УДК 62-50

© 1994 г. Г.Г. Гарнышева, А.И. Субботин

СТРАТЕГИИ МИНИМАКСНОГО ПРИЦЕЛИВАНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ КВАЗИГРАДИЕНТА

Рассматривается дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания. В общем случае, когда функция цены не предполагается гладкой, для построения ε-оптимальных стратегий вместо градиентов предлагается использовать квазиградиенты. Описаны конструкции, определяющие квазиградиенты.

В теории управляемых процессов и теории дифференциальных игр различают следующие два варианта постановки задачи управления по принципу обратной связи. В одном из них требуется определить стратегию, которая гарантирует решение задачи для фиксированного начального состояния системы. В другой постановке требуется построить *универсальную* стратегию, которая гарантирует решение задачи из любого начального положения из некоторой области. Построение таких стратегий рассматривалось в ряде работ (например, [1–4]).

Данная работа продолжает эти исследования. Рассматривается конструкция, в которой используются идеи из работ Н.Н. Красовского (например, [1, 2]). Вместе с тем предлагаемые построения включают элементы негладкого анализа и теории обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений уравнений с частными производными первого порядка [5–13]. В результате предлагается конструкция, которая подобна известному определению оптимальной стратегии в рамках классического метода динамического программирования в случае, когда функция цены дифференциальной игры является гладкой. Отличие состоит в том, что градиент функции цены (который может не существовать) заменяется квазиградиентом.

1. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \upsilon(t)), \quad t_0 \le t \le \theta \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние системы в момент времени t.

В теории дифференциальных игр $u(t)$ и $\upsilon(t)$ – управления первого (минимизирующего) и второго (максимизирующего) игроков. В задачах управления с гарантированным результатом первый игрок стремится обеспечить определенное качество управляемого процесса при любой реализации помехи $\upsilon(t)$, которую "выбирает" второй фиктивный игрок.

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой функционал платы определен равенством

$$\gamma(x(\cdot), u(\cdot), \upsilon(\cdot)) = \sigma(x(\theta)) - \int_{t_0}^{\theta} g(t, x(t), u(t), \upsilon(t))dt \tag{1.2}$$

Предполагается, что

$$\min_{u\in P}\max_{\upsilon\in Q}[\langle s, f(t,x,u,\upsilon)\rangle - g(t,x,u,\upsilon)] =$$

$$= \max_{\upsilon\in Q}\min_{u\in P}[\langle s, f(t,x,u,\upsilon)\rangle - g(t,x,u,\upsilon)] = H(t,x,s) \tag{1.3}$$

где $\langle s, f \rangle$ – скалярное произведение векторов $s, f \in \mathbf{R}^n$. Предполагается также, что функции f, g и σ непрерывны по совокупности переменных. Функция σ удовлетворяет ограничению

$$|\sigma(x)| \leqq K_0(1+\|x\|), \quad \forall x \in R^n$$

где K_0 – некоторое положительное число. Функции f и g удовлетворяют условию Липшица по переменной x

$$|H(t,x,s) - H(t,y,s)| \leq \lambda \|x-y\|(1+\|s\|) \quad x, y \in R^n \tag{1.4}$$

Указанные предположения, облегчающие изложение, можно ослабить.

Пусть первый игрок выбрал некоторую позиционную стратегию U и некоторое разбиение

$$\Delta = \{t_i : i = 0, \ldots, m+1\}, \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = \theta$$

отрезка времени $[t_0, \theta]$. Стратегия U отождествляется здесь с произвольной функцией

$$[0,\theta] \times R^n \ni (t,x) \to U(t,x) \in P$$

Подчеркнем, что функция $U(t, x)$ может быть разрывной.

