ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 4, 1994

УДК 62-50

© 1994 г. Н.Н. Петров

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Доказывается существование значения игры преследования в класе кусочно-программных стратегий (КПС), несколько отличающихся от рассмотренных ранее для двух участников [1], в дифференциальных играх со многими убегающими и преследователями.

Вопросам существования цены игры двух лиц посвящены монографии [2–6], где приведена обширная библиография. Задача сближения-уклонения с несколькими целевыми множествами рассматривалась в [7], где вопрос о существовании ситуации равновесия решался не в классе КПС, как ниже, а в классе кусочно-позиционных стратегий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу преследования с ограниченным временем T между нарядом преследователей $P = \{P_1,\ldots, P_n\}$ и нарядом убегающих $E = \{E_1,\ldots$ $\ldots, E_m\}$, которую будем трактовать как антагонистическую игру двух лиц P и E.

Пусть уравнения движения игроков P_i (преследователей, $i = 1,2,\ldots,n$) и E_j (убегающих, $j = 1,2,\ldots, m$) имеют вид

$$P_i\colon \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i),\ \mathbf{u}_i \in U_i,\ \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0$$

$$E_j\colon \dot{\mathbf{y}}_j = \mathbf{g}_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{v}_j),\ \mathbf{v}_j \in V_j;\ \mathbf{y}_j(0) = \mathbf{y}_j^0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in R^k,\ U_i \subset R^{n_i},\ V_j \subset R^{m_j}$$

Здесь U_i, V_j – компакты.

Пусть $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_1^0,\ldots\ \mathbf{x}_n^0)$, $\mathbf{Y}_0 = (\mathbf{y}_1^0,\ldots,\ \mathbf{y}_m^0)$. Обозначим через $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, J_T)$ игру, начинающуюся в момент $t = 0$ из начальных позиций $(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ с функцией выигрыша J_T. В классе КПС в случае $m = n = 1$ было доказано [1] существование ситуации ε-равновесия в этой игре при

$$J_{\text{T}} = \min_{t\in[0,T]} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|$$

Ниже подобным методом, с использованием несколько иного определения КПС, доказывается аналогичное утверждение для случая

$$J_{\text{T}} = \sum_j \min_{t\in[0,T]} \min_i \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{y}(t)\|$$

Здесь и далее суммирование по j ведется от 1 до m, по i – от 1 до n.

Некоторые следствия из этого результата касаются игр преследования с неограниченным временем.

Будем рассматривать системы (1.1) в следующих предположениях:

а) функции $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)(\mathbf{g}_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{v}_j))$ определены и непрерывны для $(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \in R^k \times$ $\times U_i((\mathbf{y}_j, \mathbf{v}_j) \in R^k \times V_j)$;

б) функции $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)(\mathbf{g}_i(\mathbf{y}_i,\boldsymbol{\upsilon}_j))$ удовлетворяют по $\mathbf{x}_i(\mathbf{y}_j)$ локальному условию Липшица с постоянной, не зависящей от $\mathbf{u}_i(\boldsymbol{\upsilon}_j)$;

в) для всех $(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)(\mathbf{y}_i,\boldsymbol{\upsilon}_j)$ справедливо условие

$$|\langle \mathbf{x}_i,\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)\rangle| \leq C_i\left(1+\|\mathbf{x}_i\|^2\right),\ |\langle \mathbf{y}_j,\mathbf{g}_j(\mathbf{y}_j,\boldsymbol{\upsilon}_j)\rangle| \leq D_j\left(1+\|\mathbf{y}_j\|^2\right)$$

