$$

$$x\partial_y - y\partial_x + u\partial_\upsilon - \upsilon\partial_u,\quad \partial_t,\quad t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$$

$$x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + \upsilon\partial_\upsilon - 2\rho\partial_\rho,\quad \rho\partial_\rho + p\partial_p + A\partial_A,\quad \partial_p,\quad \phi(w)\partial_w$$

*Замечание*. Как будет видно ниже, в допускаемой алгебре для произвольной функции $A(p, \rho)$ имеется оператор $\phi(w, S)\partial_w$, где $S$ – некоторая функция, зависящая от $p$ и $\rho$ и удовлетворяющая уравнению

$$\rho S_\rho + AS_p = 0 \tag{2.9}$$

Этот оператор получится и в группе эквивалентностей, если добавить еще один произвольный элемент $S = S(p, \rho)$, а к уравнениям (1.1), (2.7) добавить (2.9) и

$$S_t = S_x = S_y = S_u = S_\upsilon = S_w = 0 \tag{2.10}$$

В этом случае группа эквивалентностей расширяется только на операторы $\phi\partial_w$ и $F\partial_S$ с функциями $\phi = \phi(w, S)$, $F = F(w, S, p - A\ln\rho)$. Применение алгоритма [7] поиска группы эквивалентностей для уравнений (1.1), (2.9), (2.10) этих операторов не дает.

**3. Допускаемая группа.** Допускаемый системой (1.1) оператор представляется в виде

$$X = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \xi^y\partial_y + \zeta^u\partial_u + \zeta^\upsilon\partial_\upsilon + \zeta^w\partial_w + \zeta^\rho\partial_\rho + \zeta^p\partial_p$$

Интегрирование определяющих уравнений сводится к решению уравнений

$$2(c_8 - c_3 + tc_4)\rho\frac{\partial A}{\partial \rho} + \sigma_2\frac{\partial A}{\partial p} + \sigma_1\left(\rho\frac{\partial A}{\partial \rho} + p\frac{\partial A}{\partial p} - A\right) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = 2c_4(2p - A)$$

Здесь

$$\xi^t = c_4t^2 + c_8t + c_9,\quad \zeta^w = \phi(w, S),\quad \xi^x = c_1t - c_2y + c_3x + c_4tx + c_6$$

$$\xi^y = c_5t + c_2x + c_3y + c_4ty + c_7,\quad \zeta^u = -c_2\upsilon + c_3u + c_4x - 2c_4tu - c_8u$$

$$\zeta^\upsilon = c_2u + c_3\upsilon + c_4y - 2c_4t\upsilon - c_8\upsilon$$

$$\zeta^\rho = -\rho(\sigma_1 + c_8 + 2c_4t),\quad \zeta^p = p\sigma_1(t) + \sigma_2(t),\quad \sigma_1 = -4c_4t + c_{10}$$

Ядро основных алгебр Ли составляют операторы

$$X_w = \phi(w, S)\partial_w,\quad X_1 = \partial_x,\quad X_2 = \partial_y$$

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,\quad X_5 = t\partial_y + \partial_\upsilon$$

$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_\upsilon - \upsilon\partial_u,\quad X_{10} = \partial_t,\quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$$

Здесь сохранена нумерация операторов из [5]; $S$ – энтропия, т.е. некоторая функция, зависящая от $p$ и $\rho$, удовлетворяющая уравнению (2.9).

Групповая классификация системы (1.1) совпадает с групповой классификацией плоскопараллельных течений газа [3]. Отличие групповых свойств системы (1.1) состоит в том, что она допускает дополнительные операторы $X_w = \phi\partial_w$ с произвольной функцией $\phi(w, S)$, составляющие центр. Допускаемая алгебра Ли раскладывается в прямую сумму $L = L_7 \oplus L_\infty^w$, где $L_\infty^w$ состоит из операторов $X_w$. Расширение ядра основных алгебр Ли происходит за счет специализации функции $A(p, \rho)$. Итоги групповой классификации, с точностью до видов расширяющих операторов, совпадают с таблицей 1 из [5]. В ней расширяющими операторами следует считать:

$$Y_1 = t\partial_t - u\partial_u - \upsilon\partial_\upsilon + 2\rho\partial_\rho,\quad Y_2 = \rho\partial_\rho + p\partial_p,\quad Y_3 = \partial_p$$

$$Y_4 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + (x - tu)\partial_u + (y - t\upsilon)\partial_\upsilon - 2t\rho\partial_\rho - 4tp\partial_p$$

$$Y_\phi = \rho\phi'(p)\partial_\rho + \phi(p)\partial_p$$

с произвольной функцией $\phi(p)$.

