

УДК 533; 517.958

© 1994 г. Л.В. Овсянников

ПРОГРАММА ПОДМОДЕЛИ. ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Сообщаются исходные положения и описываются характерные особенности реализации программы ПОДМОДЕЛИ, сформировавшейся за последние годы [1]. В ее основе лежит соображение об исчерпании всех возможностей точного упрощения "больших" математических моделей за счет наиболее полного использования заложенных в них свойств симметрии. Такое упрощение достигается переходом к подмоделям, описывающим классы точных частных решений, приводящим к понижению размерности задач и делающим более доступным их анализ. Хотя в полном объеме эта программа, видимо, неисчерпаема, тем не менее применительно к каждой фиксированной "большой модели", возникающей в механике сплошных сред и вообще в математической физике, она является конкретной и вполне реализуемой на практике, служит формированию и пополнению банка данных по математическим моделям природных процессов.

В разд. 1 излагаются основы концепции программы ПОДМОДЕЛИ, ее ведущая идея, цель, содержание, теоретические основы и общенаучная значимость. Отмечаются наиболее существенные рабочие алгоритмы, используемые при ее выполнении. Разд. 2 содержит исходные сведения о "больших моделях" газовой динамики и их общей симметрии. В разд. 3 дано общее описание алгоритма групповой классификации и приведен результат его применения к уравнениям газовой динамики. В разд. 4 собраны наиболее важные понятия, связанные с алгоритмом построения оптимальных систем подалгебр для конечномерных алгебр Ли. В качестве примера приводится результат применения этого алгоритма к алгебре Ли L_{11} группы, допускаемой уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния общего вида. Разд. 5 посвящен описанию всех (с точностью до подобия) инвариантных подмоделей ранга три для "больших моделей" газовой динамики с общим уравнением состояния. В Приложение вынесена итоговая табл. 6, представляющая собой нормализованную оптимальную систему подалгебр для алгебры Ли L_{11} .

1. Концепция программы подмодели. Несмотря на то что свойства симметрии всегда привлекали внимание исследователей, сколько-нибудь полная концепция систематического использования этих свойств в механике сплошных сред до сих пор отсутствовала. Примечательно, что в современной теоретической физике при исследовании строения материи (микромир) или Вселенной (макрокосмос) теоретико-групповые методы играют основополагающую роль. В механике сплошных сред в этом вопросе наблюдается заметный пробел, который образовался по разным причинам, совершенно очевидно нуждающийся в восполнении.

Ниже дается краткое описание одного из направлений исследований по частичной ликвидации упомянутого пробела в виде определенной программы, получившей название "программа ПОДМОДЕЛИ".

Термином "большая модель" называется система соотношений, состоящая из дифференциальных уравнений и дополнительных связей и описывающая закономерности рас-

пределения физических величин в пространстве и их эволюцию во времени. Свойство симметрии "большой модели" отражает факт независимости заложенных в нее законов природы от систем отсчета и выражается в ее инвариантности относительно некоторых преобразований пространства значений основных величин. Такие преобразования образуют группу.

Следует Ли говорят, что система дифференциальных уравнений E допускает группу G преобразований всех участвующих в E величин (независимых и зависимых переменных), если система E остается неизменной при всех преобразованиях, принадлежащих группе G . Для уравнений математической физики и механики сплошных сред характерны допускаемые ими классические группы Евклида, Галилея, Пуанкаре и т.д., а также их подгруппы и расширения. При этом симметрия данной модели может расширяться для частных форм дополнительных связей (определяющих соотношений).

Фундаментальное свойство допускаемой системой E группы G состоит в том, что группа G действует на множестве всех решений E . Это верно, конечно, и для любой подгруппы $H \subset G$.

Каждая подгруппа $H \subset G$ имеет инварианты, конечные и (или) дифференциальные. Установление дополнительных соотношений между инвариантами подгруппы H выделяет из множества всех решений E определенный класс точных частных решений, называемых H -решениями. Такие решения выражаются через новые искомые функции (инварианты), удовлетворяющие выводимой из E системы дифференциальных уравнений, называемой факторсистемой E/H . Обычно факторсистема является более простой по сравнению с исходной системой E , в частности, за счет того, что E/H содержит меньшее число независимых переменных. Поэтому факторсистема E/H называется подмоделью исходной "большой модели" E . Число независимых переменных в E/H называется рангом подмодели. В стандартном случае четырехмерного пространства событий, на котором определена система E , ранг подмодели может принимать значения 3, 2, 1, 0.

Большинство известных точных подмоделей в виде систем уравнений пониженной размерности, таких как одномерные, двумерные, плоскопараллельные, осесимметричные, винтовые, стационарные, конические, автомодельные, описывают инвариантные H -решения. Этот перечень, очевидно, не полон, но вопрос о его пополнении до последнего времени оставался неясным.

Идея выдвижения программы ПОДМОДЕЛИ состоит в том, чтобы путем систематического использования свойства симметрии данной "большой модели" E составить исчерпывающий список (банк данных) порождаемых подмоделью E точных подмоделей в виде классов H -решений, описываемых факторсистемами E/H .

Осуществление программы ПОДМОДЕЛИ должно привести к максимальному извлечению возможностей, заложенных в свойствах симметрии "больших моделей" механики сплошных сред и тем самым к обогащению теории описываемых этими моделями явлений. Это позволит дать решение многих новых конкретных задач, выявить дополнительные особенности описываемых процессов, получить широкий набор тестов для апробации численных методов, расширить поле фактов, используемых в системе подготовки кадров высокой квалификации.

Фундаментальную теоретическую основу для реализации программы ПОДМОДЕЛИ образуют теория групп и алгебр Ли и групповой анализ дифференциальных уравнений. Конкретное исполнение связано с привлечением достаточно хорошо апробированных алгоритмов. Среди них наиболее существенны следующие.

Алгоритм групповой классификации действует в случаях, когда данная система дифференциальных уравнений E содержит произвольный элемент A (такая система обозначается $E(A)$) в виде неопределенных параметров и функций, приводящих в E из-за каких-либо дополнительных соотношений между основными величинами. Этот алгоритм необходим в силу того, что специализации произвольного элемента A могут приводить к расширению допускаемой группы. Алгоритм применяется не только к "большим моделям", но также и к их подмоделям различных рангов. Его частным случаем является алгоритм вычисления основной группы Ли, допускаемой системой E . Схематическое описание алгоритма групповой классификации дается ниже, в разд. 3.

Алгоритм построения оптимальной системы подгрупп группы G (или подалгебр соответствующей алгебры Ли L), допускаемой системой E , необходим в силу того, что подмодели,

построенные относительно разных подгрупп H_1 и H_2 группы G , могут оказаться *подобными* (эквивалентными). В этом случае все H_2 -решения получаются из H_1 -решений некоторым преобразованием основных величин (заменой переменных). Такое происходит, если подгруппы H_1 и H_2 сопряжены (подобны) в группе G относительно *внутренних автоморфизмов* этой группы. Поэтому существенно различные подмодели получаются только относительно различных классов сопряженных подгрупп. Совокупность представителей таких классов называется *оптимальной системой* подгрупп и обозначается символом ΘG (соответственно оптимальной системой подалгебр ΘL). Здесь полезно также замечание о том, что факторсистема E/H всегда допускает *нормализатор* подгруппы H в G , т.е. допускаемая подмоделью группа частично известна априори. Основные моменты, связанные с алгоритмом построения оптимальных систем подалгебр конечномерных алгебр Ли обсуждаются в разд. 4.

В выполнении программы ПОДМОДЕЛИ используется алгоритм приведения системы дифференциальных уравнений *в инволюцию*. Он действует всякий раз, когда возникают переопределенные системы уравнений, в частности, при вычислении основной допускаемой группы, при групповой классификации, при анализе частично инвариантных решений. Этот алгоритм в данной статье не рассматривается, с ним можно ознакомиться, например, по монографии [6].

Программа ПОДМОДЕЛИ предполагает также выполнение предварительного анализа качественного поведения решений получаемых факторсистем E/H . Такое сопровождение подмодели (как говорят, ее "одевание") может включать описание типа системы E/H и постановку основных краевых задач, изучение структур множества траекторий, характеристик, сильных разрывов и т.д.

Уместно заметить, что процесс реализации программы ПОДМОДЕЛИ не сводится к чисто прикладному использованию готового аппарата математического анализа. На самом деле в этом процессе возникает много новых вопросов и нерешенных проблем, разработка которых имеет общетеоретическое значение. В частности, это относится к теории интегрирования переопределенных систем дифференциальных уравнений с дополнительной структурой, к общей теории инвариантов, в том числе дифференциальных инвариантов групп Ли преобразований, к чисто алгебраической теории подгрупповых (подалгебраических) структур групп (алгебр) Ли.

В целом программа ПОДМОДЕЛИ вполне реалистична, но весьма трудоемка, ее исполнение требует большой коллективной работы. Можно надеяться, что программа ПОДМОДЕЛИ привлечет внимание и получит поддержку научного сообщества специалистов в области математической физики и механики сплошных сред.

2. "Большие модели" газовой динамики. "Большая модель" газовой динамики была выбрана для начала работы по программе ПОДМОДЕЛИ по ряду причин. В газовой динамике накоплен большой научный опыт работы с разного рода точными решениями. Благодаря богатству содержания она дает превосходный пример для апробации всех особенностей реализации программы ПОДМОДЕЛИ. Для нее есть определенный задел [2]. И хотя имеется множество работ, связанных с использованием различных проявлений свойства симметрии уравнений газовой динамики, скрытые в этом свойстве возможности все еще нуждаются в систематическом изучении. Речь идет об описании движения газа как двухпараметрической сплошной среды в отсутствие диссипации и внешних силовых полей. Исходная "большая модель" есть система дифференциальных уравнений (в безразмерных переменных)

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + A \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

где $D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление. Эти величины являются функциями времени t и координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Функция состояния $A = A(p, \rho)$ считается заданной. Физический смысл функции A определяется ее выражением $A = \rho c^2$, где c – скорость звука.

Следует заметить, что обычно последнее уравнение в (2.1) записывается с энтропией S в виде $DS = 0$ и связывается с уравнением состояния $p = F(\rho, S)$. Эти две формы записи равносильны при условии, что $F_S \neq 0$. Предположение $F_S = 0$ приводит к

рассмотрению класса изэнтропических движений газа (часто употребляется неудачный термин "баротропный газ") и должен быть предметом независимого изучения.

Базовым пространством для системы (2.1) является девятимерное пространство $R^9(t, x, u, p, \rho)$. Известно [2], что с функциями $A(p, \rho)$ общего вида система (2.1) допускает 11-параметрическую группу Ли G_{11} преобразований пространства R^9 , порожденную преобразованиями переносов (трансляций) по переменным $t, x: t \rightarrow t + t_0, x \rightarrow x + x_0$, галилеевых переносов в направлении осей $x: x \rightarrow x + u_0 t, u \rightarrow u + u_0$, вращений в подпространстве $R^6(x, u): x \rightarrow S_0 x, u \rightarrow S_0 u$ и однородных растяжений (гомотетий) подпространства $R^4(t, x): t \rightarrow k_0 t, x \rightarrow k_0 x$. Здесь t_0, x_0, u_0, k_0 – произвольные параметры, а S_0 – ортогональная (3×3) -матрица с $\det S_0 = 1$. Алгебраически группа G_{11} представляет собой группу Галилея G_{10} , расширенную за счет одномерной группы гомотетий. Кроме того, система (2.1) допускает два дискретных преобразования (инволюции) $I_1: (x, u) \rightarrow (-x, -u), I_2: (t, u) \rightarrow (-t, -u)$ соответствующие изменению ориентации (I_1) подпространства $R^6(x, u)$ и обращению времени (I_2).