Тогда для любого набора измеримых функций $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i(t)$, $\boldsymbol{\upsilon}_j=\boldsymbol{\upsilon}_j(t)$, определенных на $[0, T]$ со значениями в U_i, V_j, системы (1.1) имеют решения $\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_i(t,\mathbf{x}_i^0,\mathbf{u}_i(t))$, $\mathbf{y}_j=\mathbf{y}_j(t,\mathbf{y}_j^0,\boldsymbol{\upsilon}_j(t))$ с начальными данными $(0,\ \mathbf{x}_i^0)$, $(0,\ \mathbf{y}_j^0)$, определенные на $[0, T]$. Также существуют числа R и δ_0, такие, что неравенства

$$\|\mathbf{x}_i(t,\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i(t))\| \leq R,\ \|\mathbf{y}_j(t,\mathbf{y}_j,\boldsymbol{\upsilon}_j(t))\| \leq R$$

справедливы для любых измеримых функций $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i(t)\in U_i$, $\boldsymbol{\upsilon}_j=\boldsymbol{\upsilon}_j(t)\in V_j$, определенных на $[0, T]$ и любых $\mathbf{x}_i\in D_{\delta_0}(\mathbf{x}_i^0)$, $\mathbf{y}_j\in D_{\delta_0}(\mathbf{y}_j^0)$. Кроме того, существуют такие постоянные $L=L(D_R(0))$ и M, что для любых $\mathbf{x}_i^1,\mathbf{x}_i^2\in D_{\delta_0}(\mathbf{x}_i^0),\mathbf{y}_j^1,\mathbf{y}_j^2\in D_{\delta_0}(\mathbf{y}_j^0)$, $t_1,t_2\in[0,T]$ и любых измеримых функций $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i(t)\in U_i$, $\boldsymbol{\upsilon}_j=\boldsymbol{\upsilon}_j(t)\in V_j$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{x}_i(t,\mathbf{x}_i^1,\mathbf{u}_i(t))-\mathbf{x}_i(t,\mathbf{x}_i^2,\mathbf{u}_i(t))\| \leq e^{LT}\|\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_i^2\|$$

$$\|\mathbf{x}_i(t_1,\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i(t))-\mathbf{x}_i(t_2,\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i(t))\| \leq M|t_1-t_2| \qquad (1.2)$$

и аналогичные неравенства при замене $\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i$ на $\mathbf{y}_j,\boldsymbol{\upsilon}_j$.

Перейдем к описанию игровых элементов задачи. Под конечным разбиением σ интервала $[0,T]$ будем понимать совокупность различных чисел $\{0,\ T,\ t_l\in(0,T),\ l=1,\ldots,r\}$, занумерованных в порядке возрастания. Множество всех σ будем обозначать Σ. Каждое разбиение $\sigma\in\Sigma$ порождает разбиение $\sigma_l=\{t_l,\ldots,T\}$ отрезка $[t_l,T]$.

Определение 1. Кусочно-программной стратегией (КПС) Q_i игрока P_i будем называть пару (σ, Q_σ), где $\sigma\in\Sigma$, причем

$$\Sigma:\ 0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_r<t_{r+1}=T \qquad (1.3)$$

а Q_σ – семейство отображений $b_i^l\ (l=0,1,\ldots,r)$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l,\mathbf{x}_1(t_l),\ldots,\mathbf{x}_n(t_l),\mathbf{y}_1(t_l),\ldots,\mathbf{y}_m(t_l)$$

$$\min_{t\in[0,t_l]}\min_i\|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{y}_1(t)\|,\ldots,\min_{t\in[0,t_l]}\min_i\|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{y}_m(t)\|) \qquad (1.4)$$

измеримую функцию $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i(t)\in U_i$, определенную для $t\in[t_l,t_{l+1})$. Аналогично определяются КПС S_j игроков E_j. Совокупность $(Q_1,\ldots,Q_n,S_1,\ldots,S_m)$ будем называть ситуацией. В силу сделанных предположений, в каждой ситуации $(Q_1,\ldots,S_m)$ определены траектории движения $\mathbf{x}_i(t),\mathbf{y}_j(t)$ для $t\in[0,T]$, и следовательно, определено значение функции выигрыша

$$K(Q_1,\ldots,Q_n,\ S_1,\ldots,S_m)=\sum_j\min_{t\in[0,T]}\min_i\|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{y}_j(t)\| \qquad (1.5)$$

Игрок P стремится минимизировать величину $K(Q_1,\ldots,S_m)$, игрок E – максимизировать.