Заметим, что факторалгебра нормализатора оператора $X_3$ в $L_{11}$ по $X_3$ $(Nor_{L_{11}}(X_3)/X_3)$ состоит из операторов (здесь и ниже будут указываться только номера операторов): (1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11), которые в инвариантах оператора $X_3$ принимают значения (выписаны только изменившиеся операторы)

$$X_6 = \partial_w,\quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$$

**4. Оптимальная система подалгебр**. Трудность построения оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры $L$ связана с наличием оператора $X_w$. Универсальный инвариант бесконечномерной подалгебры алгебры $L$ не зависит от $w$, поэтому для нее инвариантных решений системы (1.1) нет, а частично инвариантные решения определяются ее конечномерной подалгеброй $L_k$ алгебры $L_7 = \{1, 2, 4, 5, 9, 10, 11\}$. Поэтому с точки зрения построения инвариантных и частично инвариантных решений системы (1.1) необходимо исследовать конечномерные подалгебры алгебры $L$.

Если в операторе $X_w$ функция $\phi$ зависит только от $w$, то конечномерные подалгебры $H_m$ алгебры $L = L_7 \oplus L_\infty^w$ с точностью до подобия являются подалгебрами алгебры $L_7 \oplus \{\partial_w, w\partial_w, w^2\partial_w\}$. Доказательство этого факта следует из теоремы Ли [9] о конечномерных подалгебрах на прямой.

С точки зрения построения решений, интерес представляют только подалгебры из $L_7$, поскольку решения, инвариантные и частично инвариантные относительно подалгебр из $L_7 \oplus \{\partial_w, w\partial_w, w^2\partial_w\}$ являются частным случаем инвариантных и частично инвариантных решений относительно подалгебр из $L_7$. Это следует из того, что оператор $X_w = \phi(w)\partial_w$ из центра и $w$ в другие координаты оператора не входит.

Другое обстоятельство, позволяющее не рассматривать бесконечномерную часть допускаемой алгебры $L$, связано в данном случае с тривиальным, групповым расслоением системы (1.1) на разрешающую и автономную системы. Для этого пространство зависимых переменных расширяется еще на одну функцию $S$ – энтропию. Тогда при помощи инвариантов нулевого порядка [7] $t, x, y, U, V, \rho, p$ разрешающая система получается состоящей из уравнений системы (1.1) без третьего уравнения, а автоморфная система имеет два уравнения $d_1W = 0$, $d_1S = 0$. При этом автоморфная система характеризуется тем, что любое ее решение может быть получено из одного невырожденного [7]. Поэтому для нахождения решений системы (1.1), получаемых из группового анализа, достаточно построить только оптимальную систему подалгебр $\theta^{(0)}$ алгебры $L_7$.

Алгоритм построения нормализованной оптимальной системы приведен в [5]. Здесь для нахождения оптимальной системы $\theta^{(0)}$ используется композиционный ряд:

$$0 \subset \{1,2\} \subset \{1,2,4,5\} \subset \{1,2,4,5,9\} \subset \{1,2,4,5,9,10\} \subset L_7$$

В результате построения оптимальной системы $\theta^{(0)}$ подалгебр алгебры $L_7$, получается, что она является частью оптимальной системы алгебры $L_{11}$, построенной в [5].

Следует отметить, что оптимальная система подалгебр алгебры $L_7$ ранее строилась в [3]. Однако полученная там оптимальная система не удовлетворяет требованию нормализованности, в ней пропущены серии подалгебр

$$\{2, 5+\beta 1, 4+10\} \quad (\beta(\beta-1)\neq 0) \tag{4.1}$$

и имеются подобные.