Обозначим символом $S(t_0, x_0, U, \Delta)$ множество, элементы которого – тройки (управляемые процессы) $(x(\cdot), u(\cdot), \upsilon(\cdot))$, такие, что $\upsilon(\cdot):[t_0, \theta] \to Q$ – произвольная измеримая функция, $u(\cdot)$ – кусочно-постоянное управление вида

$$u(t) = U(t_i, x(t_i)), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0,1,2,\ldots,m$$

$x(\cdot):[t_0, \theta] \to R^n$ – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (1.1) и условию $x(t_0) = x_0$. Аналогично определяется множество $S(t_0, x_0, V, \Delta)$, где V: $[0, \theta] \times R^n \to Q$ – стратегия второго игрока.

Первый (второй) игрок стремится гарантировать минимальное (максимальное) значение функционала платы. Оптимальными результатами первого и второго игроков являются соответственно величины $\Gamma^*(t_0, x_0)$ и $\Gamma_*(t_0, x_0)$, которые определяются следующим образом:

$$\Gamma^*(t_0,x_0) := \inf_{U,\Delta} \Gamma_1(t_0,x_0,U,\Delta) \quad \Gamma_1(t_0,x_0,U,\Delta) := \sup \gamma(S(t_0,x_0,U,\Delta)$$

$$\Gamma_*(t_0,x_0) := \sup_{V,\Delta} \Gamma_2(t_0,x_0,V,\Delta) \quad \Gamma_2(t_0,x_0,V,\Delta) := \inf \gamma(S(t_0,x_0,V,\Delta)$$

Здесь

$$\inf \rho(A) := \inf_{\alpha \in A} \rho(\alpha), \quad \sup \rho(A) := \sup_{\alpha \in A} \rho(\alpha)$$

Известно, что при указанных выше предположениях оптимальные результаты первого и второго игроков совпадают. Величина $\mathrm{Val}(t_0, x_0)$: $= \Gamma^*(t_0, x_0) = \Gamma_*(t_0, x_0)$ называется ценой дифференциальной игры (1.1), (1.2). Цена игры зависит от начальной позиции. Поэтому можно определить функцию цены $(t_0, x_0) \to \mathrm{Val}(t_0, x_0):[0,\theta] \times R^n \to R$.

В данных определениях мы придерживались формализации дифференциальной игры, предложенной ранее [1,14]. Отметим, что в теории дифференциальных игр используются различные понятия стратегий и определения цены. Эти формализации оказываются эквивалентными в том смысле, что функция цены, определенная в одной системе понятий, совпадает с функцией цены, определенной в рамках другой формализации.

Известно, что функция цены u-стабильна [14]. Чтобы сформулировать это свойство, введем следующие обозначения. Положим

$$E(t,x,\upsilon):=\mathrm{co}\{(f(t,x,u,\upsilon),\ g(t,x,u,\upsilon))\in R^n\times R: u\in P\} \tag{1.5}$$

Обозначим через $S(t_0, x_0, z_0, \upsilon)$ совокупность траекторий $(x(\cdot), z(\cdot))$: $[t_0, \theta]\to R^n\times R$ дифференциального включения

$$(\dot{x}(t),\dot{z}(t))\in E(t,x(t),\upsilon),\quad t_0\le t\le\theta \tag{1.6}$$

удовлетворяющих начальному условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$. Функция $\rho(t,x)$: $[0,\theta]\times R^n\to R$ называется u-стабильной, если для любой точки $(t_0, x_0, z_0)\in \mathrm{gr}\rho := \{(t, x, \rho(t, x)) : (t, x)\in[0,\theta]\times R^n\}$ и любого управления $\upsilon\in Q$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot))\in S(t_0, x_0, z_0, \upsilon)$, такая, что $z(t)\ge\rho(t, x(t))$ при $t\in[t_0,\theta]$. Отметим, что u-стабильность означает слабую инвариантность надграфика функции ρ относительно дифференциальных включений (1.6). Отметим также, что в теории обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений уравнений Гамильтона–Якоби вводятся понятия верхних и нижних решений (например, [6–11]). Известно, что u-стабильные функции являются верхними решениями уравнения Айзекса–Беллмана