Введем в рассмотрение множества

$$G_{P_i}^{t_l}=\bigcup_{\mathbf{x}_i\in D_{\delta_0}(\mathbf{x}_i^0)}\ \bigcup_{0\leq t\leq t_l}C^t(\mathbf{x}_i),\quad G_{E_j}^{t_l}=\bigcup_{\mathbf{y}_j\in D_{\delta_0}(\mathbf{y}_j^0)}\ \bigcup_{0\leq t\leq t_l}C^t(\mathbf{y}_j)$$

где $C^t(\mathbf{x}_i), C^t_i(\mathbf{y}_j)$ множества тех точек, в которые может попасть игрок P_i, E_j в момент t, начав движение в начальный момент из точки $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j$ по траекториям системы (1.1).

Пусть $A_i(\mathbf{x}_i,\tau)$, $A_j(\mathbf{y}_j,\tau)$ – множество всех траекторий игрока P_i,E_j, определенных на $[0,\tau]$ и исходящих из $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j$; $\overline{A_i(\mathbf{x}_i\tau)}$, $\overline{A_j(\mathbf{y}_j,\tau)}$ – замыкание данных множеств в пространстве непрерывных функций.

Введем обозначения:

$$W_0 = D_{\delta_0}(\mathbf{x}_1^0)\times\ldots\times D_{\delta_0}(\mathbf{x}_n^0)\times D_{\delta_0}(\mathbf{y}_1^0)\times\ldots\times D_{\delta_0}(\mathbf{y}_m^0)$$

$$W_l = G_{P_1}^{t_l}\times\ldots\times G_{P_n}^{t_l}\times G_{E_1}^{t_l}\times\ldots\times G_{E_m}^{t_l}$$

$$\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n),\ \mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_m),\ \mathbf{x}_i,\mathbf{y}_j\in R^k$$

$$\mathbf{R}=(\rho_1,\ldots,\rho_m),\ \rho_j\in R^1,\ \rho_j^0=\min_i\|\mathbf{x}_i^0-\mathbf{y}_j^0\|$$

$$\|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\|=\sum_i\|\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_i^2\|,\ \|\mathbf{Y}_1-\mathbf{Y}_2\|=\sum_j\|\mathbf{y}_j^1-\mathbf{y}_j^2\|,\ \|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2\|=\sum_j|\rho_j^1-\rho_j^2|$$

$$\overline{A(\mathbf{X},\tau)}=\overline{A_1(\mathbf{x}_1,\tau)}\times\overline{A_2(\mathbf{x}_2,\tau)}\times\ldots\times\overline{A_n(\mathbf{x}_n,\tau)}$$

$$\overline{A(\mathbf{Y},\tau)}=\overline{A_1(\mathbf{y}_1,\tau)}\times\ldots\times\overline{A(\mathbf{y}_n,\tau)}$$

Игру из начальных позиций ($\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$) с функцией выигрыша (1.4), в которой игроки P и E могут использовать КПС, будем обозначать $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$, а ее значение $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$.

2. Некоторые вспомогательные игры. Рассмотрим игру $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$, отличающуюся от $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ лишь состоянием информации игроков и классом допустимых стратегий. Пусть $\sigma_0 \in \Sigma$ (1.3). В игре $\underline{\Gamma}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$ игроки E_j используют КПС в соответствии с определением 1.

Определение 2. Кусочно-программной контрстратегией Q_i игрока P_i в игре $\underline{\Gamma}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$ называется семейство отображений $b_i^l(l=0,1,\ldots,r)$, ставящих в соответствие величинам (1.4) и управлениям $\mathbf{v}_j(t), t\in[t_l,t_{l+1})$ измеримую функцию $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i(t)\in U_i$, определенную для $t\in[t_l,t_{l+1})$.

