

УДК 532.5

© 1994 г. С.К. Бетяев, А.М. Гайфуллин, С.В. Гордеев

ТОЧЕЧНО-КРУГОВОЙ ВИХРЬ

Исследуется новая вихревая структура – точечно-круговой вихрь (ТКВ), который может сохранять свою симметрию в процессе временной эволюции. Обсуждается чехарда ТКВ, его стохастизация и коллапс.

Эволюция системы N точечных вихрей подчиняется уравнениям [1]

$$\frac{d\bar{z}_j(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq j}^N \frac{\gamma_k}{z_j - z_k} \quad (j=1, \dots, N) \quad (1)$$

допускающим инварианты Кирхгофа

$$I_1 = \sum_j^N \gamma_j z_j, \quad I_2 = \sum_j^N \gamma_j |z_j|^2, \quad I_3 = \sum_k^N \sum_{j \neq k}^N \gamma_k \gamma_j \ln |z_k - z_j| \quad (2)$$

где z_j – комплексная координата вихря, γ_j – циркуляция вихря, черта сверху означает сопряжение. Суммирование здесь и далее начинается с члена, соответствующего единичному индексу.

Рассмотрим ТКВ – систему точечных вихрей, находящихся на n концентрических окружностях таким образом, что циркуляция Γ_α ($\alpha = 1, \dots, n$) всех вихрей, расположенных на α -й окружности через равные угловые промежутки $2\pi/n$, одинакова, как и число вихрей $N \geq 2$, расположенных на каждой из окружностей (фиг. 1, вихри выделены кружками). В случае $N = 1$ система n точечных вихрей не является ТКВ.

По поводу устойчивости симметричных кластеров следует высказать одно общее замечание, касающееся способов исследования этого явления. Можно изучать нарушения симметрии системы в целом, а можно, зафиксировав симметрию как точное решение задачи, изучать неустойчивость полученного образования. Такое разделение задачи на две открывает чуть ли не единственный путь к пониманию механизма неустойчивости симметричных вихревых структур.

В случае ТКВ можно следить за поведением всех nN вихрей сразу. Тогда образованное "облако" вихрей продемонстрирует неустойчивость симметрии, аналогичную свойственной контактному разрыву неустойчивости Гельмгольца [2]: ТКВ сразу же разрушится [3]. В другом случае, выбрав на каждой окружности по одному вихрю и зафиксировав симметричное расположение остальных, можно следить за неустойчивостью n вихрей. Механизму такой неустойчивости, принципиально отличной от неустойчивости Гельмгольца, посвящена настоящая статья.

Итак, ТКВ будет вращаться вокруг центра $r = 0$, сохраняя свою симметрию, т.е. равное угловое расстояние между находящимися на любой выбранной окружности вихрями. Эволюция ТКВ определяется следующими параметрами: $N, n, \Gamma_\alpha, r_\alpha(0), \theta_\alpha(0)$, где $r_\alpha(0)$ и $\theta_\alpha(0)$ – значения полярных координат произвольным образом выделенных на α -й окружности вихрей в начальный момент времени $t = 0$. Из перечисленных $3n + 2$ параметров $\theta_1(0)$ несуществен, поэтому число определяющих параметров равно $3n + 1$. Значение $r_1(t)$ может быть равно нулю.

При надлежащем выборе Γ_α предельный переход $N \rightarrow \infty$ тождествен системе концентрических вихревых пелен. В отличие от контактного разрыва на вихревой пелене число

Бернулли постоянно. Поэтому в рассматриваемом предельном случае стационарных вихревых пелен скорость на них будет изменяться по направлению, а не по модулю. Из этого условия заключаем, что предельный переход к вихревым пеленам корректен, если циркуляцию вихрей выбирать из рекуррентных соотношений

$$\Gamma_\alpha = -2 \sum_k^{\alpha-1} \Gamma_k, \quad \Gamma_1 \neq 0, \quad \eta_1 = 0$$

По определению ТКВ координата j -го вихря, находящегося на α -й окружности задается соотношением

$$z_\alpha^j = r_\alpha \exp[i(\theta_\alpha + 2\pi j / N)]$$

Разбив суммы в (1) на две части, из которых одна – по вихрям, расположенным на одной окружности, другая – по вихрям, расположенным на остальных окружностях, получим

$$\frac{d\bar{z}_\alpha^j(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i N} \left(\Gamma_\alpha \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{z_\alpha^j - z_\alpha^k} + \sum_{\beta \neq \alpha}^n \Gamma_\beta \sum_k^N \frac{1}{z_\alpha^j - z_\beta^k} \right) \quad (3)$$