$$\partial\rho/\partial t+H(t,x,D_x\rho)=0$$

Согласно методу динамического программирования (например, [9]), если выполняется предположение о дифференцируемости функции цены, то оптимальными стратегиями игроков являются функции вида

$$U_0(t,x)=u_0(t,x,s(t,x)),\qquad V_0(t,x)=\upsilon_0(t,x,s(t,x))$$

где

$$u_0(t,x,s)\in\operatorname{Arg}\min_{u\in P}\{\max_{\upsilon\in Q}[\langle f(t,x,u,\upsilon),s\rangle-g(t,x,u,\upsilon)]\} \tag{1.7}$$

$$\upsilon_0(t,x,s)\in\operatorname{Arg}\max_{\upsilon\in Q}\{\min_{u\in P}[\langle f(t,x,u,\upsilon),s\rangle-g(t,x,u,\upsilon)]\} \tag{1.8}$$

$s(t, x) = D_x\mathrm{Val}(t,x)$, т.е. стратегии U_0 и V_0 – суперпозиции функций (предстратегий) $u_0(t,x, s)$, $\upsilon_0(t, x, s)$ и градиента $s(t,x)$ функции цены по переменной x.

Здесь и ниже

$$\operatorname{Arg}\max_{z\in Z}h(z):=\{z^0\in Z: h(z^0)\geqslant h(z)\forall z\in Z\}$$

$$\operatorname{Arg}\min_{z\in Z}h(z):=\{z_0\in Z: h(z_0)\leqslant h(z)\forall z\in Z\}$$

2. В общем случае, когда функция цены не является дифференцируемой, можно модифицировать стратегии указанного вида, заменив градиент $s(t, x)$ "квазиградиентом" $s_\alpha(t,x)$, который определяется следующим образом.

Пусть $\rho(t,x)$ – некоторая u-стабильная полунепрерывная снизу функция, удовлетворяющая равенству $\rho(\theta, x) = \sigma(x)$. В частности, таковой является функция цены Val. Можно показать, что при указанных предположениях функция ρ удовлетворяет оценке

$$\rho(t,x)\ge -K(1+\|x\|),\qquad \forall(t,x)\in[0,\theta]\times R^n \tag{2.1}$$

Рассмотрим следующее преобразование функции ρ (α – положительный параметр):

$$\rho_\alpha(t,x):=\min_{y\in R^n}[\rho(t,y)+w_\alpha(t,x,y)] \tag{2.2}$$

$$w_\alpha(t,x,y):=\alpha^{-1}(e^{-\lambda t}-\alpha)\sqrt{\alpha^4+\|x-y\|^2} \tag{2.3}$$

Выберем достаточно малое число $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$L(\alpha) := \alpha^{-1}(e^{-\lambda\theta} - \alpha) > K \tag{2.4}$$

Заметим, что

$$w_\alpha(t,x,y) > L(\alpha)\|x-y\| \tag{2.5}$$

для любых $t \in [0, \theta]$, $x \in R^n$, $y \in R^n$. Учитывая также, что функция $y \to \rho(t, y) + w_\alpha(t, x, y)$ полунепрерывна снизу, получаем, что минимум в (2.2) достигается.

Выберем произвольно

$$y_\alpha(t,x) \in \operatorname{Arg}\min_{y \in R^n}[\rho(t,y) + w_\alpha(t,x,y)] \tag{2.6}$$

Справедлива оценка

$$\|y_\alpha(t,x) - x\| \le \frac{\rho(t,x) + K(1+\|x\|) + \alpha}{(L(\alpha) - K)} \tag{2.7}$$

Действительно, из (2.2), (2.3) имеем

$$\rho_\alpha(t,x) \le \rho(t,x) + w_\alpha(t,x,x) \le \rho(t,x) + \alpha \tag{2.8}$$