Введем величины $\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\sigma_l,\mathbf{R}_l)$ следующим образом:

$$\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l)=\max_{\mathbf{Y}_{l+1}(t)\in\overline{A(\mathbf{Y}_l,\Delta t_l)}}\ \min_{\mathbf{X}_{l+1}(t)\in\overline{A(\mathbf{X}_l,\Delta t_l)}}\underline{V}(\mathbf{X}_{l+1}(\Delta t_l),\mathbf{Y}_{l+1}(\Delta t_l),\mathbf{R}_{l+1},\sigma_{l+1})$$

$$(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l)\in W_l,\ \Delta t_l=t_{l+1}-t_l,\ \mathbf{R}_{l+1}=(\rho_1^{l+1},\ldots,\rho_m^{l+1}) \tag{2.1}$$

$$\rho_j^{l+1}=\min\left\{\rho_j^l,\ \min_{t\in[0,\Delta t_l]}\ \min_i\|\mathbf{x}_i^{l+1}(t)-\mathbf{y}_j^{l+1}(t)\|\right\},\ l=0,\ldots,r-1$$

$$\underline{V}(\mathbf{X}_r,\mathbf{Y}_r,\mathbf{R}_r,\sigma_r)=\max_{\mathbf{Y}_{r+1}(t)\in\overline{A(\mathbf{Y}_r,\Delta t_r)}}\ \min_{\mathbf{X}_{r+1}(t)\in\overline{A(\mathbf{X}_r,\Delta t_r)}}\sum_j\min\Big\{\rho_j^r,$$

$$\min_{t\in[0,\Delta t_r]}\ \min_i\|\mathbf{x}_i^{r+1}(t)-\mathbf{y}_j^{r+1}(t)\|\Big\}.$$

Теорема 1. 1°. Формула (2.1) определяет значение игры $\Gamma(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\sigma_0)$, равное $\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,R_0,\sigma_0)$.

2°. Функции $\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,R_l,\sigma_l)$ удовлетворяют условию Липшица в $W_l\times R_+^m$, т.е. для любых $(\mathbf{X}_l^1,\mathbf{Y}_l^1,R_l^1)$, $(\mathbf{X}_l^2,\mathbf{Y}_l^2,R_l^2)\in W_l\times R_+^m$ справедливо неравенство

$$\left|\underline{V}(\mathbf{X}_l^1,\mathbf{Y}_l^1,\mathbf{R}_l^1,\sigma_l)-\underline{V}(\mathbf{X}_l^2,\mathbf{Y}_l^2,\mathbf{R}_l^2,\sigma_l)\right|\le\|\mathbf{R}_l^1-\mathbf{R}_l^2\|+e^{L(T-t_l)}m\left(\|\mathbf{X}_l^1-\mathbf{X}_l^2\|+\|\mathbf{Y}_l^1-\mathbf{Y}_l^2\|\right) \tag{2.2}$$

где L – величина, фигурирующая в неравенствах (1.2).

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается исходя из определения ситуации ε равновесия и определения величины $\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma_0)$. Неравенство (2.2) доказывается по индукции.

Докажем (2.2) для $l=r$. Из определения $\underline{V}(\mathbf{X}_r,\mathbf{Y}_r,\mathbf{R}_r,\sigma_r)$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют управления $\upsilon_j^1(t)$, $u_i^2(t)$ $t\in[0,\Delta t_r]$, такие что

$$|\underline{V}(\mathbf{X}_r^1,\mathbf{Y}_r^1,\mathbf{R}_r^1,\sigma_r)-\underline{V}(\mathbf{X}_r^2,\mathbf{Y}_r^2,\mathbf{R}_r^2,\sigma_r)|\leqslant\sum_j(I_{1j}+I_{2j})+\varepsilon$$

$$I_{1j}=|\rho_j^{1r}-\rho_j^{2r}| \tag{2.3}$$

$$I_{2j}=\max_{t\in[0,\Delta t_r]}\max_i\Big|\|\mathbf{x}_i^{r+1}(t,\mathbf{x}_i^1,\mathbf{u}_i^2(t))-\mathbf{y}_j^{r+1}(t,\mathbf{y}_j^1,\boldsymbol{\upsilon}_j^1(t))\|-$$

$$-\|\mathbf{x}_i^{r+1}(t,\mathbf{x}_i^2,\mathbf{u}_i^2(t))-\mathbf{y}_i^{r+1}(t,\mathbf{y}_i^2,\boldsymbol{\upsilon}_j^2(t))\|\Big|$$