В конкретных вычислениях участвует соответствующая G_{11} алгебра Ли L_{11} операторов, определенных на пространстве R^9 . Базис в L_{11} образуют операторы X_i ($i = 1, \dots, 11$), которые выбираются соответственно перечисленным выше преобразованиям:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z \\ X_4 &= t\partial_x + \partial_u, & X_5 &= t\partial_y + \partial_v, & X_6 &= t\partial_z + \partial_w \\ X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, & X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w \\ X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, & X_{10} &= \partial_t \\ X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

С точки зрения группового анализа функция $A(p, \rho)$ в системе (2.1) рассматривается как произвольный элемент, относительно которого, в рамках программы ПОДМОДЕЛИ, необходимо выполнить групповую классификацию этой системы. Это означает, что следует найти все такие формы функции $A(p, \rho)$ (с точностью до эквивалентности), с которыми происходит расширение группы G_{11} . В основном эта классификация известна [2]. Некоторые ее детали приведены в качестве примера в разд. 3. Здесь сообщаются лишь ее уточненные итоги.

Таблица 1

N	A	p	k	Y
1	$f(p, \rho)$	$f(p, \varepsilon)$	11	–
2	$pf(p\rho^{-\gamma}), \gamma \neq 0, 1$	$\rho^\gamma f(\varepsilon\rho)$	12	$(\gamma-1)Y_1 - 2\gamma Y_2$
3	$pf(p/\rho)$	$\rho f(\varepsilon\rho)$	12	Y_2
4	$f(p)$	$f(\varepsilon\rho)$	12	Y_1
5	$pf(\rho)$	$\varepsilon f(\rho)$	12	$Y_1 - 2Y_2$
6	$\gamma\rho, \gamma \neq 0, 5/3$	$\varepsilon\rho^\gamma$	13	Y_1, Y_2
7	$(5/3)\rho$	$\varepsilon\rho^{5/3}$	14	Y_1, Y_2, Y_4
8	$f(\rho e^{-p})$	$\ln \rho + f(\varepsilon\rho)$	12	$Y_1 + 2Y_3$
9	$f(\rho)$	$f(\rho) + \varepsilon$	13	Y_3
10	$\gamma\rho^\gamma, \gamma \neq 0, 1$	$\rho^\gamma + \varepsilon$	13	$(\gamma-1)Y_1 - 2\gamma Y_2, Y_3$
11	ρ	$\rho + \varepsilon$	13	Y_2, Y_3
12	1	$\ln \rho + \varepsilon$	13	Y_1, Y_3
13	0	ε	∞	Y_1, Y_ϕ

В расширениях алгебры Ли L_{11} участвуют дополнительные к (2.2) операторы

$$Y_1 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho, \quad Y_2 = \rho\partial_\rho + p\partial_p, \quad Y_3 = \partial_p$$

$$Y_4 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - yv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p \quad (2.3)$$

Сводка всех случаев расширения дается в табл. 1. В столбце N приведены номера расширений, в столбце A указаны формы этой функции, дающие расширение L_{11} , а в столбце p – соответствующие формы обычной записи уравнения состояния $p = F(\rho, S)$. Числа в столбце k означают размерности расширенных алгебр L_k . В столбце Y выписаны операторы в обозначениях (2.3), дополняющие базис L_{11} (2.2) до базиса алгебры Ли L_k . Символом ε обозначена произвольная функция энтропии, т.е. $\varepsilon = \varepsilon(S)$, а f – произвольная функция указанных аргументов, различная в разных клетках таблицы.

Среди "больших моделей" газовой динамики, перечисленных в табл. 1, встречаются широко известные модели, которые были предметом многочисленных исследований. Кроме общей модели $N = 1$, можно отметить модель $N = 6$ политропного газа и ее специальный случай $N = 7$. Модель $N = 3$ содержит общую модель идеального газа. Случай $N = 4$ выделяется специальными свойствами этой модели для установившихся течений газа [5]. Экзотическая модель $N = 13$ описывает газ с нулевой скоростью звука. Безотносительно к ее физическому смыслу она выделяется тем, что допускаемая ею группа бесконечномерна за счет допускаемого оператора $Y_\varphi = \rho\varphi'(p)\partial_\rho + \varphi(p)\partial_p$ с произвольной функцией $\varphi(p)$. Вместе с тем некоторые из найденных "больших моделей", например, $N = 2, 5, 9-12$, по-видимому, сколько-нибудь подробно не изучались.

В итоге получается, что для реализации программы ПОДМОДЕЛИ применительно к газовой динамике необходимо рассмотреть 13 "больших моделей". Эта работа начата для модели $N = 1$, обсуждаемой в данной статье.

3. Групповая классификация. Пусть некоторая система дифференциальных уравнений, заданная на базовом пространстве $R^{n+m}(z)$, где $z = (x, y)$, причем $x = (x^1, \dots, x^n)$ – набор независимых переменных, а $y = (y^1, \dots, y^m)$ – набор искомых функций, содержит "произвольный элемент" $A = (A^1, \dots, A^p)$, компоненты которого A^s могут быть функциями от z , подчиненными некоторым дополнительным условиям. Такая система обозначается $E(A)$, а дополнительные условия – $\Omega(A)$.

Задача состоит в том, чтобы найти группы преобразований базового пространства $R^{n+m}(z)$, допускаемые системой $E(A)$ для произвольного элемента A общего вида, удовлетворяющего только условиям $\Omega(A)$ и для всех возможных специализаций A , приводящих к расширениям допускаемых групп.

Для простоты изложения ниже эта задача рассматривается для систем $E(A)$ первого порядка и дополнительных условий $\Omega(A)$ также содержащих производные от A не выше первого порядка. В этом случае исходные уравнения могут быть записаны в виде

$$E(A): E(z_1, A(z)) = 0; \quad \Omega(A): \Omega(z, A_1(z)) = 0 \quad (3.1)$$

где индексом 1 обозначены совокупные наборы всех основных величин и их первых производных. Наряду с уравнениями (3.1) вводится вспомогательная система уравнений

$$E(a): E(z_1, a) = 0 \quad (3.2)$$

с произвольными величинами $a = (a^1, \dots, a^p)$, подставленными в $E(A)$ вместо соответствующих функций $A(z)$. Алгоритм решения поставленной задачи удобно разбить на четыре этапа.

На первом этапе формируются условия инвариантности уравнения $E(a)$ относительно

однопараметрических групп преобразований пространства $R^{n+m}(z) \times R^p(a)$. Операторы таких групп ищутся в виде

$$X^a = \xi^z \partial_z + \xi^a \partial_a = \xi^x \partial_x + \xi^y \partial_y + \xi^a \partial_a \quad (3.3)$$

где координаты ξ^z зависят только от z , а координаты ξ^a могут быть функциями переменных z, a (возможное обобщение, когда допускается зависимость ξ^z от a , здесь не рассматривается). В выражении (3.3) и ниже точкой обозначено скалярное произведение, т.е. сумма по всем значениям повторяющегося индекса, например $\xi^x \partial_x = \xi^{x^1} \partial_{x^1} + \xi^{x^2} \partial_{x^2} + \dots + \xi^{x^n} \partial_{x^n}$ и т.д. Условие инвариантности $E(a)$ имеет вид (см. например [2])

$$X_1^a E(z_1, a)|_{E(a)} = 0 \quad (3.4)$$

где X_1^a — первое продолжение оператора X^a на производные $y_x = (y_{x^1}^1, \dots, y_{x^n}^m)$ и записывается так:

$$X_1^a = X^a + \xi^{y_x} \partial_{y_x} \quad (3.5)$$

Координаты продолженного оператора вычисляются по стандартным формулам (сумма по $x' = x^1, \dots, x^n$)

$$\xi^{y_x} = D_x \xi^y - y_x \cdot D_x \xi^{x'}, \quad D_x = \partial_x + y_x \partial_y \quad (3.6)$$

для каждого $x = x^1, \dots, x^n$ и каждого $y = y^1, \dots, y^m$. Из (3.4) получается система уравнений $DE(a)$ относительно искомым координат оператора (3.3), состоящая из двух подсистем, а именно $DE(a) = DE_0 \cup DE_a$. Уравнения DE_0 не содержат переменных a или ξ^a , а уравнения DE_a содержат a и соотношения вида

$$m_a \xi^a = l_z \xi^z \quad (3.7)$$

в котором l_z — линейные (неоднородные) дифференциальные операторы по переменным z , действующие на ξ^z , а m_a — некоторые функции, причем l_z и m_a , вообще говоря, зависят от z, a .

На втором этапе вычисляется группа преобразований эквивалентности уравнения $E(a)$, сохраняющих также и дополнительные условия $\Omega(a)$, которым должен удовлетворять вектор $a = A(z)$, и записанных в виде

$$\Omega(a): \Omega(z, a_1) = 0 \quad (3.8)$$

Условие инвариантности $\Omega(a)$ имеет вид

$$Y_1^a \Omega(z, a_1)|_{\Omega(a)} = 0 \quad (3.9)$$

в котором используется продолжение Y_1^a оператора X^a на производные $a_1 = (a_z^s)$. Это продолжение следует вычислять по формулам

$$Y_1^a = X^a + \xi^{a_z} \partial_{a_z} \\ \xi^{a_z} = D_z^+ \xi^a + a_z \cdot D_z^+ \xi^z, \quad D_z^+ = \partial_z + a_z \cdot \partial_a \quad (3.10)$$

Условие инвариантности (3.9) дает дополнительную подсистему определяющих уравнений $D^+ \Omega_a$. Кроме того, учитывается независимость координат ξ^z от переменных a . В результате получается полная система определяющих уравнений

$$DE_0 \cup DE_a \cup D^+ \Omega_a \quad (3.11)$$

для координат операторов

$$X^a = \xi^z(z) \cdot \partial_z + \xi^a(z, a) \cdot \partial_a$$

порождающих группу преобразований эквивалентности системы уравнений $E(a) \cup \Omega(a)$.

Согласно общей теории [2] в группе преобразований эквивалентности содержится *ядро основных групп* уравнения $E(A)$ – группа, допускаемая этим уравнением при *любой* функции $a = A(z)$, удовлетворяющей дополнительному условию $\Omega(A) = 0$. Поэтому ядро определяется уравнениями (3.7), в которых надо положить $\xi^a = a_z \xi^z$ и в полученном равенстве перейти на многообразие, заданное уравнениями $\Omega(a)$.

Уместно заметить, что ядро основных групп всегда является *инвариантной подгруппой* группы преобразований эквивалентности.

Третий этап состоит в построении и решении определяющих уравнений для координат операторов X^A , допускаемых системой $E(A) \cup \Omega(A)$. Часть этих уравнений, а именно DE_0 , уже получена на первом этапе. Остальные получаются просто из подсистемы $DE_a \cup D^+ \Omega_a$ подстановкой $a = A(z)$ и заменой в соотношениях (3.7) координат ξ^a выражениями $\xi^A = A_z \xi^z$, в результате чего они превращаются в уравнения

$$D^+ \Omega_A: m_A \cdot A_z \cdot \xi^z = l_z \cdot \xi^z \quad (3.12)$$

Полученная этим путем система определяющих уравнений

$$DE_0 \cup DE_A \cup D^+ \Omega_A \quad (3.13)$$

представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно искомым координат ξ^z оператора X^A .

Задача о построении общего решения системы уравнений (3.13), вообще говоря, нетривиальна. Его отыскание облегчается наличием у системы (3.13) ряда специальных свойств. Во-первых, эта система линейна и однородна и, как правило, является сильно переопределенной. Во-вторых, система (3.13) инвариантна относительно группы преобразований эквивалентности, построенной на втором этапе. Кроме того, заранее известно, что коммутатор любых двух решений этой системы есть снова ее решение и что найденные на втором этапе операторы ядра основных групп дают ее частные решения.

Обычно поступают так: вначале, если это возможно, находят общий вид координаты ξ^z , удовлетворяющих уравнениям DE_0 . В силу линейности эти координаты представляются в виде линейных комбинаций некоторых пока произвольных функций $\varphi(z)$ (которые могут быть и произвольными константами). Полученные представления подставляют в оставшиеся уравнения $DE_A \cup D^+ \Omega_A$, которые тем самым становятся уравнениями относительно функций φ , образующими переопределенную систему $DE_A(\varphi)$. Затем систему $DE_A(\varphi)$ приводят в *инволюцию*, т.е. представляют (как правило, путем продолжения) в таком виде, чтобы явно определилась широта ее общего решения. Процесс приведения в инволюцию связан с формированием условий совместности и, вообще говоря, может ветвиться в зависимости от конкретного вида входящей в систему $DE_A(\varphi)$ функции $A(z)$. Общее решение системы определяющих уравнений с каждой фиксированной функцией $A(z)$ дает все операторы X^A , порождающие наиболее широкую (основную) допускаемую системой $E(A)$ группу.