Для определенности будем следить за вихрем с номером N . Ряды по k в (3) легко суммируются:

$$\sum_k^{N-1} \frac{1}{1 - \exp(ik\varphi)} = \frac{N-1}{2}$$

$$\sum_k^N \frac{1}{1 - x_{\alpha\beta} \exp[i(k\varphi + \theta_{\alpha\beta})]} = \frac{1}{1 - x_{\alpha\beta}^N \exp(iN\theta_{\alpha\beta})}$$

$$\varphi = 2\pi / N, \quad x_{\alpha\beta} = r_\beta / r_\alpha, \quad \theta_{\alpha\beta} = \theta_\beta - \theta_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n$$

Система (3) после преобразований представится в виде

$$\frac{dr_\alpha^2}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_\beta \frac{\sin N\theta_{\alpha\beta}}{\Delta_{\alpha\beta}}$$

$$\frac{d\theta_\alpha}{dt} = \frac{1}{4\pi r_\alpha^2} \left(\frac{N-1}{N} \Gamma_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_\beta \frac{x_{\alpha\beta}^{-N} - \cos N\theta_{\alpha\beta}}{\Delta_{\alpha\beta}} \right) \quad (4)$$

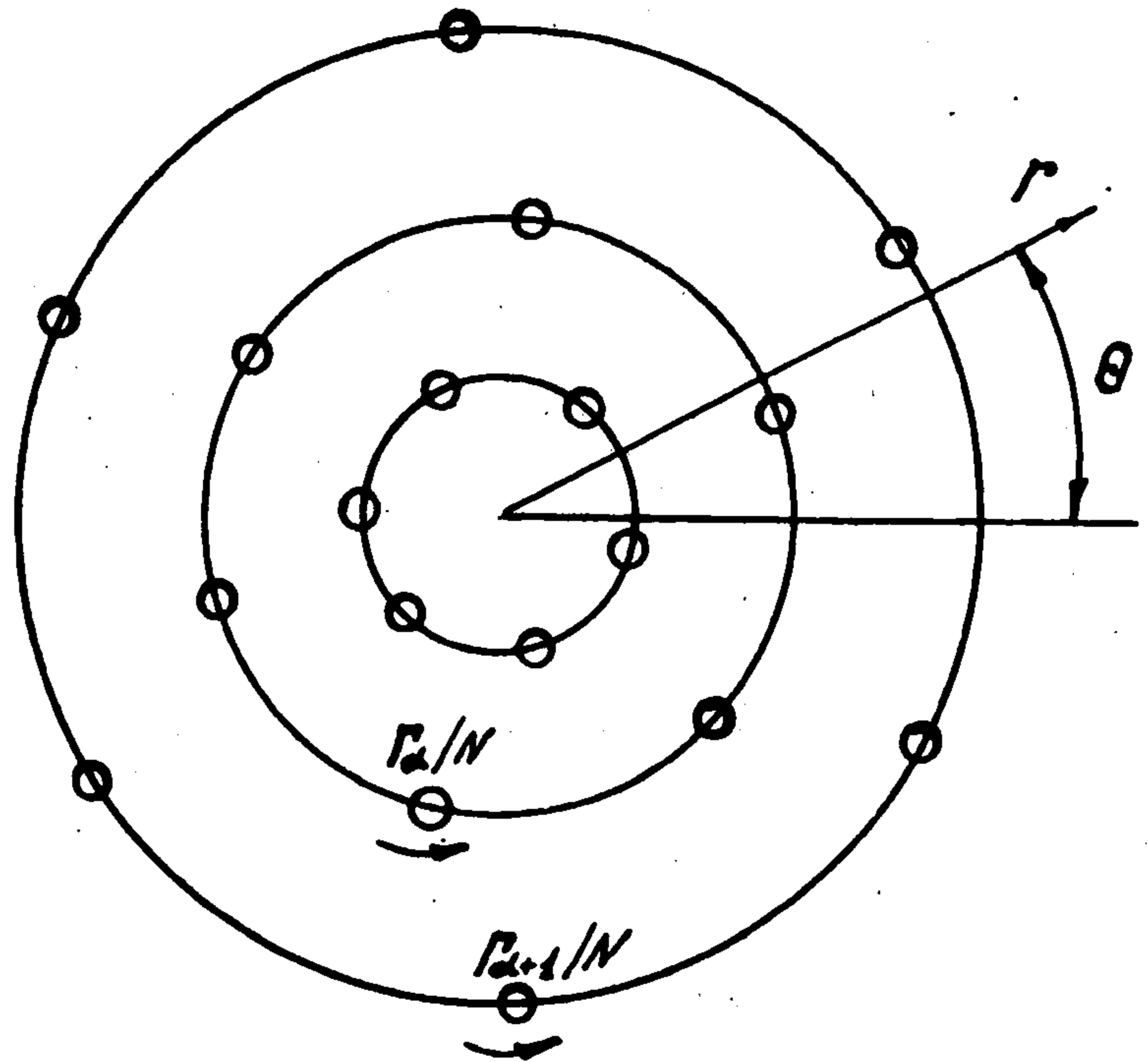
$$\Delta_{\alpha\beta} = (x_{\alpha\beta}^N + x_{\alpha\beta}^{-N}) / 2 - \cos N\theta_{\alpha\beta}$$