Используя (1.2), получаем

$$I_{2j}\leqslant\max_{t\in[0,\Delta t_r]}\max_i e^{L\Delta t_r}\left(\|\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_i^2\|+\|\mathbf{y}_j^1-\mathbf{y}_j^2\|\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{L\Delta t_r}\left(\|\mathbf{X}_r^1-\mathbf{X}_r^2\|+\|\mathbf{y}_j^1-\mathbf{y}_j^2\|\right) \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует

$$\left|\underline{V}\left(\mathbf{X}_r^1,\mathbf{Y}_r^1,\mathbf{R}_r^1,\sigma_r\right)-\underline{V}\left(\mathbf{X}_r^2,\mathbf{Y}_r^2,\mathbf{R}_r^2,\sigma_r\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\mathbf{R}_r^1-\mathbf{R}_r^2\right\|+e^{L\Delta t_r}m\left(\left\|\mathbf{X}_r^1-\mathbf{X}_r^2\right\|+\left\|\mathbf{Y}_r^1-\mathbf{Y}_r^2\right\|\right)+\varepsilon$$

В силу произвольности ε получаем (2.2) для $l=r$.

Теорема 2. Пусть $\sigma,\sigma'\in\Sigma$ и

$$\sigma=\{0,t_1,\ldots,t_l,t_{l+1},\ldots,T\},\quad \sigma'=\{0,t_1,\ldots,t_l,t^*,t_{l+1},\ldots,T\}$$

Тогда

$$\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)\leqslant\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma') \tag{2.5}$$

$$|\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)-\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma')|\leqslant\mu M|t_{l+1}-t_l|,\quad \mu=4e^{LT}(m^2+mn) \tag{2.6}$$

где L, M – величины, фигурирующие в (1.2).

Доказательство. Неравенство (2.5) имеет место потому, что наряд E всегда может обеспечить себе в игре $\underline{\Gamma}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)$ величину $\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma')$. Докажем неравенство (2.6). По любому $\varepsilon>0$ существуют такие управления $\mathbf{u}_i^1(t)$, $\mathbf{u}_i^2(t)$, $\boldsymbol{\upsilon}_j^1(t)$, $\boldsymbol{\upsilon}_j^2(t)$, что для $\mathbf{X}_{l+1}^s=\left(\mathbf{x}_i(\Delta t_l,\mathbf{x}_i^l,\mathbf{u}_i^s(t))\right)$, $\mathbf{Y}_{l+1}^s=\left(\mathbf{y}_j(\Delta t_l,\mathbf{y}_j^l,\upsilon_j^s(t)\right)$ (s = 1,2) справедливо неравенство

$$0\leqslant\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l')-\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l)\leqslant$$

$$\leqslant\underline{V}(\mathbf{X}_{l+1}^1,\mathbf{Y}_{l+1}^1,\mathbf{R}_{l+1}^1,\sigma_{l+1})-\underline{V}(\mathbf{X}_{l+1}^2,\mathbf{Y}_{l+1}^2,\mathbf{R}_{l+1}^2,\sigma_{l+1})+\varepsilon$$

Отсюда, используя (2.2), получаем

$$0\leqslant\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l')-\underline{V}(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l)\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\mathbf{R}_{l+1}^1-\mathbf{R}_{l+1}^2\right\|+e^{LT}m\left(\left\|\mathbf{X}_{l+1}^1-\mathbf{X}_{l+1}^2\right\|+\left\|\mathbf{Y}_{l+1}^1-\mathbf{Y}_{l+1}^2\right\|\right)+\varepsilon \tag{2.7}$$