На четвертом этапе осуществляется групповая классификация систем $E(A)$, связанная с упомянутым ветвлением процесса приведения в инволюцию. Каждое разветвление вызывается необходимостью учитывать равенство или неравенство нулю некоторых дифференциальных выражений $d(z, A)$ относительно функции A . Возникающие при этом альтернативные уравнения

$$d(z, A) = 0 \quad (3.14)$$

являются *классифицирующими*: именно они и выделяют возможные расширения допускаемой группы.

По построению, группа преобразований эквивалентности действует на множестве решений классифицирующих уравнений (3.14). Это позволяет выделять их характерные решения, имеющие наиболее простую аналитическую форму.

Наконец, для каждого выделенного решения уравнений (3.14) находится общее решение системы $DE_A(\varphi)$. Это и дает операторы X^A , порождающие допускаемую системой $E(A)$ основную группу для соответствующей формы "произвольного элемента" $A(z)$. Окончательный итог групповой классификации представляется в виде таблицы, содержащей все случаи расширения ядра основных групп.

Именно этим алгоритмом получена групповая классификация "больших моделей" $E(A)$ гаозвой динамики (2.1), представленная в табл. 1. Здесь "произвольный элемент" $a = A(p, \rho)$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$\Omega(A): A_t = A_x = A_u = 0 \quad (3.15)$$

На первом этапе искомые операторы записываются в виде

$$X^a = \xi^t \partial_t + \xi^x \cdot \partial_x + \xi^u \cdot \partial_u + \xi^p \partial_p + \xi^\rho \partial_\rho + \xi^a \partial_a$$

где $\xi^x \cdot \partial_x = \xi^x \partial_x + \xi^y \partial_y + \xi^z \partial_z$ и т.д. Здесь и далее нижними индексами обозначаются производные по соответствующим переменным.

Известный критерий [3] показывает, что система (2.1) "х-автономна" при любом A , т.е. координаты ξ^t, ξ^x могут зависеть только от переменных t, x . С учетом этого и при условии $a \neq 0$ подсистема DE_0 сводится к следующему. Координата ξ^t не зависит от x и есть функция только от t . Координаты ξ^x удовлетворяют уравнениям

$$\xi_x^x = \xi_y^y = \xi_z^z; \quad \xi_x^x + \xi_y^y = 0, \quad \xi_y^y + \xi_z^z = 0, \quad \xi_z^z + \xi_x^x = 0 \quad (3.16)$$

Все частные производные второго порядка от этих координат по переменным t, x равны нулю кроме смешанных производных $\xi_{xt}^x = \xi_{yt}^y = \xi_{zt}^z$, которые удовлетворяют уравнению

$$2\xi_{xt}^x = \xi_{tt}^t \quad (3.17)$$

Координаты ξ^u и ξ^p имеют конкретные выражения

$$\xi^u = \xi_t^x + u(\xi_x^x - \xi_t^t) + v\xi_y^x + w\xi_z^x$$

$$\xi^v = \xi_t^y + u\xi_x^y + v(\xi_x^x - \xi_t^t) + w\xi_z^y$$

$$\xi^w = \xi_t^z + u\xi_x^z + v\xi_y^z + w(\xi_x^x - \xi_t^t)$$

(3.18)

$$\xi^p = \rho(\xi_p^p + 2\xi_t^t - 2\xi_x^x)$$

Наконец, координата ξ^p не зависит от переменных x, u, ρ , т.е. является функцией только от t, ρ и удовлетворяет уравнениям

$$\xi_{pp}^p = 0, \quad \xi_{pt}^p + 5\xi_{xt}^x = 0 \quad (3.19)$$

Уравнения (3.16)–(3.19) и составляют подсистему DE_0 . Подсистема DE_a приводится к уравнениям

$$\xi_t^p + 3a\xi_{xt}^x = 0, \quad \xi^a = a\xi_p^p \quad (3.20)$$

Второй этап (вычисление группы преобразований эквивалентности) в данном случае сводится к учету независимости функций ξ^p и ξ^x от a , что дает $\xi_t^p = 0$ и $\xi_{xt}^x = 0$. Поэтому все производные второго порядка от координат ξ^t, ξ^x равны нулю. Что же касается

дополнительных условий $\Omega(a)$, имеющих здесь вид $a_t = a_x = a_u = 0$, то условие их инвариантности, как легко проверяется, выполнено тождественно. Построение общего решения полученной системы определяющих уравнений, которая уже находится в инволюции, выполняется автоматически. В результате получается 14-параметрическая группа преобразований эквивалентности, порожденная операторами X^a с координатами

$$\begin{aligned}\xi^t &= C_{10} + (C_{11} - R_1)t \\ \xi^x &= C_1 + C_4t + C_{11}x - C_9y + C_8z \\ \xi^y &= C_2 + C_5t + C_9x + C_{11}y - C_7z \\ \xi^z &= C_3 + C_6t - C_8x + C_7y + C_{11}z \\ \xi^u &= C_4 + R_1u - C_9v + C_8w \\ \xi^v &= C_5 + R_1v + C_9u - C_7w \\ \xi^w &= C_6 + R_1w - C_8u + C_7v \\ \xi^p &= (2R_1 + R_3)p; \quad \xi^r = R_2 + R_3p; \quad \xi^a = R_3a\end{aligned}\tag{3.21}$$

где C_i, R_j – произвольные постоянные.

Ядро основных групп выделяется выражением $\xi^a = \xi^p a_p + \xi^r a_r$, приводящим к уравнению

$$(R_2 + R_3p)a_p + (-2R_1 + R_3)a_r = 0$$

которое в силу произвольности величин a_p, a_r дает $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Поэтому ядро определяется константами C_i в (3.21) и совпадает с группой G_{11} , операторы которой выписаны в (2.2). Факторгруппа по ядру порождается операторами, соответствующими константам R_j :

$$X_1^a = -t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2p\partial_p\tag{3.22}$$

$$X_2^a = \partial_p, \quad X_3^a = p\partial_p + r\partial_r + a\partial_a$$

Вытекающие отсюда преобразования эквивалентности "произвольного элемента" A образуют трехпараметрическую группу, действующую по формулам (штрихом обозначены преобразованные величины)

$$p' = \alpha_3 p + \alpha_2, \quad r' = \alpha_1 \alpha_3 r, \quad A' = \alpha_3 A\tag{3.23}$$

с произвольными параметрами α_j , причем $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_3 > 0$.

На третьем этапе в (3.20) полагается $a = A(p, r)$ и $\xi^a = \xi^A = A_p \xi^p + A_r \xi^r$, что приводит к уравнениям

$$\xi_t^p + 3A \xi_{xt}^x = 0, \quad A_p \xi^p + A_r \xi^r = A \xi_p^p\tag{3.24}$$

Вместе с (3.15)–(3.19) они и образуют полную систему определяющих уравнений для допускаемых системой (2.1) операторов.

Для приведения ее в инволюцию прежде всего учитывается, что величина ξ_{xt}^x является постоянной; пусть $\xi_{xt}^x = B_0$. Затем из первого уравнения (3.19) следует, что ξ^p – линейная функция от p и можно положить

$$\xi^p = \varphi(t) + \psi(t)p\tag{3.25}$$

Тогда для ξ^p в (3.18) получается выражение

$$\xi^p = \rho(\psi + 2\xi_t^t - 2\xi_x^x) \quad (3.26)$$

Оставшиеся уравнения (3.19) и (3.24) приводятся к следующим (штрихами обозначены производные по t):

$$\psi' = -5B_0, \quad \varphi' = -(3A - 5p)B_0 \quad (3.27)$$

$$(\varphi + \psi p)A_p + (\psi + 2\xi_t^t - 2\xi_x^x)\rho A_p = \psi A \quad (3.28)$$

Дифференцирование равенства (3.28) по t и учет (3.27) и (3.17) дает уравнение $(3AA_p + 3\rho A_p - 5A)B_0 = 0$. С другой стороны, дифференцированием второго равенства (3.27) по p получается равенство $(3A_p - 5)B_0 = 0$. В результате получаются условия совместности определяющих уравнений

$$(3A_p - 5)B_0 = 0, \quad A_p B_0 = 0 \quad (3.29)$$

которые вызывают ветвление процесса решения: либо $B_0 = 0$, либо $B_0 \neq 0$.

Если $B_0 = 0$, то из (3.27) следует $\varphi' = \psi' = 0$ и, кроме того, все производные второго порядка от координат ξ^t, ξ^x равны нулю. В этом случае ξ_x^x и ξ_t^t — константы, и пусть $\xi_x^x - \xi_t^t = \omega$. Тогда уравнение (3.28), переписанное в виде

$$\varphi A_p + \psi(pA_p + \rho A_p - A) + 2\omega \rho A_p = 0 \quad (3.30)$$

является единственным, которому должны удовлетворять групповые константы φ, ψ, ω . В силу (3.30) свободными могут быть не более чем две из них. Значит в этом случае расширение ядра (2.2) возможно не более чем на два оператора. Дальнейший анализ расширений ядра основных групп связан только с уравнением (3.30) и использованием преобразований эквивалентности (3.23). Его можно выполнить разными конкретными способами (см. например [2]). В результате получаются все случаи расширения, перечисленные в табл. 1, кроме случая $N=7$.

Если $B_0 \neq 0$, то из (3.29) следует $A_p = 0$ и $3A_p = 5$. Отсюда $A = 5p/3 + C$, где $C = \text{const}$. За счет преобразования эквивалентности (3.23) константу C можно сделать равной нулю. Это дает классификационный случай $A = 5p/3$, соответствующий $N = 7$ в табл. 1. Для этой функции A из (3.28) получается $\varphi = 0$, а из (3.27) $\psi = -5B_0 t + R_2$. Кроме того, здесь будет $\xi_x^x = B_0 t + C_{11}$, а уравнение (3.17) может быть проинтегрировано по t в виде $\xi^t = B_0 t^2 + (C_{11} - R_1)t + C_{10}$. Поэтому ядро расширится операторами Y_1, Y_2 и Y_4 за счет констант R_1, R_2 и B_0 соответственно. Групповая классификация системы (2.1) относительно "произвольного элемента" $A(p, \rho)$ закончена.

4. Оптимальные системы подалгебр. Для перечисления всех подмоделей газовой динамики, которые можно получить на основе указанных в разд. 2 свойств симметрии необходимо для каждой "большой модели" из табл. 1 выполнить классификацию подгрупп допускаемых групп с точностью до сопряжения. Здесь решение этой задачи демонстрируется на примере группы G_{11} , допускаемой уравнениями (2.1) с уравнением состояния общего вида. Фактически решается эквивалентная задача о классификации подалгебр алгебры Ли L_{11} с базисом (2.2). При этом используются некоторые общие следствия из теории алгебр Ли, с которой можно ознакомиться по разным книгам (см. напр. [7]).

В общем случае исходным объектом является конечномерная алгебра Ли L размерности n над полем вещественных чисел с базисом X_1, \dots, X_n и таблицей коммутаторов

$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ ($i, j = 1, \dots, n$). С помощью этой таблицы путем интегрирования системы дифференциальных уравнений Ли вычисляется *присоединенная группа* A внутренних автоморфизмов алгебры Ли L .

Группа A действует на множестве подалгебр $K \subset L$, в силу чего это множество расслаивается на классы сопряженных (подобных) подалгебр. Совокупность представителей этих классов (по одному от каждого класса) называется *оптимальной системой* подалгебр и обозначается символом $\Theta_A L$ (иногда для краткости записи индекс "A" будет опускаться).

Решению задачи о построении $\Theta_A L$ посвящено довольно много работ, как чисто алгебраических для выделенных классов алгебр Ли и их подалгебр, так и работ прикладной направленности для конкретных алгебр Ли небольшой размерности (см. например [8–12]).

Приводимое ниже построение основано на использовании некоторых специальных конструкций [4]. К ним относятся использование композиционного ряда идеалов и разложение алгебры Ли $L = J \oplus N$ в полупрямую сумму собственного идеала J и подалгебры N с соответствующим разложением группы $A = A_J A_N$.