Чтобы упростить обозначения, положим $\eta := y_\alpha(t,x)$. Согласно (2.2), (2.1) и (2.5) имеем

$$\rho_\alpha(t,x) = \rho(t,\eta) + w_\alpha(t,x,\eta) \ge -K(1+\|\eta\|) + w_\alpha(t,x,\eta) > -K(1+\|\eta\|) + L(\alpha)\|x-\eta\| =$$

$$= (L(\alpha) - K)\|x-\eta\| + K\|x-\eta\| - K\|\eta\| - K \ge (L(\alpha) - K)\|x-\eta\| - K(1+\|x\|)$$

Из этой и предыдущей оценок следует, что

$$(L(\alpha) - K)\|x-\eta\| - K(1+\|x\|) \le \rho_\alpha(t,x) \le \rho(t,x) + \alpha$$

Итак, получаем неравенство (2.7).

Пусть $D_x w(t,x,y)$ и $D_y w(t, x, y)$ – градиенты функции w_α по переменным x и y. Заметим, что $D_x w(t,x,y) = -D_y w(t, x, y)$. Положим

$$s_\alpha(t,x) := D_x w_\alpha(t,x,y_\alpha(t,x)) = -D_y w_\alpha(t,x,y_\alpha(t,x)) \tag{2.9}$$

Если функция $y \to \rho(t, y)$ непрерывно-дифференцируема в некоторой окрестности точки x, содержащей точку $y_\alpha(t, x)$, то

$$D_y\rho(t,y_\alpha(t,x)) + D_y w_\alpha(t,x,y_\alpha(t,x)) = 0$$

Поэтому $s_\alpha(t, x) := D_y\rho(t, y_\alpha(t, x))$. Учитывая,что $\lim_{\alpha\downarrow 0} y_\alpha(t, x) = x$, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0} s_\alpha(t,x) = D_x\rho(t,x)$$

Поэтому $s_\alpha(t, x)$ можно назвать квазиградиентом функции ρ по переменной x.

Определим стратегию первого игрока равенством

$$U_\alpha(t,x) = u_0(t,x,s_\alpha(t,x)) \tag{2.10}$$

где функция u_0 (предстратегия) определена согласно (1.7).

Теорема. Для любого компактного множества $D \subset [0, \theta] \times R^n$ и любого положительного числа ε существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что

$$\Gamma_1(t_0,x_0,U_\alpha,\Delta) \le \rho(t_0,x_0) + \varepsilon \tag{2.11}$$

для всех $(t_0, x_0) \in D$ и любых разбиений, удовлетворяющих условию $\operatorname{diam}(\Delta) := \max\ \{t_{i+1} - t_i : i = 0, 1,..., m\} \le \beta$. В частности, если $\rho = \mathrm{Val}$, то стратегия U_α ε-оптимальна и универсальна.

Доказательство. Имеем неравенство (2.8), а также следующую оценку: для любого ограниченного множества $M \subset R^n$ существует величина $\nu(\alpha)$, такая, что

$$\rho_\alpha(\theta, x) \geq \sigma(x) - \nu(\alpha), \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} \nu(\alpha) = 0 \tag{2.12}$$

Эта оценка следует из (2.7) и непрерывности функции σ.

Используя условие (1.4), можно проверить, что функция w_α вида (2.3) удовлетворяет неравенству

$$\partial w_\alpha / \partial t + H(t, x, D_x w_\alpha) - H(t, y, -D_y w_\alpha) \leq 0 \tag{2.13}$$

Отметим, что неравенства вида (2.13) играют важную роль в теории вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби (см., например, условие A4 в [8]).