Используя (1.2), получаем

$$\left\|\mathbf{X}_{l+1}^1-\mathbf{X}_{l+1}^2\right\|\leqslant 2Mn\left|t_{l+1}-t_l\right|,\ \left\|\mathbf{Y}_{l+1}^1-\mathbf{Y}_{l+1}^2\right\|\leqslant 2Mm\left|t_{l+1}-t_l\right|$$

$$\left\|\mathbf{R}_{l+1}^1-\mathbf{R}_{l+1}^2\right\|\leqslant \mu M\left|t_{l+1}-t_l\right|/2$$

Отсюда

$$0\leqslant \underline{V}\left(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l'\right)-\underline{V}\left(\mathbf{X}_l,\mathbf{Y}_l,\mathbf{R}_l,\sigma_l\right)\leqslant \mu M\left|t_{l+1}-t_l\right|+\varepsilon$$

Из последнего неравенства непосредственно следует заключение теоремы.

Введем в рассмотрение величину $\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)=\sup\limits_{\sigma\in\Sigma}\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)$ и разбиения $\sigma^{(r)}\in\Sigma$, имеющие вид

$$\sigma^{(r)}=\left\{0,\frac{T}{2^r},\ldots,\frac{2^r-1}{2^r}T,T\right\} \tag{2.8}$$

Теорема 3. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(r)}\right)=\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0\right)$$

Доказательство. По теореме 2 последовательность $\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(r)}\right)$ неубывающая, и следовательно, существует $\lim\limits_{r\to\infty}\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(r)}\right)=V_0$. Предположим, что теорема не верна, тогда $V_0<\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)$. Выберем такое разбиение $\sigma=\{0,t_1,\ldots,t_N,T\}$, чтобы

$$\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)-\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)<(\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)-V_0)|3=\delta|3$$

и число M_0, такое, что для всех $r>M_0$

$$\mu MTN2^{-r}<\delta/3$$

Тогда

$$\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)\leqslant\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma+\sigma^{(r)}\right)$$

$$\left|\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma+\sigma^{(r)}\right)-\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(r)}\right)\right|<\delta|3 \tag{2.9}$$

Действительно, первое неравенство (2.9) следует из теоремы 2, а левая часть второго неравенства не превышает

$$\sum_{s=0}^{N-1}\left|\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(s+1)}\right)-\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(s)}\right)\right|$$

где

$$\sigma^{(0)}=\sigma^{(r)},\ \sigma^{(1)}=\sigma^{(0)}\cup\{t_1\},\ldots,\sigma^{(s+1)}=\sigma^{(s)}\cup\{t_s\},\ \sigma^{(N)}=\sigma+\sigma^{(r)}$$

Используя (2.6), получаем второе неравенство (2.9).

Следовательно,

$$\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(r)}\right)\geqslant\underline{V}(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma)-\delta|3>V_0+\delta|3$$

С другой стороны, $\underline{V}\left(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0,\mathbf{R}_0,\sigma^{(r)}\right)\leqslant V_0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь игру $\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$, отличающуюся от игры $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ лишь состоянием информации и классом допустимых стратегий. Пусть $\sigma_0 \in \Sigma$ (1.3). В игре $\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$ игроки P_i используют КПС в соответствии с определением 1.

Определение 3. Кусочно-программной контрстратегией S_j игрока E_j в игре $\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$ называется семейство отображений $c_j^l (l = 0,1,\dots,r)$, ставящих величинам (1.4) и управлениям $\mathbf{u}_i(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$ измеримую функцию $\mathbf{v} = \mathbf{v}_j(t) \in V_j$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Введем величины