**5. Некоторые решения системы (1.1).** Как было выше установлено, базовыми решениями для системы (1.1) являются решения, описывающие плоскопараллельные движения газа. Все такие инвариантные решения системы $(1.1)_{w=0}$ для произвольной функции $A(p, \rho)$ приведены в [3]. Там же рассмотрены некоторые частично инвариантные решения. Частично инвариантные решения ранга 1 и дефекта 1 изучались в [4, 10]. Так как автором [4] использовалась оптимальная система из [3], то там были пропущены решения, получаемые при помощи подалгебр (4.1). Ниже ликвидируется этот пробел.

Частично инвариантные решения ранга 1 и дефекта 1 относительно (4.1) имеют представление

$$u=t+U(\rho), \quad \upsilon=(x-t^2/2)/\beta+V(\rho), \quad p=P(\rho)$$

Для того чтобы не получалось противоречия или не было редукции к инвариантным решениям, необходимо считать

$$P'=\rho(U'^2+V'^2)=A/\rho, \quad \beta U'+UV'=0 \tag{5.1}$$

$$\rho_t+u\rho_x+\upsilon\rho_y+\rho(U'\rho_x+V'\rho_y)=0, \quad \rho V'(V'\rho_x-U'\rho_y)=-1 \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) должны образовывать полную систему, иначе определяются все первые производные от зависимых функций и частично инвариантное решение по теореме [7] редуцируется к инвариантному. Отсюда получается

$$V=\beta\ln\frac{b\rho}{\rho+a}, \quad U=c\left(1+\frac{a}{\rho}\right) \quad (a\neq 0)$$

а функция $\rho(t, x, y)$ определяется неявно из соотношения $\Phi(\xi_1, \xi_2) = 0$ с произвольной функцией $\Phi(\xi_1, \xi_2)$. Здесь $\xi_1 = x - t^2/2 - ct - (\rho V)'$, $\xi_2 = y + (t^3 + ct^2 - 2tx)/(2\beta) - t(\rho V)' - \beta U - V$, $a$, $b$, $c$ – произвольные постоянные $a \neq 0$, штрих обозначает дифференцирование по $\rho$. Такие решения имеются не для произвольного уравнения состояния, а только те для которых $A(P(\rho), \rho) = a^2(\beta^2/(\rho + a)^2 + c^2/\rho^2)$, где $P(\rho) = \beta^2(\ln(\rho/(\rho + a) + a/(\rho + a)) - 2a^2c/\rho^2$.

*Замечание*. Так как $P' = A/\rho$, то рассматриваемые течения изэнтропичны. Система (5.1), (5.2) допускает преобразование эквивалентности с оператором

$$t\partial_t+2(x\partial_x+y\partial_y)+u\partial_u+\upsilon\partial_\upsilon-\rho\partial_\rho+p\partial_p+A\partial_A+\beta\partial_\beta$$

С его помощью можно добиться $\beta = 1$. Это преобразование связано с наличием внешнего автоморфизма $L_7$, соответствующего оператору

$$t\partial_t-u\partial_u-\upsilon\partial_\upsilon \tag{5.3}$$

Внешним автоморфизмом (5.3) серия подалгебр (4.1) при $\beta \neq 0$ может быть приведена к $\{2,5 + 1,4 + 10\}$ (устное сообщение Л.В. Овсянникова).

Автор благодарит всех участников этой программы за критические замечания.

Работа выполнена в рамках программы ПОДМОДЕЛИ [6] при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17326) (Подмодели газовой динамики).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
2. *Ибрагимов Н.Х.* Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа // ПМТФ. 1966. № 4. С. 19–22.
3. *Ибрагимов Н.Х.* Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967. 59 с.
4. *Меньшиков В.М.* Решения уравнений двумерной газовой динамики типа простых волн // ПМТФ. 1969. № 3. С. 129–134.
5. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 29–53.
6. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Новосибирск: Ин-т Гидродинамики СО РАН, 1992. 11 с.
7. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
8. *Ibragimov N.H., Torrisi M.* A simple method for group analysis and its application to a model of detonation // J. Math. Phys. 1992. V. 33. N 11. P. 3931–3937.
9. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 396 с.
10. *Яненко Н.Н.* Бегущие волны системы квазилинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 1. С. 44–47.



Новосибирск

Поступила в редакцию 11.I.1994