Выберем параметр $\alpha \in (0, 2e^{-\lambda\theta}]$ так, чтобы выполнялось неравенство (2.4). Пусть $(x(\cdot), u(\cdot), \upsilon(\cdot)) \in S(t_0, x_0, U_\alpha, \Delta)$. Справедлива оценка

$$\rho_\alpha(t_{i+1}, x(t_{i+1})) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\tau, x(\tau), u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \leq$$

$$\leq \rho_\alpha(t_i, x(t_i)) + h_1(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_i) \tag{2.14}$$

Здесь и ниже $h_i(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Из этой оценки следует

$$\rho_\alpha(\theta, x(\theta)) - \int_{t_0}^{\theta} g(\tau, x(\tau), u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \leq \rho_\alpha(t_0, x_0) + h_2(\beta) \tag{2.15}$$

Объединяя эту оценку с оценками (2.8) и (2.12), заключаем, что

$$\gamma(x(\cdot), u(\cdot), \upsilon(\cdot)) =$$

$$= \sigma(x(\theta)) - \int_{t_0}^{\theta} g(\tau, x(\tau), u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \leq \rho(t_0, x_0) + h_2(\beta) + \alpha + \nu(\alpha) \tag{2.16}$$

что требуется доказать.

Таким образом остается показать, что справедлива оценка (2.14). Чтобы упростить обозначения, положим

$$\tau = t_i, \quad \tau + \delta = t_{i+1}, \quad \xi = x(t_i)$$

$$s^* = s_\alpha(\tau, \xi), \quad u^* = U_\alpha(\tau, \xi) = u_0(\tau, \xi, s^*)$$

Требуется показать, что справедлива оценка

$$\rho_\alpha(\tau + \delta, x(\tau + \delta)) - \int_{\tau}^{\tau+\delta} g(t, x(t), u^*, \upsilon(t)) dt - h_1(\delta)\delta \leq \rho_\alpha(\tau, \xi) \tag{2.17}$$

Введем обозначения

$$f^* = \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} f(t, x(t), u^*, \upsilon(t)) dt, \; g^* = \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} g(t, x(t), u^*, \upsilon(t)) dt \tag{2.18}$$

Положим $\eta = y_\alpha(\tau, \xi)$, $\upsilon_* = \upsilon_0(\tau, \eta, s^*)$. Согласно (2.2), (2.6) имеем

$$\rho_\alpha(\tau, \xi) = \rho(\tau, \eta) + w_\alpha(\tau, \xi, \eta) \tag{2.19}$$

Из условия u-стабильности, которому удовлетворяет функция ρ, следует, что существует вектор $(f_*, g_*) \in R^n \times R$, такой, что

$$\operatorname{dist}((f_*, g_*), E(\tau, \eta, \upsilon_*)) \leq h_1(\delta), \quad \rho(\tau, \eta) + g_* \delta \geq \rho(\tau + \delta, \eta + f_* \delta) \tag{2.20}$$

Поэтому из (2.19) и (2.20) имеем

$$\rho_\alpha(\tau,\xi) \ge \rho(\tau+\delta,\eta+f_*\delta)+w_\alpha(\tau,\xi,\eta)-g_*\delta \ge \rho_\alpha(\tau+\delta,\xi+f^*\delta)-r$$

$$r:=w_\alpha(\tau+\delta,\xi+f^*\delta,\eta+f_*\delta)-w_\alpha(\tau,\xi,\eta)+g_*\delta$$

Последняя оценка следует из (2.2). Поскольку $\xi+f^*\delta=x(\tau+\delta)$, то получаем

$$\rho_\alpha(\tau,\xi) \ge \rho_\alpha(\tau+\delta,x(\tau+\delta))-r \tag{2.21}$$

Оценим величину r. Функция w_α дифференцируема, поэтому

$$r-g_*\delta=[(\partial w_\alpha/\partial t)(\tau,\xi,\eta)+\langle s^*,f^*\rangle-\langle s^*,f_*\rangle]\delta+h_3(\delta)\delta$$

где $s^*:=s_\alpha(\tau,\xi):=D_x w_\alpha(t,\xi,\eta)=-D_y w_\alpha(t,\xi,\eta)$ (см. (2.6), (2.9)).