$$\overline{V}(\mathbf{X}_l, \mathbf{Y}_l, \mathbf{R}_l, \sigma_l) = \min_{\mathbf{X}_{l+1}(t) \in A(\mathbf{X}_l, \Delta t_l)} \max_{\mathbf{Y}_{l+1}(t) \in A(\mathbf{Y}_l, \Delta t_l)} \overline{V}(\mathbf{X}_{l+1}(\Delta t_l), \mathbf{Y}_{l+1}(\Delta t_l), \mathbf{R}_{l+1}, \sigma_{l+1})$$

$$(\mathbf{X}_l, \mathbf{Y}_l) \in W_l, \ \Delta t_l = t_{l+1} - t_l, \mathbf{R}_{l+1} = (\rho_1^{l+1}, \dots, \rho_m^{l+1}) \tag{2.10}$$

$$\rho_j^{l+1} = \min\left\{\rho_j^l, \min_{t \in [0, \Delta t_l]} \min_i \left\|\mathbf{x}_i^{l+1}(t) - \mathbf{y}_j^{l+1}(t)\right\|\right\}, \ l = 0,1,\dots,r-1$$

$$\overline{V}(\mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r, \mathbf{R}_r, \sigma_r) = \min_{\mathbf{X}_{r+1}(t) \in A(\mathbf{X}_r, \Delta t_r)} \max_{\mathbf{Y}_{r+1}(t) \in A(\mathbf{Y}_r, \Delta t_r)} \times$$

$$\times \sum_i \min\left\{\rho_j^r, \min_{t \in [0, \Delta t_r]} \min_i \left\|\mathbf{x}_i^{r+1}(t) - \mathbf{y}_j^{r+1}(t)\right\|\right\}$$

Теорема 1'. 1°. Соотношение (2.10) определяет значение игры $\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \sigma_0)$, равное $\overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma_0)$.

2 °. Функции $\overline{V}(\mathbf{X}_l, \mathbf{Y}_l, \mathbf{R}_l, \sigma_l)$ удовлетворяют условию Липшица в $W_l \times R_+^n$ т.е. для любых $(\mathbf{X}_l^1, \mathbf{Y}_l^1, \mathbf{R}_l^1), (\mathbf{X}_l^2, \mathbf{Y}_l^2, \mathbf{R}_l^2) \in W_l \times R_+^n$ справедливо неравенство

$$\left|\overline{V}(\mathbf{X}_l^1, \mathbf{Y}_l^1, \mathbf{R}_l^1, \sigma_l) - \overline{V}(\mathbf{X}_l^2, \mathbf{Y}_l^2, \mathbf{R}_l^2, \sigma_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\mathbf{R}_l^1 - \mathbf{R}_l^2\right\| + e^{L(T-t_l)} m\left(\left\|\mathbf{X}_l^1 - \mathbf{X}_l^2\right\| + \left\|\mathbf{Y}_l^1 - \mathbf{Y}_l^2\right\|\right)$$

где L – постоянная, фигурирующая в неравенствах (1.2).

Теорема 2'. Пусть $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ определяются так же, как в теореме 2. Тогда

$$\overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma) \geqslant \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma')$$

$$\left|\overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma) - \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma')\right| \leqslant \mu M \left|t_{l+1} - t_l\right|$$

Теорема 3'. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r \to \infty} \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma^{(r)}) = \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \inf_{\sigma \in \Sigma} \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma)$$

где $\sigma^{(r)} \in \Sigma$ определены соотношением (2.8).

3. Основная теорема и ее применение.

Лемма. Пусть $\sigma', \sigma'' \in \Sigma$. Тогда

$$\underline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma') \leqslant \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{R}_0, \sigma'')$$

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующей леммы из [1].

Следствие. $\underline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) \leqslant \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$.

Теорема 4. Для любого $\varepsilon > 0$ в игре $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ существует ситуация ε-равновесия в классе КПС. Значение игры $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ равно $\underline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \overline{V}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$.

Теорема доказывается по схеме из [1].

В силу сделанных предположений можно рассматривать игру $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ с любой продолжительностью T. Будем обозначать эти игры через $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T)$, а их значения – через $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T)$.