Рабочим является двухэтапный алгоритм, в котором на первом этапе строится оптимальная система $\Theta_{A_N} N = \{N_p | p \in P\}$ и определяются стабилизаторы $A_p \subset A$ подалгебр N_p , а на втором – оптимальные системы $\Theta_{A_p} (J + N_p) = \{K_{p,q} | q \in Q_p\}$. В итоге искомая оптимальная система дается объединением

$$\Theta_A L = \{K_{p,q} | p \in P, q \in Q_p\}$$

Вычисления выполняются в координатном представлении $H_\alpha = x_\alpha^i X_i$ базисов H_α ($\alpha = 1, \dots, r$) искомым подалгебр в виде матриц $\xi = \|\xi_k^i\|$ с учетом действия на эти матрицы группы B преобразований базиса. Тем самым построение $\Theta_A L$ сводится к вычислению оптимальной системы матриц (удовлетворяющих уравнениям подалгебры) $\Theta_G \{\xi\}$ относительно действия группы $G = AB$.

Дополнительное требование *нормализованности* искомой оптимальной системы состоит в том, чтобы вместе с любой подалгеброй $K \in \Theta_A L$ также и ее нормализатор $\text{Nor}_L K \in \Theta_A L$. Известно, что этому довольно жесткому требованию всегда можно удовлетворить [9]. В матричном представлении базисов подалгебр требуется получить максимально возможное количество *нулевых координат*. Остающиеся неопределенными координаты должны быть *инвариантами* участвующих подгрупп группы G .

Результат вычисления оптимальной системы подалгебр обычно представляется в виде таблицы подалгебр с указанием их базисов. Для нормализованной оптимальной системы ΘL возможно также более наглядное (и удобное для приложений) графическое представление. Оно основано на том, что каждая подалгебра $K \in \Theta L$ принадлежит *ветке идеалов* $K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_m$, в которой $K_{i+1} = \text{Nor} K_i$ ($i = 1, \dots, m-1$), подалгебра K_m *самонормализована*, т.е. $\text{Nor} K_m = K_m$, а подалгебра K_1 является *концевой* в том смысле, что нормализатор любого ее собственного идеала не совпадает с K_1 . Стрелки указывают вложение подалгебр. Каждая самонормализованная подалгебра является как бы корнем, в который могут входить несколько веток идеалов, образуя "куст идеалов" с общим корнем. Тем самым нормализованная оптимальная система ΘL может быть изображена в виде "кустарника идеалов" – совокупности всех принадлежащих ей кустов идеалов.

В качестве примера ниже рассматривается процесс построения оптимальной системы ΘL_{11} для алгебры Ли L_{11} с фиксированным базисом (2.2).

Таблица коммутаторов для L_{11} выписывается в виде табл. 2, где для краткости базисные элементы X_i (2.2) заменены их номерами i , причем символ $-i$ заменяет $-X_i$.

Непосредственно по табл. 2 выделяется и фиксируется следующий композиционный ряд

$$0 \subset \{X_1, X_2, X_3\} \subset \{X_1, \dots, X_6\} \subset \{X_1, \dots, X_9\} \subset \{X_1, \dots, X_{10}\} \subset L_{11} \quad (4.1)$$

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	0	1
2	0	0	0	0	0	0	3	0	-1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	-1	0
5	0	0	0	0	0	0	6	0	-4	-2	0
6	0	0	0	0	0	0	-5	4	0	-3	0
7	0	-3	2	0	-6	5	0	-9	8	0	0
8	3	0	-1	6	0	-4	9	0	-7	0	0
9	-2	1	0	-5	4	0	-8	7	0	0	0
10	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	10
11	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	-10	0

Таблица 3

	p'_1	p'_2	p'_3	p'_4	p'_5
T	$p_1 + e_1 p_5 + e_1 \wedge p_3$	p_2	p_3	p_4	p_5
Γ	$p_1 - e_2 p_4$	$p_2 + e_2 \wedge p_3$	p_3	p_4	p_5
S	$S p_1$	$S p_2$	$S p_3$	p_4	p_5
A_{10}	$p_1 + e_4 p_2$	p_2	p_3	$p_4 + e_4 p_5$	p_5
A_{11}	$e_5 p_1$	p_2	p_3	$e_5 p_4$	p_5
ε_1	$-p_1$	$-p_2$	p_3	p_4	p_5
ε_2	p_1	$-p_2$	p_3	$-p_4$	p_5

Группа внутренних автоморфизмов A порождается базисными (11×11) -матрицами $A_i(a_i)$, зависящими от параметров a_i ($i = 1, \dots, 11$). Результат действия этих матриц на вектор-столбец $x = (x^i)$ из координат общего элемента $X = x^i X_i$ сведен в табл. 3, построенную по следующим правилам. В соответствии с факторами композиционного ряда (4.1) вводится разбиение вектора x на подвекторы (проекции x)

$$p_1 = (x^1, x^2, x^3), \quad p_2 = (x^4, x^5, x^6), \quad p_3 = (x^7, x^8, x^9), \quad p_4 = x^{10}, \quad p_5 = x^{11}$$

Аналогично группируются параметры образующих матриц $A_i(a_i)$

$$e_1 = (a_1, a_2, a_3), \quad e_2 = (a_4, a_5, a_6), \quad e_3 = (a_7, a_8, a_9), \quad e_4 = a_{10}, \quad e_5 = a_{11}$$

Вводятся обозначения произведений автоморфизмов

$$T = A_1 A_2 A_3, \quad \Gamma = A_4 A_5 A_6, \quad (S \otimes E_3) \times E_2 = A_7 A_8 A_9, \quad A_{10}, A_{11}$$

Здесь S общая (3×3) -матрица вращений в трехмерном пространстве R^3 , E_k – единичные $(k \times k)$ -матрицы, а действие остальных матриц указано явно. Штрихом обозначены соответствующие проекции преобразованного вектора $x' = Ax$. В табл. 3 добавлены дискретные автоморфизмы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, индуцированные инволюциями I_1, I_2 из разд. 2. Символ \wedge означает обычное векторное произведение в R^3 .

Для построения ΘL_{11} используется разложение $L_{11} = J \oplus N$, где

$$J = \{X_1, \dots, X_6\}, \quad N = \{X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}\}$$

Из табл. 3 видно, что соответствующее разложение присоединенной группы $A = A_J A_N$ (без учета инволюций \mathcal{E}_i) справедливо с $A_J = T\Gamma$ и $A_N = S A_{10} A_{11}$.

На первом этапе надо построить нормализованную оптимальную систему $\Theta_{A_N} N$.
Использование композиционного ряда для N

$$0 \subset \{X_7, X_8, X_9\} \subset \{X_7, X_8, X_9, X_{10}\} \subset N$$

позволяет применить еще раз процедуру разложения $N = J^1 \oplus N^1$, где $J^1 = \{X_7, X_8, X_9\}$ и $N^1 = \{X_{10}, X_{11}\}$. Здесь действие присоединенной 5-параметрической группы A_N^1 описывается блоком в табл. 3, соответствующим строкам S , A_{10} , A_{11} и столбцам p'_3 , p'_4 , p'_5 . Разложение группы $A_N^1 = A_{J^1} A_{N^1}$ справедливо с $A_{J^1} = S$ и $A_{N^1} = A_{10}$.

Построение $\Theta_{A_N} N$ выполняется в два подэтапа. На первом подэтапе надо найти нормализованную оптимальную систему $\Theta_{A_{N^1}} N^1$ подалгебр, что равносильно построению оптимальной системы $\Theta_{G^1}(\zeta)$ матриц

$$\zeta = \begin{vmatrix} x^{10} & x^{11} \\ y^{10} & y^{11} \end{vmatrix}$$

относительно действия группы $G^1 = A_{10} B_2$. Так как ранг $R(\zeta)$ матрицы ζ является инвариантом группы G^1 , то построение следует вести по значениям этого ранга. Если $R(\zeta) = 2$, то очевидными B_2 -преобразованиями матрица ζ приводится к единичной. В случае $R(\zeta) = 1$, когда матрица ζ однострочная, для нее априори возможны две приведенные формы: $(\beta, 1)$ и $(1, 0)$. Однако автоморфизмом A_{10} (см. табл. 3) первая из них сводится к $(0, 1)$. Наконец, $R(\zeta) = 0$ матрица ζ нулевая. Итак, первый подэтап дает оптимальную систему $\Theta_{A_{N^1}} N^1 = \{N_p \mid p = 1, 2, 3, 4\}$

$$N_1 = \{X_{10}, X_{11}\}, \quad N_2 = \{X_{11}\}, \quad N_3 = \{X_{10}\}, \quad N_4 = \{0\} \quad (4.2)$$

На втором подэтапе рассматриваются (5×5) -матрицы блочного строения

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta^1 & \zeta \\ \eta^2 & 0 \end{vmatrix}$$

где ζ — одна из подматриц, соответствующих (4.2), а блок η^2 следует за первой не нулевой строкой в ζ . Здесь возникает новый дискретный инвариант $R(\eta^2)$, равный рангу (3×3) -подматрицы η^2 , для которого возможны значения 3, 2, 1, 0.

Если $R(\eta^2) = 3$, то B -преобразованиями подматрица η^2 приводится к единичной, а подматрица η^1 — к нулевой. Вместе с (4.2) это дает подалгебры

$$N_5 = \{X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}\}, \quad N_6 = \{X_7, X_8, X_9, X_{11}\},$$

$$N_7 = \{X_7, X_8, X_9, X_{10}\}, \quad N_8 = \{X_7, X_8, X_9\}$$

В дальнейшем используется *дополнительное условие*: если в базис подалгебры входит один оператор вращения, то он автоморфизмом S и B -преобразованием приводится к X_7 .

Легко проверяется, что значение $R(\eta^2) = 2$ находится в противоречии с уравнениями подалгебры (УП). Пусть $R(\eta^2) = 1$. Тогда подвектор $\eta^2 = (x^7, x^8, x^9)$, согласно дополнительному условию, приводится к $\eta^2 = (1, 0, 0)$. После очевидных B -преобразований и использования УП оказывается, что во всех случаях (4.2) подматрица η^1 нулевая.

Таблица 4

p	Базис N_p	$\text{Nor}_N N_p$	A_p
1	7, 8, 9, 10, 11	= 1	$T\Sigma\varepsilon_1$
2	7, 8, 9, 11	= 2	$TA_{11}\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2$
3	7, 10, 11	= 3	$TS_1\varepsilon_1$
4	$10, 7 + \alpha 11$ ($\alpha \neq 0$)	3	$TS_1\varepsilon_1$
5	7, 11	= 5	$TS_1A_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2$
6	$7 + \alpha 11$ ($\alpha \neq 0$)	5	$TS_1A_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2$
7	7, 8, 9, 10	1	$TA_{10}\Sigma\varepsilon_1$
8	7, 8, 9	1	$TA_{10}A_{11}\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2$
9	7, 10	3	$TS_1A_{10}\varepsilon_1$
10	7	3	$TS_1A_{10}A_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2$
11	$7 + 10$	9	$TS_1A_{10}\varepsilon_1$
12	10, 11	1	$TS\varepsilon_1$
13	11	2	$TS A_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2$
14	10	1	$TS A_{10}\varepsilon_1$
15	0	1	$A\varepsilon_1\varepsilon_2$

Это дает подалгебры

$$N_9 = \{X_7, X_{10}, X_{11}\}, N_{10} = \{X_7, X_{11}\}, N_{11} = \{X_7, X_{10}\}, N_{12} = \{X_7\}$$

Наконец, с $R(\eta^2) = 0$ матрица η^2 нулевая. В этом случае из УП следует, что ранг $R(\eta^1)$ подматрицы η^1 не может быть равен двум. Если $R(\eta^1) = 0$, т.е. $\eta^1 = 0$, то получаются подалгебры (4.2). Если же $R(\eta^1) = 1$, то ненулевая строка в η^1 , согласно дополнительному условию, приводится к $(\beta, 0, 0)$, где $\beta \neq 0$. Тогда для ее сочетания с N_1 из УП следует, что ненулевая строка η^1 может находиться в одной строке только с X_{11} , что дает подалгебру $N_{13} = \{X_{10}, X_7 + \alpha X_{11}\}$. Аналогично с N_2 получается подалгебра $N_{14} = \{X_7 + \alpha X_{11}\}$, а с N_3 – подалгебра $\{\beta X_7 + X_{10}\}$, которая автоморфизмом A_{11} приводится к $N_{15} = \{X_7 + X_{10}\}$. Наконец, с N_4 получается уже известная подалгебра N_{13} .