Напомним, что $u^*=U_\alpha(\tau,\xi)=u_0(\tau,\xi,s^*)$. Согласно (1.7) имеем $\langle s^*,f(\tau,\xi,u^*,\upsilon)\rangle-$ $-g(\tau,\xi,u^*,\upsilon)\le H(\tau,\xi,s^*)$ для любых $\upsilon\in Q$

Поэтому

$$\langle s^*,f^*\rangle-g^*\le H(\tau,\xi,s^*)+h_3(\delta)$$

Напомним также, что $\upsilon_*=\upsilon_0(\tau,\eta,s^*)$. Поэтому из (1.8) следует

$$\langle s^*,f(\tau,\eta,u,\upsilon_*)\rangle-g(\tau,\eta,u,\upsilon_*)\ge H(\tau,\eta,s^*),\quad \forall u\in P$$

Следовательно,

$$\langle s^*,f_*\rangle-g_*\ge H(\tau,\eta,s^*)-h_4(\delta)$$

Итак, получаем

$$(\partial w_\alpha/\partial t)(\tau,\xi,\eta)+\langle s^*,f^*\rangle-\langle s^*,f_*\rangle\le$$

$$\le(\partial w_\alpha/\partial t)(\tau,\xi,\eta)+H(\tau,\xi,s^*)-H(\tau,\eta,s^*)+g^*-g_*+h_5(\delta)$$

Учитывая (2.13), получаем

$$(\partial w_\alpha/\partial t)(\tau,\xi,\eta)+\langle s^*,f^*\rangle-\langle s^*,f_*\rangle\le g^*-g_*+h_5(\delta)$$

Стало быть, $r\le g^*\delta+h_5(\delta)$. Подставив эту оценку в (2.21), приходим к неравенству

$$\rho_\alpha(\tau,\xi)\ge\rho_\alpha(\tau+\delta,x(\tau+\delta))-(g^*+h_5(\delta))\delta$$

(Напомним, что величина g^* определена равенством (2.18).) Итак, получаем оценку (2.17).

Если функционал платы не содержит интегрального члена, то в качестве штрафной функции в преобразовании (2.2) можно использовать функцию

$$w_\alpha(x,y)=\|x-y\|^2/(2\alpha)$$

В этом случае равенство

$$\rho_\alpha(t,x):=\min_{y\in R^n}[\rho(t,y)+\|x-y\|^2/(2\alpha)]$$

в точности представляет известное преобразование, которое используется в выпуклом анализе и в ряде работ называется преобразованием Иосиды–Моро (см., например, [13], с. 33). Равенство (2.2) можно рассматривать как модификацию этого преобразования.

Аналогичную конструкцию ε-оптимальных универсальных стратегий можно предложить для задачи оптимального быстродействия.

Предлагаемое построение является достаточно компактным способом доказательства существования ε-седловой точки дифференциальной игры. Однако эта конструкция вряд ли реализуема в вычислительных алгоритмах. Вместе с тем возможны модификации штрафной функции w_ε, в частности они могут быть направлены на достижение устойчивости по отношению к информационным и вычислительным погрешностям.

Отметим, что описанное решение основано на "сглаживающем" преобразовании функции цены. В связи с этим уместно упомянуть работу [15], где предложен нетрадиционный подход к синтезу стратегий, основанный на использовании понятия аналитического центра выпуклого множества и внутренних сглаженных реализаций управлений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
2. *Красовский Н.Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 541–571.
3. *Кононенко А.Ф.* О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 2. С. 285–288.
4. *Субботина Н.Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896.
5. *Субботин А.И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254.№ 2. С. 293–297.
6. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
7. *Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. № 2. P.487–502.
8. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L.* Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39. № 4. P. 581–596.
9. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
10. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
11. *Subbotin A.I.* Generalized characteristics of first-order partial differential equations. Preprint CRM-1848. Montreal, 1993.
12. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
13. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
14. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
15. *Sonnevend G.* Constructing feedback control in differential games by use of "central" trajectories // Schwespunktprogramm DFG Anwendungsbezogene optimierung und steucrung, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, Universität Würzburg, 1992, report No 385.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
5.I.1994