Теорема 5. Функция $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, t)$ как функция t не возрастает на $[0, +\infty)$ и на любом компакте $[0, T]$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left|V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, t_1) - V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, t_2)\right| \leq L(T)|t_1 - t_2|$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы из [1].

Рассмотрим следующую игру качества $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$. Цель наряда P – "переловить" всех убегающих E_j. Цель наряда E – дать возможность хотя бы одному из убегающих избежать поимки.

Определение 4. Будем говорить, что в игре $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существуют $\varepsilon(T) > 0$ и КПС S_j игроков E_j, заданные на $[0,T]$, такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ игроков P_i справедливо неравенство

$$\sum_j \min_{t \in [0,T]} \min_i \left\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\right\| \geqslant \varepsilon(T) \tag{3.1}$$

Определение 5. Будем говорить, что в игре $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ происходит поимка, если существует $T > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют КПС Q_i игроков P_i, заданные на $[0,T]$, такие, что для любых траекторий $\mathbf{y}_j(t)$ игроков E_j выполняется неравенство, противоположное (3.1).

Теорема 6. Если существует период времени $T > 0$, такой, что $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T) = 0$, то в игре $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ происходит поимка, а если $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T) > 0$ для всех $T > 0$, то в игре $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Пусть $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T) = 0$. Тогда, действуя, как в игре $\Gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T)$ наряд P может обеспечить себе с любой степенью точности величину $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T)$, и следовательно, на промежутке $[0, T]$ произойдет поимка.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Замечание. Из возможности убегания в игре $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ в смысле определения 5 не следует возможность убегания на интервале $[0, +\infty)$.

Пример. Пусть в R^2 рассматривается следующая игра между преследователями $P_i (i = 1,2,3,4)$ и убегающим E. Законы движения имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i, \ \|\mathbf{u}_i\| \leq 1, \ i = 1,2,3, \ \|\mathbf{u}_4\| \leq \beta < 1$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}, \ \|\mathbf{v}\| \leq 1$$

Начальные позиции

$$\mathbf{x}_1^0 = (-1,0), \ \mathbf{x}_2^0 = (1,0), \ \mathbf{x}_3^0 = (0,-1), \ \mathbf{x}_4^0 = (0,3), \ \mathbf{y}^0 = (0,0)$$

Тогда [8][1] в игре $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ возможно уклонение от встречи в смысле определения 5, но игра $\gamma(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ не может закончиться в пользу E на интервале $[0, +\infty)$.

---

[1] См. также *Петров Н.Н.* Некоторые задачи уклонения в дифференциальных играх. Дисс… канд. физ.-мат. наук: 12.06.86. Л.: ЛГУ, 1986. 125 с.

Обозначим $\Gamma_0(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ следующую игру степени. В каждой ситуации (Q_i, S_j), где Q_i и S_j – КПС игроков P_i и E_j, определяется значение функции выигрыша $T(Q_1,\ldots, S_m)$ – первый момент времени, в который завершена поимка всех убегающих E_j. Если поимка в ситуации (Q_i, S_j) не происходит, то полагаем $T(Q_1,\ldots, S_m) = \infty$. Наряд P стремится минимизировать величину $T(Q_1,\ldots, S_m)$, наряд E – максимизировать. Справедлива

Теорема 7. Пусть существует T_0 – первый момент времени, в который $V(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, T_0) = 0$. Тогда значение игры $\Gamma_0(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ существует и равно T_0.

Результаты работы могут быть перенесены и на некоторые другие классы дифференциальных игр нескольких лиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 5. С. 827–839.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
5. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
6. *Томский Г.В., Уланов В.А.* Игры в общих управляемых системах. Иркутск.: Изд-во Иркутск. ун-та, 1987. 205 с.
7. *Габриэлян М.С., Субботин А.И.* Игровые задачи о встречи с m целевыми множествами // ПММ, 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 204–208.
8. *Черноусько Ф.Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей // ПММ, 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.

Ижевск

Поступила в редакцию 21.X.1993