Первый инвариант I_1 , выражающий закон сохранения "центра тяжести" системы, для ТКВ равен нулю. Второй и третий инварианты, выражающие законы сохранения дисперсии и энергии [1], имеют вид

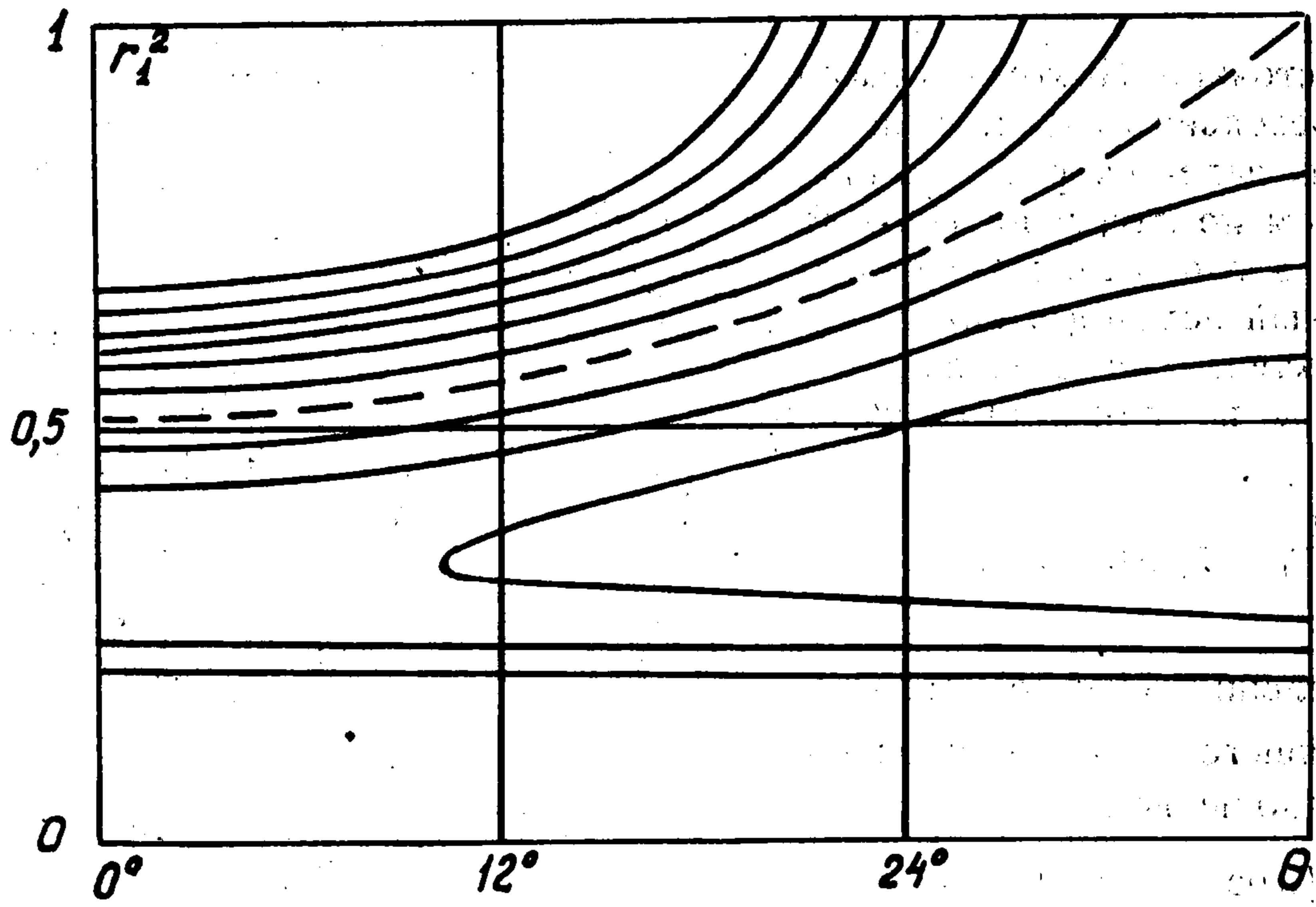
$$I_2 = \sum_\alpha^n \Gamma_\alpha r_\alpha^2$$

$$I_3 = \sum_\alpha^n \xi_{\alpha\alpha} \left(\frac{N-1}{2} \ln \eta_\alpha + \ln N \right) + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_\alpha^n \xi_{\alpha\beta} (N \ln \eta_\alpha + \ln \Delta_{\alpha\beta}) \quad (5)$$

