сом: не определенно время начала распада, как и другие его характеристики. Недетерминированность распада вихрей приводит к необратимости в динамике системы точечных вихрей и, возможно, в динамике идеальной жидкости вообще. Такой необычный механизм появления "стрелы времени" не имеет аналогов в динамике частиц.

Вопросы существования и устойчивости стационарных и равномерно вращающихся кластеров точечных вихрей обсуждались ранее [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. *Биркгоф Г.* Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора // Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 68–94.
3. *Бетяев С.К.* Эволюция вихревых пелен // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Чувашск. ун-т, 1980. С. 27–38.
4. *Smith J.H.B.* Improved calculations of leading-edge separation from slender, thin, delta wings. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 306. № 1484. P. 67–90.
5. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
6. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
7. *Петвиашвили В.И.* Неодномерные солитоны // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 5–19.
8. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука. 1991. 235 с.
9. *Aref H.* Motion of three vortices // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 3. P. 339–400.
10. *Aref H., Kadtke J.B., Zawadski I.* Point vortex dynamics: recent rezults and open problems // Fluid Dynamics Research, 1988. V. 3. № 1–4. P. 63–74.

Жуковский

Поступила в редакцию
3.VIII.1993

УДК 532.546

© 1994 г. О.Ю. Динариев

КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЫ. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В рамках фрактальной модели трещиновато-пористой среды (ТПС) [1] найдена асимптотика кривой восстановления давления при больших временах. Все процессы предполагаются изотермическими.

Для описания движения жидкости в ТПС обычно используется модель [2–4], когда трещины и матрица представляются взаимопроникающими континуумами со своими индивидуальными пористостями и проницаемостями, причем трещины и матрица могут обмениваться насыщающей жидкостью. Известно, однако, что в реальных трещиноватых породах для масштабов, сравнимых с размерами пористых блоков, трещины образуют систему, которую нельзя считать сплошной.

В последнее время для описания объектов со сложной нерегулярной геометрией используется теория фракталов – множеств с нецелой пространственной размерностью [5, 6]. Отмечалось, что возникающие при разрушении системы трещины хорошо описываются фрактальной геометрией [7–9]. Была предложена [1] модель ТПС, когда трещины образуют фрактал с размерностью Хаусдорфа–Безиковича d, погружённый в сплошную пористую среду с пространственной размерностью D ($D \geqslant d$, $D = 2$ или $D = 3$; $D = 2$ соответствует плоской задаче, $D = 3$ соответствует пространственной задаче; при $d = D$ уравнения модели [1] переходят в уравнения континуальной модели [2–4]).

В понятие "фрактал" вкладывается содержание, обычно принятое в литературе [5, 6]: нецелая размерность d, локальное самоподобие в среднем, степенная асимптотика для всех характеристик фрактала, усредненных по сфере достаточно большого радиуса.

Пусть $\rho = \rho_1(t, r)$ – плотность жидкости в трещинах, $\rho_2 = \rho_2(t, r)$ – плотность жидкости в матрице, t – время, r – радиальная координата. Имеют место интегральные уравнения сохранения массы для трещин и блоков соответственно:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{r_1\le r\le r_2} m_1\rho_1 d\mu_H^d = \int\limits_{r=r_1} j_n d\mu_S^d - \int\limits_{r=r_2} j_n d\mu_S^d + \int\limits_{r_1\le r\le r_2} q d\mu_H^d \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{r_1\le r\le r_2} m_2\rho_2 d\mu_H^D = -\int\limits_{r_1\le r\le r_2} q d\mu_H^d \qquad (2)$$

Здесь r_1, r_2 – произвольные положительные величины, m_1 – геометрический фактор, характеризующий степень раскрытия трещин, m_2 – пористость блоков, j_n – радиальная составляющая потока массы от блоков к трещинам, $d\mu_H^d$ – мера Хаусдорфа множества с пространственной размерностью d [10], $d\mu_S^d$ – мера на сечении фрактала сферой радиуса r, определяемая по формуле $d\mu_H^d = dr d\mu_S^d$. При этом справедливо соотношение

$$\int\limits_{r=r_1} d\mu_S^d = r_1^{d-1}\int\limits_{r=1} d\mu_S^d = r_1^{d-1}\alpha_d, \quad \alpha_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2) \qquad (3)$$

где α_d – площадь единичной $(d-1)$-мерной сферы.