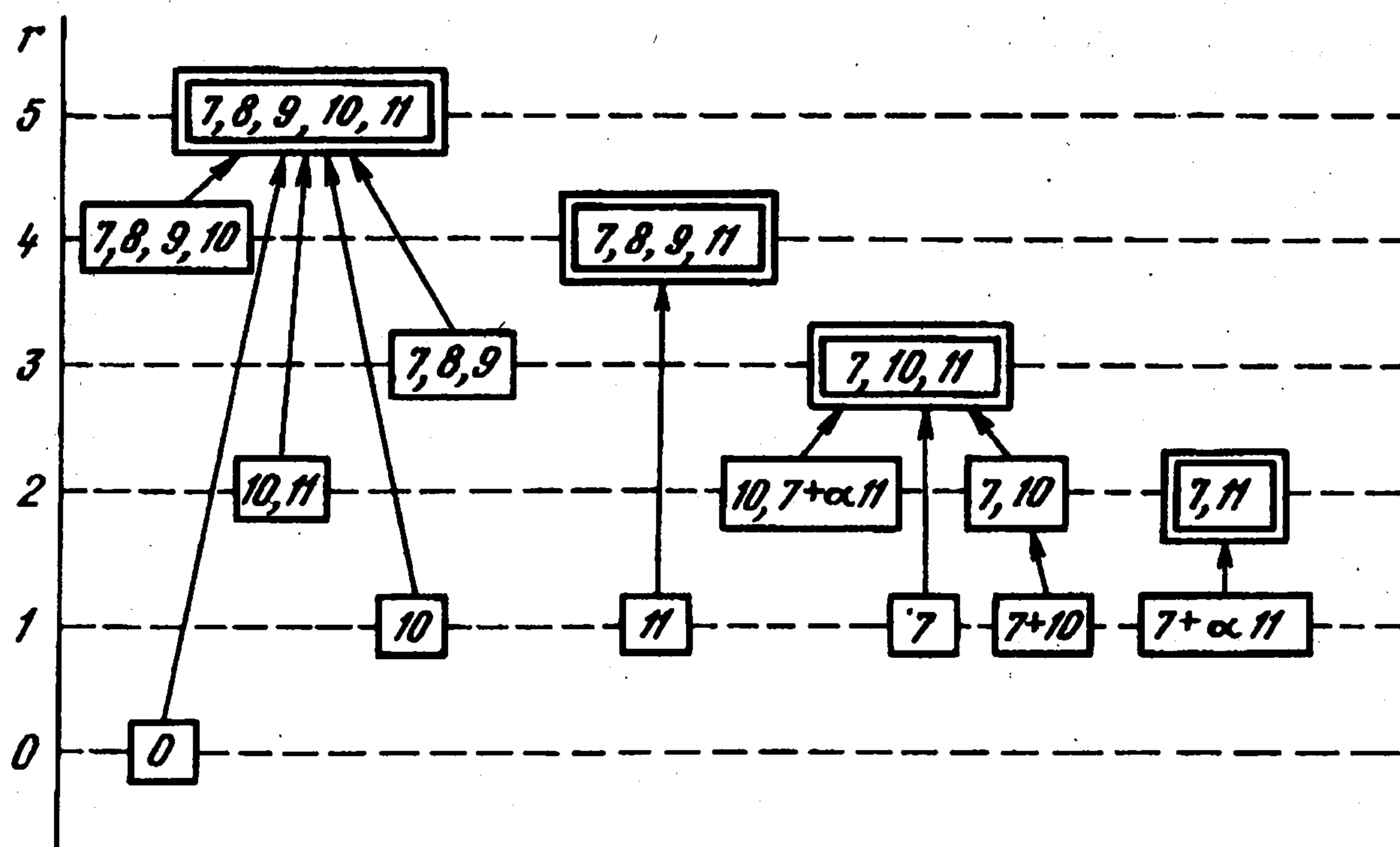
На этом первый этап построения ΘL_{11} закончен: вычислена оптимальная система $\Theta_{A_N} N$. Она содержит 15 представителей, два из которых образуют однопараметрические серии. Итог этого построения представлен в табл. 4 подалгебр N_p ($p = 1, \dots, 15$), где базисы подалгебр записаны символически только номерами соответствующих операторов базиса (2.2). При этом символ $7 + \alpha 11$ означает $X_7 + \alpha X_{11}$ и т.п.

Полученная оптимальная система $\Theta_{A_N} N$ нормализована. Номера p нормализаторов подалгебр N_p в N указаны в третьем столбце табл. 4, где символом $= p$ отмечены самонормализованные подалгебры. В последнем столбце приведены стабилизаторы A_p матриц η_p , соответствующих подалгебрам N_p . Они находятся непосредственно по табл. 3. Здесь S_1 – матрица вращения вокруг первой оси, а символом Σ обозначен автоморфизм, действующий на (3×3) -матрицу M по формуле $\Sigma M = S^{-1}MS$.

Соответствующий табл. 4 кустарник идеалов изображен на фиг. 1. Здесь наглядно видно, что выделение подалгебры $\{7\}$ из серии $\{7 + \alpha 11\}$ мотивировано различием нормализаторов в N . Что же касается выделения подалгебры $\{7, 10\}$ из серии $\{10, 7 + \alpha 11\}$, то оно вызвано различием нормализаторов этих подалгебр во всей алгебре Ли L_{11} . Двойной рамкой выделены самонормализованные подалгебры. Числа r означают размерности подалгебр.

На втором этапе построения ΘL_{11} последовательно для каждого $p = 1, \dots, 15$ рассматриваются матрицы

$$\xi_p = \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \eta_p \\ \xi^3 & \xi^4 & 0 \\ \xi^5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Фиг. 1

из 11 столбцов и $r \leq 11$ строк, которые в соответствие с композиционным рядом (4.1) разбиты на блоки. Блоки-подматрицы ξ^j имеют по 3 столбца и ≤ 3 строки, а η_p – матрица, соответствующая подалгебре N_p из табл. 4.

Второй этап состоит в том, чтобы для каждого $p = 1, \dots, 15$ построить подсистему $\Theta_{G_p} \{ \xi_p \}$ матриц ξ_p , удовлетворяющих условиям подалгебры (УП), оптимальную относительно действия группы $G_p = A_p B_p$, где A_p – стабилизаторы, указанные в табл. 3, а $B_p \subset B$ – подгруппа группы B -преобразований, оставляющих на месте подматрицу η_p .

Проводить описание процесса выполнения второго этапа во всех подробностях здесь нецелесообразно ввиду его монотонности и утомительности для читателя, да и практически невозможно, так как такое описание требует многих страниц. Уместно отметить лишь в общих чертах следующие узловые моменты этого построения.

Ранги подматриц $R(\xi^4)$ и $R(\xi^5)$ являются инвариантами любых G_p -преобразований. Так как каждый из них может принимать четыре значения 3, 2, 1, 0, то априори возникает 16 не подобных видов строения матрицы ξ_p . Предварительно путем G_p -преобразований каждая из матриц ξ^4, ξ^5 приводится к нескольким стандартным формам (в выборе которых есть определенный произвол). Затем отбрасываются те из этих форм, которые не удовлетворяют УП с η_p . Оставшиеся и служат основой для окончательного приведения матрицы ξ_p с помощью G_p -преобразований и выделения конкретных представителей в искомую оптимальную систему. Свойство нормализованности отслеживается в этом процессе за счет последовательности анализа от меньших размерностей к большим и систематическим вычислением нормализаторов получаемых подалгебр.

В итоге выполнения второго этапа получена нормализованная оптимальная система $\Theta_{L_{11}}$ подалгебр алгебры Ли L_{11} с базисом (2.2), приведенная в Приложении.

5. Инвариантные подмодели ранга три. Для программы ПОДМОДЕЛИ важно упорядочение подмоделей путем введения некоторой их маркировки. Для газовой динамики предлагается обозначение подмоделей матричным двухстрочным индексом.

"Большие модели" из табл. 1 обозначаются $\binom{4}{k}$, $k = 1, \dots, 13$. Подмодели ранга три

"большой модели" $\binom{4}{k}$ обозначаются индексом $\binom{4 \ 3}{k \ l}$, $l = 1, 2, \dots$, для подмоделей

ранга 2 используется индекс $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ k & m \end{pmatrix}$, $m = 1, 2, \dots$ и т.д., где номера l, m, \dots берутся из соответствующих таблиц.

В этом разделе дается предварительное описание подмоделей $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & l \end{pmatrix}$, $l = 1, \dots, 13$, получаемых относительно однопараметрических подгрупп, соответствующих подалгебрам $L_{1,l}$ из табл. 6 (см. Приложение). Подмодели относительно подалгебр с номерами $l = 7, \dots, 13$, не содержащих оператора вращения, записываются в декартовых координатах. В подалгебрах с $l = 1, \dots, 6$ содержится оператор вращения X_7 и соответствующие подмодели удобнее представлять в цилиндрических координатах, вводимых следующими соотношениями.

Независимыми переменными будут t, x, r, θ где

$$y = r \cos \theta, z = r \sin \theta; r = \sqrt{y^2 + z^2}, \theta = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} \quad (5.1)$$

Компоненты вектора скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c = (u_c, v_c, w_c)$ вводятся формулами

$$u_c = u, \quad v_c = v \cos \theta + w \sin \theta, \quad w_c = -v \sin \theta + w \cos \theta \quad (5.2)$$

$$u = u_c, \quad v = v_c \cos \theta - w_c \sin \theta, \quad w = v_c \sin \theta + w_c \cos \theta$$

Здесь v_c – радиальная (в плоскости y, z), а w_c – окружная компоненты вектора скорости. Обозначения плотности и давления остаются прежними: ρ, p .

Исходная система уравнений газовой динамики (2.1) в цилиндрических координатах принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} D_c u_c + \rho^{-1} \nabla_c p &= r^{-1} (0, w_c^2, -v_c w_c) \\ D_c \rho + \rho \operatorname{div}_c \mathbf{u} &= 0, \quad D_c p + A \operatorname{div}_c \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\nabla_c = (\partial_x, \partial_r, r^{-1} \partial_\theta), \quad \operatorname{div}_c \mathbf{u} = u_{cx} + v_{cr} + r^{-1} v_c + r^{-1} w_{c\theta}$$

$$D_c = \partial_t + \mathbf{u}_c \nabla_c = \partial_t + u_c \partial_x + v_c \partial_r + r^{-1} w_c \partial_\theta$$

Участвующие в построении подмоделей ранга три базисные операторы X_7, X_{11} в цилиндрических координатах (5.1), (5.2) будут $X_7 = \partial_\theta, X_{11} = t \partial_t + x \partial_x + r \partial_r$, а остальные не меняются.

Общее правило построения инвариантных H -решений состоит в следующем [2]. Находятся независимые инварианты группы H , которые выбираются, вообще говоря, с некоторым произволом. Затем между этими инвариантами устанавливаются соотношения такого рода, что инварианты – искомые величины назначаются функциями от инвариантов – независимых переменных. Эти функции и будут новыми искомыми в подмодели – фактор-системе E/H . Она сформулируется после подстановки выражений исходных искомым величин, полученных из инвариантных соотношений, в исходную систему E .

В табл. 5 дана сводка используемых в дальнейшем наборов инвариантов для всех 13 обсуждаемых подмоделей $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, номера k которых указаны в первом столбце. Во втором столбце напоминает, что подмодели с $k = 1, \dots, 6$ рассматриваются в цилиндрических координатах (C), а с $k = 7, \dots, 13$ – в декартовых координатах (D). Операторы однопараметрических подгрупп H_k , по которым строятся инвариантные

Таблица 5

k	Система координат	Оператор	Инвариантные независимые переменные	Инвариантная компонента U
1		$\beta X_4 + X_7 + \alpha X_{11}$ ($\alpha \neq 0$)	$x_1 = \frac{x}{t} - \beta\theta, r_1 = \frac{r}{t}, \theta_1 = \theta - \frac{1}{\alpha} \ln t$	$u = u_c - \beta\theta$
2	C	$\beta X_4 + X_7$	$t, x_1 = x - \beta t\theta, r$	$U = u_c$
3		X_7	t, x, r	$U = u_c$
4		$X_1 + X_7$	$t, x_1 = x - \theta, r$	$U = u_c - t$
5		$\beta X_4 + X_7 + \beta X_{10}$	$t_1 = t - \beta\theta, x_1 = x - \frac{1}{2}t^2, r$	$U = u_c - t$
6		$X_7 + X_0$	$t_1 = t - \theta, x, r$	$U = u_c$
7		$\beta X_4 + X_{11}$	$x_1 = \frac{x}{t} - \beta \ln t, y_1 = \frac{y}{t}, z_1 = \frac{z}{t}$	$U = u - \frac{x}{t}$
8		X_{11}	$x_1 = \frac{x}{t}, y_1 = \frac{y}{t}, z_1 = \frac{z}{t}$	$U = u$
9	D	$X_4 + X_{10}$	$x_1 = x - \frac{1}{2}t^2, y, z$	$U = u - t$
10		X_{10}	x, y, z	$U = u$
11		$X_3 + X_4$	$t, x_1 = x - tz, y$	$U = u - z$
12		X_4	t, y, z	$U = u - \frac{x}{t}$
13		X_1	t, y, z	$U = u$

H_k -решения, приведены в третьем столбце в обозначениях (2.2). В четвертом столбце выписаны инвариантные независимые переменные, причем те из них, которые отличаются от исходных, снабжены индексом 1. Для новых искомым инвариантных величин вектора скорости, плотности и давления принимаются обозначения $U = (U, V, W)$, ρ, p . При этом во всех подмоделях $V = v_c, W = w_c$ (в координатах C) или $V = v, W = w$ (в координатах D), а ρ и p – инварианты. Поэтому в пятом столбце указано явно только выражение для инвариантной компоненты U .

Ниже представляются конкретные факторсистемы для всех подмоделей ранга три согласно табл. 5. Как было сказано в начале статьи, программа ПОДМОДЕЛИ предполагает также общий анализ ("одевание") получаемых подмоделей. Однако это задание выходит за рамки настоящей статьи, его исполнение должно быть предметом дальнейших публикаций. Здесь будет указана лишь описательная характеристика соответствующих движений газа и отмечена их чисто геометрическая структура, определяемая линиями уровня инвариантов. Для инвариантных подмоделей ранга три эти линии играют ту же роль, что и точки пространства событий $R^4(t, x)$ для исходной "большой модели".

Линией уровня инвариантов называется кривая \mathcal{L} в пространстве $R^4(t, x)$, вдоль которой независимые переменные в факторсистеме (инварианты) сохраняют постоянное значение. Совокупность всех линий уровня инвариантов обозначается символом $\{\mathcal{L}\}$.

Следуя от более простых к более сложным подмоделям, перечисление идет в обратном порядке по табл. 5. Всюду инвариантный вектор скорости обозначается $U = (U, V, W)$.

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$ описывает двумерные движения газа. Представление решения

$$(u, \rho, p) = (U, \rho, p)(t, y, z) \quad (5.4)$$

Факторсистема уравнений подмодели такова:

$$\begin{aligned} D_1 U = 0, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_y = 0, \quad D_1 W + \rho^{-1} p_z = 0 \\ D_1 \rho + \rho(V_y + W_z) = 0, \quad D_1 p + A(V_y + W_z) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $D_1 = \partial_t + V\partial_y + W\partial_z$.

В частности, с $U = 0$ эта подмодель описывает *плоскопараллельные* движения газа; $\{L\}$ – семейство прямых, параллельных оси x .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ описывает галилеево-инвариантные движения газа. Представление решения

$$u = \frac{x}{t} + U(t, y, z), \quad (v, w, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(t, y, z) \quad (5.6)$$

Факторсистема такова:

$$\begin{aligned} D_1(tU) = 0, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_y = 0, \quad D_1 W + \rho^{-1} p_z = 0 \\ D_1(tp) + tp(V_y + W_z) = 0, \quad D_1(tp) + tA(V_y + W_z) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $D_1 = \partial_t + V\partial_y + W\partial_z$.

Здесь также L – прямые, параллельные оси x .

Представляет интерес сравнение факторсистем (5.5) и (5.7), в частности, для политропного газа ($A = \gamma p$).

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ описывает сдвиговые движения газа. Представление решения

$$u = z + U(t, x_1, y), \quad (v, w, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(t, x_1, y), \quad x_1 = x - tz \quad (5.8)$$

Факторсистема такова:

$$\begin{aligned} D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} = -W, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_y = 0 \\ D_1 W - t\rho^{-1} p_{x_1} = 0; \quad D_1 \rho + \rho(U_{x_1} - tW_{x_1} + V_y) = 0 \\ D_1 p + A(U_{x_1} - tW_{x_1} + V_y) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $D_1 = \partial_t + (U - tW)\partial_{x_1} + V\partial_y$.

Линии L образуют семейство прямых, параллельных плоскости (x, z) , угловой коэффициент которых зависит от t .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ описывает стационарные (установившиеся) течения газа. Представление решения

$$(u, \rho, p) = (U, \rho, p)(x, y, z) \quad (5.10)$$

Факторсистема такова:

$$D_1 U + \rho^{-1} \nabla p = 0, \quad D_1 \rho + \rho \operatorname{div} U = 0, \quad D_1 p + A \operatorname{div} U = 0 \quad (5.11)$$

где $D_1 = U\partial_x + V\partial_y + W\partial_z$.

Линии L образуют семейство прямых, параллельных оси t .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ описывает стационарные течения газа в однородном поле сил, направленных параллельно оси x . Представление решения

$$u = t + U(x, y, z), (v, w, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(x_1, y, z), \quad x_1 = x - t^2 / 2 \quad (5.12)$$

Факторсистема такова:

$$\begin{aligned} D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} &= -1, D_1 V + \rho^{-1} p_y = 0, D_1 W + \rho^{-1} p_z = 0 \\ D_1 \rho + \rho(U_{x_1} + V_y + W_z) &= 0, D_1 p + A(U_{x_1} + V_y + W_z) = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $D_1 = U \partial_{x_1} + V \partial_y + W \partial_z$.

Линии \mathcal{L} образуют семейство конгруэнтных парабол, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости (y, z) .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ описывает конически автомодельные движения газа. Представление решения

$$(u, \rho, p) = (U, \rho, p)(x_1), \quad x_1 = x / t \quad (5.14)$$

С оператором $D_1 = (U - x_1) \partial_{x_1} + (V - y_1) \partial_{y_1} + (W - z_1) \partial_{z_1}$ факторсистема имеет вид (5.11), где надо заменить ∇ на $\nabla_1 = (\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{z_1})$, а $\operatorname{div} U$ на $\operatorname{div}_1 U = U_{x_1} + V_{y_1} + W_{z_1}$. Семейство $\{\mathcal{L}\}$ – совокупность полупрямых (лучей), выходящих из начала координат.

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ описывает квазиконические (или обобщенные конические) движения газа. Представление решения

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{t} + U(x_1, y_1, z_1), \quad (v, w, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(x_1, y_1, z_1) \\ x_1 &= \frac{x}{t} - \beta \ln t, \quad y_1 = \frac{y}{t}, \quad z_1 = \frac{z}{t} \end{aligned} \quad (5.15)$$

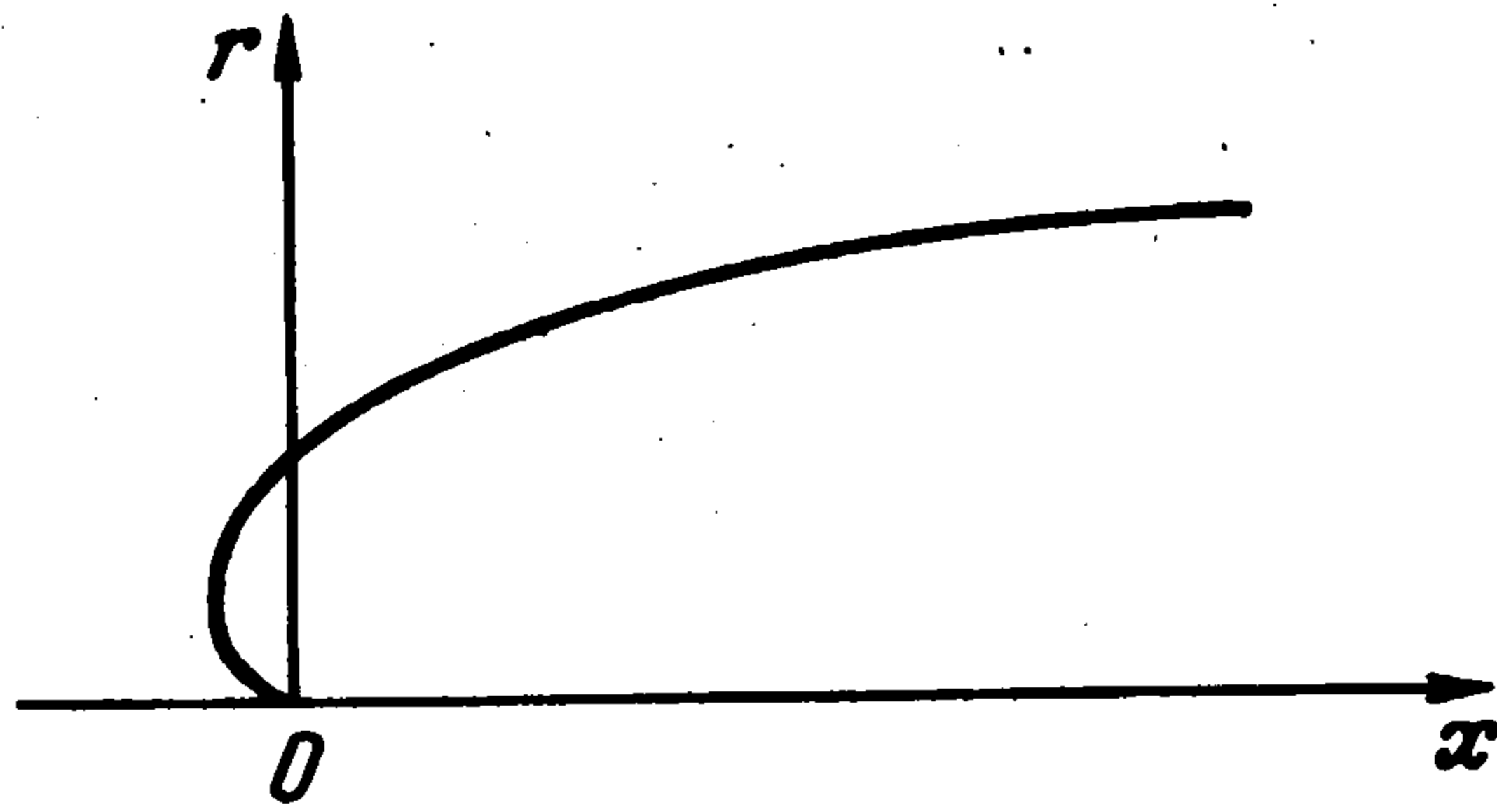
Факторсистема записывается в виде

$$\begin{aligned} D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} &= -U, D_1 V + \rho^{-1} p_{y_1} = 0 \\ D_1 W + \rho^{-1} p_{z_1} &= 0; D_1 \rho + \rho(U_{x_1} + V_{y_1} + W_{z_1} + 1) = 0 \\ D_1 p + A(U_{x_1} + V_{y_1} + W_{z_1} + 1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $D_1 = (U - \beta) \partial_{x_1} + (V - y_1) \partial_{y_1} + (W - z_1) \partial_{z_1}$.

Семейство $\{\mathcal{L}\}$ образуют квазилучи, представляющие собой плоские кривые, выходящие из начала координат. Наглядное представление об этих кривых дают их проекции на пространство $R^3(x)$, получаемые исключением времени t из формул (5.15). Типичная проекция, имеющая в ее плоскости (x, r) уравнение вида $x = ar + b r \ln r$, показана на фиг. 2.