Обычно можно пренебречь массой жидкости, находящейся в трещинах. Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$0 = \int\limits_{r=r_0} j_n d\mu_S^d - \int\limits_{r=r_1} j_n d\mu_S^d + \int\limits_{r_0\le r_1\le r_2} q d\mu_H^d \qquad (4)$$

Выражения для j_n и q представляется естественным выбрать в виде [1]

$$j_n = -\frac{k}{\mu}\rho_1\frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad q = \frac{\beta}{\mu}(\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1)r^{-\varepsilon} \qquad (5)$$

Здесь $p_1 = p(\rho_1)$, $p_2 = p(\rho_2)$ – давление в трещинах и блоках соответственно, $\mu = \mu(\rho)$ – сдвиговая вязкость, $\varepsilon = (D - d)$ – дефект пространства, k и β – некоторые положительные постоянные. Будем считать скелет породы недеформируемым.Тогда из (2)–(5) вытекают уравнения

$$0 = r^{-(d-1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu^{-1}r^{d-1}\rho_1\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + \frac{\beta}{k\mu}(\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1)r^{-\varepsilon}, \quad \frac{\partial\rho_2}{\partial t} = \frac{\alpha_d\beta}{\alpha_D m_2\mu}(\rho_1 p_1 - \rho_2 p_2)r^{-2\varepsilon} \qquad (6)$$

Таким образом, построенная модель содержит феноменологические параметры с размерностями $[k] = L^{\varepsilon+2}$, $[\beta] = L^{2\varepsilon}$.

Когда $d = D$ (система трещин становится сплошной средой), k превращается в обычную проницаемость, а (6) сводятся к уравнениям Баренблатта – Желтова [2–4].

Задачу будем решать в цилиндрически-симметричной постановке ($D = 2$). Из первого уравнения (5) вытекает, что массовый дебит скважины с радиусом r_0 на единицу продуктивной толщи пласта таков

$$Q = \alpha_d r_0^{d-1}k(\mu^{-1}\rho_1\partial p_1/\partial r)|_{r=r_0} \qquad (7)$$

Положим, что на пространственной бесконечности плотности ρ_1 и ρ_2 выравниваются, а поток j_n стремится к нулю. Задача состоит в определении $\overline{p_1}|_{r=r_0}$ при $t > 0$ для $Q = Q(t) = Q_0\theta(-t)$ по системе уравнений (6) и уравнению состояния $p = p(\rho)$ ($\theta(t)$ – функция Хевисайда, Q_0 – const).

Поскольку речь идет о жидкости, можно использовать линейное приближение. Обозначим $\delta_i = (\rho_i - \rho_0)/\rho_0$, где ρ_0 – некоторая константа с размерностью плотности, и предположим, что $|\delta_i| \ll 1$. Тогда уравнения (6), (7) приводятся к виду

$$0 = \Delta_d\delta_1 + \beta k^{-1}(\delta_2 - \delta_1)r^{-\varepsilon}, \quad \partial\delta_2/\partial t = \gamma(\delta_1 - \delta_2)r^{-2\varepsilon} \tag{8}$$

$$Q = \zeta\partial\delta_2/\partial r|_{r=r_0} \tag{9}$$

$$\left(\gamma = \frac{\alpha_d\beta\rho_0 p_\rho(\rho_0)}{2\pi m_2\mu(\rho_0)}, \quad \zeta = \frac{\alpha_d r_0^{d-1}k\rho_0 p_\rho(\rho_0)}{\mu(\rho_0)}, \quad \Delta_d^{(r)} = r^{-(d-1)}\frac{\partial}{\partial r}r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

При $t < 0$ задача (8), (9) имеет стационарное решение

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_0 = \frac{Q_0 r_0^{d-1}r^{2-d}}{(2-d)\zeta} + C_1$$

Поскольку для нахождения кривой восстановления давления нужно определить $(\delta_1 - \delta_0)$ при $t > 0$, то в силу линейности задачи достаточно решить систему при следующих начальных и граничных условиях:

$$\delta_1|_{t=0} = \delta_2|_{t=0} = 0, \quad (\delta_1 - \delta_2)|_{r=+\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial\delta}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -Q_0\zeta^{-1}\theta(t), \quad \left.\frac{\partial\delta_1}{\partial r}\right|_{r=+\infty} = 0 \tag{10}$$

Выполним в уравнениях (8), (10) преобразование Лапласа (s – параметр преобразования), сделаем замену независимой переменной $r = r_0\eta^{-1/(2\varepsilon)}$ и исключим из уравнений функцию $\delta_2(s)$. Тогда получим уравнение и граничные условия для функции $\delta_1(s)$:

$$(\Delta_{5/2}^{(\eta)} - s\varepsilon_0(s+\gamma_0\eta)^{-1}\eta^{-\nu_2})\delta_1 = 0; \quad d\delta_1(s)/d\eta|_{\eta=1} = \zeta_0 s^{-1}, \quad d\delta/d\eta|_{\eta=+0} = 0$$

$$\varepsilon_0 = \beta/(4\varepsilon^2 k r_0^{\varepsilon}), \quad \nu_z = \varepsilon^{-1} + 3/2, \quad \gamma_0 = \gamma r^{-2\varepsilon}, \quad \zeta_0 = Q_0 r_0/(2\varepsilon\zeta) \tag{11}$$

Так как задача состоит в том, чтобы вычислить асимптотику $\delta_1|_{\eta=1}$ при больших положительных временах, достаточно определить асимптотику $\delta_1(s)$ при малых положительных s. Эта задача будет решена с точностью до множителя вида $(1 + O(s))$.

Заметим, что при $0 < \eta \ll s$ справедливо асимптотическое равенство $\delta_1(s) = f^0$, причем f^0 удовлетворяет уравнению и граничному условию, вытекающим из (11):

$$(\Delta_{5/2}^{(\eta)} - \varepsilon_0\eta^{-\nu_2})f^0 = 0; \quad df^0/d\eta|_{\eta=+0} = 0 \tag{12}$$

При $s \ll \eta \ll 1$ справедливо асимптотическое равенство $\delta_1(s) = f^1$, причем f^1 удовлетворяет уравнению и граничному условию, вытекающим из (11):

$$(\Delta_{5/2}^{(\eta)} - s\varepsilon_0\gamma_0^{-1}\eta^{-(\nu_2+1)})f^1 = 0; \quad df^1/d\eta|_{\eta=1} = \zeta_0 s^{-1} \tag{13}$$

Функции f^0, f^1 нужно связать условиями стыковки:

$$f^0|_{\eta=\eta_*} = f^1|_{\eta=\eta_*}, \quad df^0/d\eta|_{\eta=\eta_*} = df^1/d\eta|_{\eta=\eta_*} \tag{14}$$

где $\eta_* = \lambda s$, λ – некоторая конечная положительная величина.

Введем новые вспомогательные обозначения:

$$\nu_i = \nu_2 - 2 + i, \quad \tau_i = \frac{1}{2\nu_i} \ (i = 0,1), \quad \kappa_0 = \frac{2\varepsilon_0^{1/2}}{\nu_0}, \quad \kappa_1 = \frac{2(\varepsilon_0 s)^{1/2}}{\gamma_0^{1/2}\nu_1}$$

Согласно [10] задача (12) имеет решение, $f^0 = C_1^0\eta^{-1/4}K_{\tau_0}(\kappa_0\eta^{-\nu_0/2})$, а уравнение (13) имеет решение $f^1 = \eta^{-1/4}(C_1^1 K_{\tau_1}(\kappa_1\eta^{-\nu_1/2}) + C_2^1 I_{\tau_1}(\kappa_1\eta^{-\nu_1/2}))$.