Оставшиеся подмодели рассматриваются в цилиндрических координатах согласно (5.2)–(5.3).



Фиг. 2

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ описывает вращательные движения газа. Представление реше-

ния

$$(u_c, \rho, p) = (U, \rho, p)(t_1, x, r), \quad t_1 = t - \theta \quad (5.17)$$

Факторсистема такова:

$$D_1 U + \rho^{-1} p_x = 0, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_r = +r^{-1} W^2$$

$$D_1 W - r^{-1} \rho^{-1} p_{t_1} = -r^{-1} VW$$

$$D_1 \rho + \rho(U_x + V_r + r^{-1} V - r^{-1} W_{t_1}) = 0 \quad (5.18)$$

$$D_1 p + A(U_x + V_r + r^{-1} V - r^{-1} W_{t_1}) = 0$$

где $D_1 = (1 - r^{-1} W) \partial_{t_1} + U \partial_x + V \partial_r$.

Проекциями линий \mathcal{L} на пространство $R^3(x)$ являются окружности с центрами на оси x , лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Сами же линии \mathcal{L} – спирали с постоянным шагом, "намотанные" на круговые цилиндры с осью x .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ описывает обобщенные вращательные движения газа в однород-

ном поле сил, направленных параллельно оси x . Представление решения

$$u_c = t + U(t_1, x_1, r), \quad (v_c, w_c, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(t_1, x_1, r)$$

$$t_1 = t - \beta \theta, \quad x_1 = x - t^2 / 2 \quad (5.19)$$

Факторсистема записывается в виде

$$D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} = -1, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_r = +r^{-1} W^2$$

$$D_1 W - \beta r^{-1} \rho^{-1} p_{t_1} = -r^{-1} VW$$

$$D_1 \rho + \rho(U_{x_1} + V_r + r^{-1} V - \beta r^{-1} W_{t_1}) = 0 \quad (5.20)$$

$$D_1 p + A(U_{x_1} + V_r + r^{-1} V - \beta r^{-1} W_{t_1}) = 0$$

где $D_1 = (1 - \beta r^{-1} W) \partial_{t_1} + U \partial_{x_1} + V \partial_r$.

Сложная форма линий \mathcal{L} для этой подмодели допускает простую интерпретацию, если их наблюдать в системе координат, движущейся по закону $x = t^2/2$ в направлении

оси x . Тогда семейство $\{\mathcal{L}\}$ будет выглядеть так же, как в подмодели $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, с шагом

спиралей, равным 2β .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ описывает винтовые движения газа. Представление решения

$$(\mathbf{u}_c, \rho, p) = (\mathbf{U}, \rho, p)(t, x_1, r), \quad x_1 = x - \theta \quad (5.21)$$

Факторсистема имеет вид:

$$D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} = 0, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_r = +r^{-1} W^2$$

$$D_1 W - r^{-1} \rho^{-1} p_{x_1} = -r^{-1} V W$$

$$D_1 \rho + \rho(U_{x_1} - r^{-1} W_{x_1} + V_r + r^{-1} V) = 0 \quad (5.22)$$

$$D_1 p + A(U_{x_1} - r^{-1} W_{x_1} + V_r + r^{-1} V) = 0$$

где $D_1 = \partial_t + (V - r^{-1} W) \partial_{x_1} + V \partial_r$.

Здесь $\{\mathcal{L}\}$ – семейство прямых, параллельных оси t , которые проектируются на пространство R^3 в виде совокупности спиралей с постоянным шагом, "намотанных" на круговые цилиндры с осью x .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ описывает вращательно-симметричные движения газа. Пред-

ставление решения

$$(\mathbf{u}_c, \rho, p) = (\mathbf{U}, \rho, p)(t, x, r) \quad (5.23)$$

Факторсистема такова:

$$D_1 U + \rho^{-1} p_x = 0, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_r = +r^{-1} W^2, \quad D_1 W = -r^{-1} V W$$

$$D_1 \rho + \rho(U_x + V_r + r^{-1} V) = 0, \quad D_1 p + A(U_x + V_r + r^{-1} V) = 0 \quad (5.24)$$

где $D_1 = \partial_t + U \partial_x + V \partial_r$.

Линии \mathcal{L} образуют семейство окружностей, лежащих в плоскостях перпендикулярных оси x (в R^3) с центрами на этой оси.

Частные решения системы (5.24) с $W = 0$ описывают осесимметричные движения газа.

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ описывает обобщенные вращательно-симметричные движения

газа. Представление решения

$$u_c = \beta \theta + U(t, x_1, r), \quad (v_c, w_c, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(t, x_1, r)$$

$$x_1 = x - \beta t \theta \quad (5.25)$$

Факторсистема такова:

$$D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} = -\beta r^{-1} W, \quad D_1 V + \rho^{-1} p_r = +r^{-1} W^2$$

$$D_1 W - \beta t r^{-1} \rho^{-1} p_{x_1} = -r^{-1} V W$$

$$D_1 \rho + \rho(U_{x_1} - \beta t W_{x_1} + V_r + r^{-1} V) = 0 \quad (5.26)$$

$$D_1 p + A(U_{x_1} - \beta t W_{x_1} + V_r + r^{-1} V) = 0$$

где $D_1 = \partial_t + (U - \beta t r^{-1} W) \partial_{x_1} + V \partial_r$.

Проекции кривых \mathcal{L} на пространство $R^3(x)$ имеют, как и в подмодели $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ вид спиралей, "намотанных" на круговые цилиндры с осью x . Однако здесь шаг спиралей зависит от времени t .

Подмодель $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ описывает квазиконические спиральные движения газа. Представление решения

$$\begin{aligned} u_c &= \beta\theta + U(x_1, r_1, \theta_1), (v_c, w_c, \rho, p) = (V, W, \rho, p)(x_1, r_1, \theta_1) \\ x_1 &= x/t - \beta\theta, r_1 = r/t, \theta_1 = \theta - \alpha^{-1} \ln t \end{aligned} \quad (5.27)$$

Факторсистема такова:

$$\begin{aligned} D_1 U + \rho^{-1} p_{x_1} &= -\beta r_1^{-1} W, D_1 V + \rho^{-1} p_\eta = +r_1^{-1} W^2 \\ D_1 W - \beta t r_1^{-1} \rho^{-1} p_{x_1} + r_1^{-1} \rho^{-1} p_{\theta_1} &= -r_1^{-1} V W \\ D_1 \rho + \rho (U_{x_1} - \beta r_1^{-1} W_{x_1} + V_\eta + r_1^{-1} V + r_1^{-1} W_{\theta_1}) &= 0 \\ D_1 p + A (U_{x_1} - \beta r_1^{-1} W_{x_1} + V_\eta + r_1^{-1} V + r_1^{-1} W_{\theta_1}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

где $D_1 = (U - x_1 - \beta r_1^{-1} W) \partial_{x_1} + (V - r_1) \partial_\eta + (r_1^{-1} W - \alpha^{-1}) \partial_{\theta_1}$.

Проекции линий \mathcal{L} на пространство $R^3(x)$ – спирали, "намотанные" на поверхности вращения кривых вида, изображенного на фиг. 2.

В частном случае $\beta = 0$ эта подмодель описывает конические спиральные движения газа. Для них проекции \mathcal{L} на $R^3(x)$ – спирали, "намотанные" на круговые конусы с вершиной в начале координат и осью x .

Автор благодарит участников семинара "Групповой анализ" (Ин-т гидродинамики СО РАН) С.В. Мелешко, С.В. Хабирова, А.А. Талышева, А.П. Чупахина, Е.В. Мамонтова, А.А. Черевко, с которыми содержание статьи многократно обсуждалось.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17326).

Приложение. Нормализованная оптимальная система ΘL_{11} . В табл. 6 представлена вычисленная по алгоритму разд. 4 нормализованная оптимальная система подалгебр для алгебры Ли L_{11} с базисом (2.2). Подалгебры – представители обозначаются парой чисел (r, i) , где r – размерность, i – порядковый номер подалгебры размерности r . Числа r приведены перед каждым блоком, содержащим подалгебры размерности r . В первом столбце приведены порядковые числа i . Во втором столбце выписаны базисы подалгебр (r, i) в сокращенной символической записи: выписаны только номера соответствующих базисных векторов (2.2), как в табл. 4 (см. разд. 4). Здесь же указаны возможные ограничения таких параметров, причем отсутствие такого указания означает, что параметры могут иметь любые вещественные значения. В третьем столбце приведены нормализаторы подалгебр в L_{11} , которые в силу нормализованности всей таблицы содержатся в этой же таблице и поэтому указаны надлежащей парой (r', i') . Знак = здесь означает, что соответствующая подалгебра самонормализована. Верхний индекс 0 указывает на то, что нормализатор содержится в серии подалгебр и получается при нулевом значении участвующего в ней параметра.

Таблица 6

i	Базис	Nor	i	Базис	Nor
$r = 11$			$r = 6$		
1	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 10; 11	= 11,1	15	2, 3; 4, 5, 6; 7	8,4
$r = 10$			16	1, 2, 3; 5, 6; 7 + 10	7,5°
1	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 11	= 10,1	17	2, 3; 5, 6; 10, 11	7,3
2	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 10	11,1	18	1, 2, 3; 4; 10; $\alpha 6 + 11$	8,5
$r = 9$				$\alpha \neq 0$	
1	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7; 10; 11	= 9,1	19	1, 2, 3; 4; 10; 11	9,1
2	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9	11,1	20	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 11$	8,4
$r = 8$			21	2, 3; 4, 5, 6; 11	7,6
1	1, 2, 3; 7, 8, 9; 10; 11	= 8,1	22	1, 2, 3; 5, 6; 10	9,1
2	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; 10;	9,1	23	1, 2, 3; 5, 6; 4 + 10	8,3°
	$\beta 4 + 11$		24	1, 2, 3; 4, 5, 6	11,1
3	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7 + $\alpha 11$; 10	9,1	$r = 5$		
4	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7; 11	= 8,4	1	7, 8, 9; 10; 11	= 5,1
5	1, 2, 3; 4, 5, 6; 10; 11	11,1	2	1; 4; 7; 10; 11	= 5,2
$r = 7$			3	2, 3; 7; 10; 11	= 5,3
1	1, 2, 3; 7, 8, 9; 11	= 7,1	4	1, 2, 3; 10; $\beta 4 + 7 + \alpha 11$	7,4
2	4, 5, 6; 7, 8, 9; 11	= 7,2	5	4, 5, 6; 7; 11	= 5,5
3	2, 3; 5, 6; 7; 10; 11	= 7,3	6	2, 3, 4; 7; 11	= 5,6
4	1, 2, 3; 4; 7; 10; 11	= 7,4	7	1; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	6,4
5	1, 2, 3; 5, 6; 10;	9,1	8	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	6,5
	$\beta 4 + 7 + \alpha 11$		9	1; 4, 5, 6; 7 + $\alpha 11$	6,4
6	2, 3; 4, 5, 6; 7; 11	= 7,6	10	2, 3; 5, 6; $\beta 4 + 7 + \alpha 11$	7,6
7	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	8,4		$\alpha \neq 0$	
8	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7 + $\alpha 11$	8,4	11	1, 2, 3; 4; 7 + $\alpha 11$	6,5
9	1, 2, 3; 7, 8, 9; 10	8,1		$\alpha \neq 0$	
10	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; 4 + 10	8,3°	12	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7$; 4 + 10	6,3°
11	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7 + 10	8,3°	13	2, 3; 5, 6; $\beta 4 + 7$	8,4
12	1, 2, 3; 5, 6; 10; $\alpha 4 + 11$	9,1		$\beta \neq 0$	
13	1, 2, 3; 4, 5, 6; 11	10,1	14	2, 3; 5, 6; 7	9,1
14	1, 2, 3; 4, 5, 6; 10	11,1	15	1, 2, 3; 4; 7	9,1
$r = 6$			16	1; 4, 3 + 5, 2 - 6; 7	= 5,16
1	1, 2, 3; 7; 10; 11;	7,4	17	2, 3; 5, 6; 1 + 7	8,3°
2	2, 3; 5, 6; 10; 7 + $\alpha 11$	7,3	18	2, 3; 5, 6; $\beta 4 + 7 + \beta 10$	7,10°
	$\alpha \neq 0$			$\beta \neq 0$	
3	1, 2, 3; 4; 10; 7 + $\alpha 11$	7,4	19	2, 3; 5, 6; 7 + 10	7,5°
4	1; 4, 5, 6; 7; 11	= 6,4	20	1, 2, 3; 4; 7 + 10	6,3°
5	1, 2, 3; 4; 7; 11	= 6,5	21	2, 3; 5; 10; $\beta 6 + 11$	6,17
6	2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	7,6	22	1, 2, 3; 10; 4 + $\beta 11$	9,1
7	2, 3; 4, 5, 6; 7 + $\alpha 11$	7,6	23	1, 2, 3; 10; 11	11,1
	$\alpha \neq 0$		24	1; 4, 5, 6; 11	6,4
8	1, 2, 3; 5, 6; $\beta 4 + 7 + \alpha 11$	8,4	25	2, 3; $\alpha 4 + 5, 6$; $\beta 4 + 11$	6,21
9	4, 5, 6; 7, 8, 9	7,2		$\alpha \neq 0$	
10	1, 2, 3; 7, 8, 9	8,1	26	2, 3; 5, 6, $\beta 4 + 11$	7,6
11	2, 3; 5, 6; 1 + 7; 10	7,5°	27	2, 3; 4, 6; $\beta 5 + 11$	6,21
12	2, 3; 5, 6; $\alpha 1 + 7$; 4 + 10	7,10°	28	1, 2, 3; 6; $\beta 4 + 11$	7,13
13	2, 3; 5, 6; 7; 10	8,2°		$\beta \neq 0$	
14	2, 3; 4, 5, 6; 1 + 7	7,8°	29	1, 2, 3; 4; 11	8,4
			30	2, 3; $\alpha 1 + 5, 6$; 4 + 10	6,23
				$\alpha \neq 0$	
			31	2, 3; 5, 6; 4 + 10	7,10°
			32	2, 3; 1 + 5, 6; 10	6,22

Таблица 6 (продолжение)

<i>i</i>	Базис	Nor	<i>i</i>	Базис	Nor
<i>r</i> = 5			<i>r</i> = 4		
33	2, 3; 5, 6; 10	8,2 ⁰⁰	40	1, 2, 3; 10	11,1
34	1, 2, 3; 6; 4 + 10	7,14	41	1; $\sigma^2 + \tau^3 + 4, \alpha^3 + 5,$ $\beta^2 + 6$ $\sigma^2 + \tau^2 + (\alpha + \beta)^2 = 1$	6,24
35	2, 3; 4, 5, 6	8,4	42	1; 4, 3 + 5, 2 - 6	7,8 ⁰
36	2, 3; 4, 5; 1 + 6	6,24	43	1; 4, 5, 6	8,4
37	1, 2, 3; 5, 6	9,1	44	2, $\alpha^1 + 3; 1 + 5, 6$ $\alpha \neq 0$	6,24
<i>r</i> = 4			<i>r</i> = 3		
1	7, 8, 9; 11	= 4,1	1	7; 10; 11	= 3,1
2	1; $\alpha^4 + 7; 10; 11$	5,2	2	1; 10; $\beta^4 + 7 + \alpha^1 1$	5,2
3	2, 3; 10; 7 + $\alpha^1 1$ $\alpha \neq 0$	5,3	3	4; 7; 11	= 3,3
4	1; 4; 10; 7 + $\alpha^1 1$	5,2	4	1; $\alpha^4 + 7; \beta^4 + 11$	4,6
5	5, 6; $\alpha^4 + 7; \beta^4 + 11$	5,5	5	5, 6; $\beta^4 + 7 + \alpha^1 1$ $\alpha \neq 0$	5,5
6	1; 4; 7; 11	= 4,6	6	1; 4; 7 + $\alpha^1 1$ $\alpha \neq 0$	4,6
7	2, 3; $\alpha^4 + 7; \beta^4 + 11$	5,6	7	2, 3; $\beta^4 + 7 + \alpha^1 1$ $\alpha \neq 0$	5,6
8	4, 5, 6; 7 + $\alpha^1 1$ $\alpha \neq 0$	5,5	8	7, 8, 9	5,1
9	1; 5, 6; $\beta^4 + 7 + \alpha^1 1$	6,4	9	1; $\alpha^4 + 7; 4 + 10$	4,4 ⁰
10	2, 3; 4; 7 + $\alpha^1 1$	5,6	10	5, 6; $\beta^4 + 7$	6,4
11	1, 2, 3; $\beta^4 + 7 + \alpha^1 1$ $\alpha \neq 0$	6,5	11	1; 4; 7	5,2
12	1, 2, 3; $\beta^4 + 7$	7,4	12	2, 3; $\beta^4 + 7$ $\beta \neq 0$	6,5
13	7, 8, 9; 10	5,1	13	2, 3; 7	7,4
14	2, 3; 7; 10	6,1	14	5, 6; 1 + $\alpha^4 + 7$	5,9 ⁰
15	2, 3; 1 + 7; 10	5,4 ⁰⁰	15	3 + 5, 2 - 6; $\alpha^1 + \beta^4 + 7$	5,16
16	2, 3; $\alpha^1 + 7; 4 + 10$	5,12 ⁰	16	2, 3; 1 + 7	6,3 ⁰
17	4, 5, 6; 7	6,4	17	1; 4; 7 + 10	4,4 ⁰
18	4, 5, 6; 1 + 7	5,9 ⁰	18	2, 3; $\beta^4 + 7 + \beta^1 0$ $\beta \neq 0$	5,12 ⁰
19	4, 3 + 5, 2 - 6; $\alpha^1 + 7$	5,16	19	2, 3; 7 + 10	5,4 ⁰⁰
20	1; 3 + 5, 2 - 6; $\alpha^4 + 7$	5,16	20	1; 10; $\beta^4 + 11$	5,2
21	2, 3; 4; 1 + 7	5,15	21	5, 6; $\beta^4 + 11$	5,5
22	1, 2, 3; $\beta^4 + 7 + 10$	6,3 ⁰	22	1; $\alpha^4 + 6; \beta^5 + \sigma^5 + 11$	5,24
23	1; 4; 10; 11	5,2	23	1; 4; $\sigma^6 + 11$ $\sigma \neq 0$	5,24
24	2, 3; 10; $\alpha^6 + 11$ $\alpha \neq 0$	6,17	24	1; 4; 11	6,4
25	2, 3; 10; 11	7,3	25	2, 3; $\beta^4 + \sigma^5 + 11$ $\sigma \neq 0$	6,21
26	4, 5, 6; 11	7,2	26	2, 3; $\beta^4 + 11$	7,6
27	1; $\alpha^4 + 5, 6; \beta^4 + 11$ $\alpha \neq 0$	5,24	27	3; $\alpha^1 + \beta^2 + 6; 4 + 10$	5,34
28	1; 5, 6; $\beta^4 + 11$	6,4	28	1; 2 + 4; 10	5,22 ⁰
29	1; 4, 6; $\alpha^5 + 11$	5,24	29	1; 4; 10	7,4
30	2, 3; $\alpha^4 + 6; \beta^4 + \sigma^5 + 11$	6,21			
31	2, 3; 4; $\alpha^5 + \beta^6 + 11$ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$	6,21			
32	2, 3; 4; 11	7,6			
33	1, 2, 3; $\beta^4 + 11$ $\beta \neq 0$	8,4			
34	1, 2, 3; 11	10,1			
35	2, 3; $\alpha^1 + 5; 4 + \beta^6 + 10$	6,23			
36	2, 3; $\alpha^1 + 5; 6 + 10$	6,22			
37	2, 3; 1 + 5; 10	6,22			
38	2, 3; 5; 10	7,12 ⁰			
39	1, 2, 3; 4 + 10	8,3 ⁰			

Таблица 6 (окончание)

i	Базис	Nor	l	Базис	Nor
$r = 3$			$r = 2$		
30	2, 3; 4 + $\sigma_6 + 10$ $\sigma \neq 0$	6,23	12	10; 11	5,1
31	2, 3; 4 + 10	7,10°	13	4; 11	5,5
32	2, 3; 6 + 10	6,22	14	4; $\alpha_5 + 11$ $\alpha \neq 0$	4,26
33	2, 3; 10	8,2°	15	1; $\beta_4 + \alpha_5 + 11$ $\alpha \neq 0$	5,24
34	$-\delta_2 + \beta_3 + 4, \delta_1 + \sigma_2 - \alpha_3 + 5,$ $-\beta_1 + \alpha_2 + \tau_3 + 6$ $\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + (\sigma + \tau)^2 = 1$	6,24	16	1; $\beta_4 + 11$	6,4
35	4,3 + 5,2 - 6	7,8°	17	1; 10	7,4
36	1 + 4, 5, 6	7,8°	18	3; 4 + $\alpha_6 + 10$ $\alpha \neq 0$	5,34
37	4, 5, 6	10,1	19	1; 4 + 10	6,3°
38	$\alpha_1 + 3; \beta_1 + 5, \sigma_1 + \tau_2 + 6$ $\beta^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 1$	6,24	20	$\alpha_1 + \sigma_3 + 5, \beta_1 + \tau_2 + 6$ $\alpha^2 + \beta^2 + (\sigma + \tau)^2 = 1$	6,24
39	$\alpha_1 + 3; 5, 6$	7,13	21	3 + 5, 2 - 6	7,8°
40	1, 3 + 5, $\tau_2 + 6$ $\tau \neq -1$	6,24	22	5, 6	8,4
41	1, 3 + 5, 2 - 6	7,8°	23	$\alpha_1 + 2; 3 + 4$	6,24
42	1, 5, 6	8,4	24	$\alpha_1 + 2; 4$	7,13
43	$\beta_1 + 3; 2; 4$	7,13	25	1; 3 + 4	7,14
44	2, 3; 4	8,4	26	1; 4	9,1
45	1, 2; 3 + 4	7,14	27	2, 3	9,1
46	1, 2; 4	8,5	$r = 1$		
47	1, 2, 3	11,1	1	$\beta_4 + 7 + \alpha_{11}$ $\alpha \neq 0$	3,3
$r = 2$			2	$\beta_4 + 7$ $\beta \neq 0$	4,6
1	10; 7 + α_{11} $\alpha \neq 0$	3,1	3	7	5,2
2	$\alpha_4 + 7; \beta_4 + 11$	3,3	4	1 + 7	4,4°
3	4; 7 + α_{11} $\alpha \neq 0$	3,3	5	$\beta_4 + 7 + \beta_{10}$ $\beta \neq 0$	3,9°
4	1; $\beta_4 + 7 + \alpha_{11}$ $\alpha \neq 0$	4,6	6	7 + 10	3,2°
5	7; 10	4,2°	7	$\beta_4 + 11$ $\beta \neq 0$	5,5
6	1 + 7; 10	3,2°	8	11	7,2
7	$\alpha_1 + 7; 4 + 10$	3,9°	9	4 + 10	5,12°
8	4; 7	4,6	10	10	8,1
9	1; $\beta_4 + 7$	5,2	11	3 + 4	6,24
10	4; 1 + 7	3,11	12	4	8,4
11	1; $\beta_4 + 7 + 10$	4,4°	13	1	9,1

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Новосибирск: СО Ин-т гидродинамики РАН, 1992. 11 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. Овсянников Л.В. О свойстве x -автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 5. С. 559-561.
4. Овсянников Л.В. Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 6. С. 702-704.
5. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.

6. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 432 с.
7. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 355 с.
8. *Ovsiannikov L.V.* The Group analysis Algorithms // Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics. Cluwer Acad. Publ., 1993. P. 277–289.
9. *Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The De Sitter groups // J. Math. Phys. 1977. V. 18. № 12. P. 2259–2288.
10. *Ибрагимов Н.Х.* Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967. 59 с.
11. *Ланко Б.В.* Построение оптимальных систем подгрупп группы Ли преобразований, допускаемой уравнениями газовой динамики // Динамика сплошной среды, Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1973. Вып. 14. С. 112–119.
12. *Фушич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. Киев: Наук. думка, 1991. 300 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.XI.1993