Здесь $K_\alpha(z)$, $I_\alpha(z)$ – функции Макдональда [10]. Постоянные C_1^0, C_1^1, C_2^1 должны быть ...делены из граничного условия в задаче (13) и равенств (14). Из равенств (14) получаем линейную систему, решая которую находим: $\overset{1}{C}_i = \overset{0}{C}_1 n_i$ $(i = 1, 2)$, где

$$n_1 = \nu_1^{-1}\eta_*^{-\nu_1/2}(\kappa_1\nu_1 I'_{\tau_1}(\kappa_1\eta_*^{-\nu_1/2})K_{\tau_0}(\kappa_0\eta_*^{-\nu_0/2}) - \kappa_0\nu_0\eta_*^{1/2} I_{\tau_1}(\kappa_1\eta_*^{-\nu_1/2})K'_{\tau_0}(\kappa_0\eta_*^{-\nu_0/2}))$$

а выражение для n_2 получается из предыдущего подстановкой вместо I_{τ_1}, I'_{τ_1} функций K_{τ_1}, K'_{τ_1}.

При $s \to 0$ имеем оценку, вытекающую из асимптотических свойств функций Макдональда [10]:

$$n_2 / n_1 = O(\exp(-2\kappa_1\eta_*^{-\nu_1/2})) \tag{15}$$

Вычислив $d\overset{1}{f}/d\eta|_{\eta=1}$ и используя граничные условия в задаче (13), определяем $\overset{0}{C}_1$. Затем, используя разложение в ряд функций Макдональда [10] и оценку (15), находим главную асимптотику $\overset{1}{f}$ при $s = 0$ и выполняем обратное преобразование Лапласа. Окончательно получаем, что кривая восстановления давления в ТПС с фрактальной геометрией трещин описывается асимптотической формулой

$$\Delta p = \rho_0 p_\rho(\rho_0)\frac{\zeta_0 K(-\tau_1)}{\nu_1\tau_1}\left\{\frac{t^{\tau_1}}{\Gamma(1+\tau_1)} - K(\tau_1) + K(1-\tau_1)\frac{t^{2\tau_1-1}}{\Gamma(2\tau_1)}\right\}$$

$$K(x) = \nu_1^{-2x}\varepsilon_0^x\gamma_0^{-x}\Gamma(1-x)/\Gamma(1+x)$$

Характерно, что в отличие от обычной пористой среды, где имеет место логарифмическая асимптотика [4], для фрактальной ТПС среды справедлива степенная асимптотика $\Delta p = \mathrm{const}\, t^{\tau_1}$. Можно выразить показатель степени через размерность фрактала: $\tau_1 = (2 - d)/(4 - d)$. Видно, что при $1 < d < 2$ показатель степени τ_1 лежит в интервале (0,1/3). Определяя этот показатель из эксперимента, можно найти фрактальную размерность системы трещин. Если осуществить предельный переход $d \to 2$ (что эквивалентно $\tau_1 \to 0$), то из формулы (16) можно получить классическую логарифмическую формулу для кривой восстановления давления, хотя изложенный вывод формулы (16) несправедлив при $d = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Динариев О.Ю.* Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 5. С. 66–70.
2. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П.* Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. // Доклады АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545–548.
3. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.
4. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
5. *Mandelbrot B.B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. N.Y.: Freeman, 1977. 365 p.
6. *Mandelbrot B.B.* The fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982. 460 p.
7. *Мосолов А.Б., Динариев О.Ю.* Автомодельность и фрактальная геометрия разрушения. // Проблемы прочности. 1988. № 1. С. 3–7.
8. *Луис Э., Гинеа Ф., Флорес Ф.* Фрактальная природа трещин // Фракталы в физике: Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике (МПТФ. Триест. Италия, 1985) М.: Мир, 1988. С. 244–248.
9. *Guinea F., Pla O., Louis E.* Franctal Aspects of Fracture Propagation // Fragmentation, form and Flow in Franctured media: Proc. F^3 – Conf. held at Neve Ilan, Israel, 1986. Ann. Israel Phys. Soc. 1986. V. 8. P. 451–457.
10. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М: Наука, 1974. 295 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1992