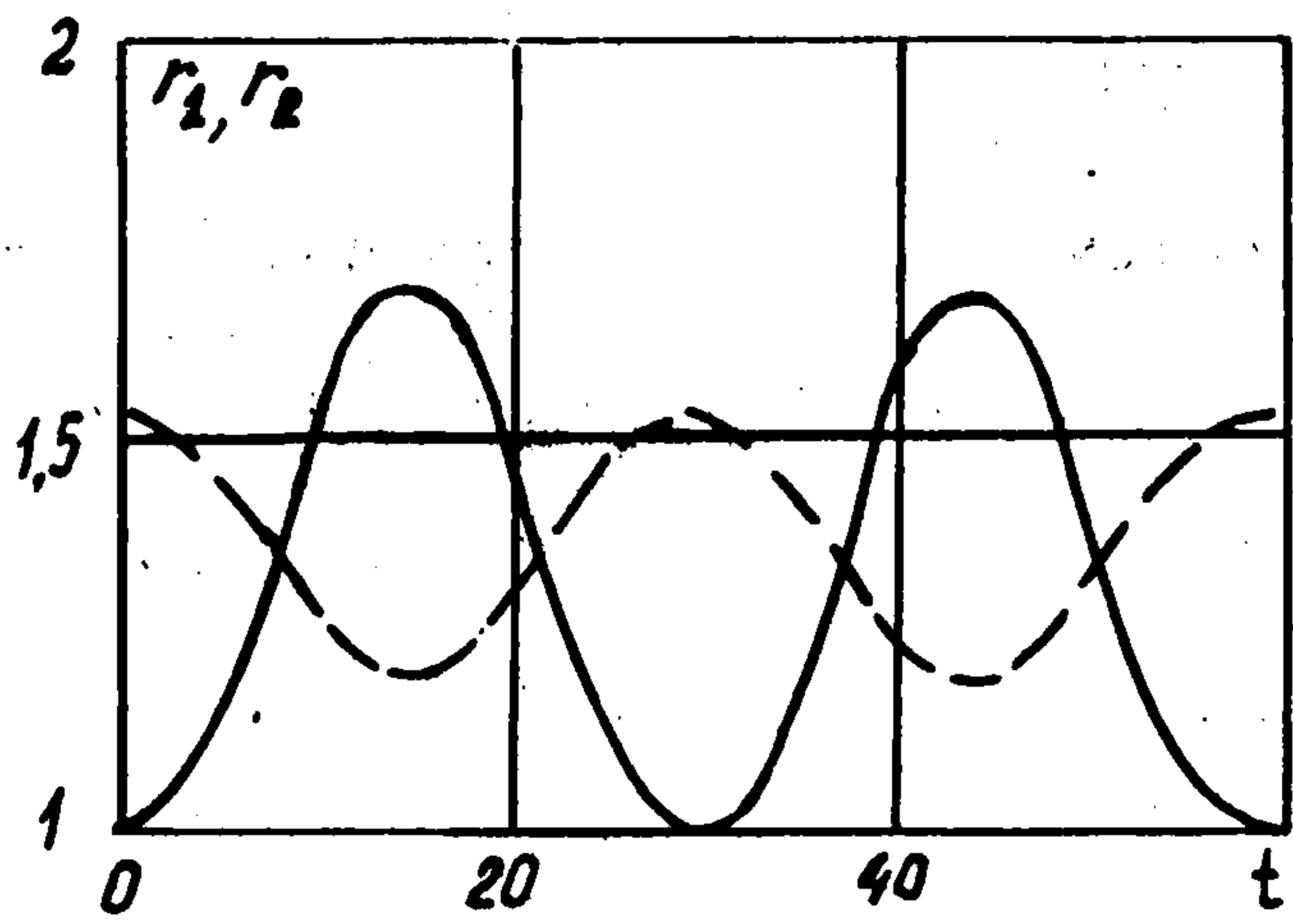
$$\xi_{\alpha\beta} = \Gamma_\alpha \Gamma_\beta / N, \quad \eta_\alpha = \frac{I_2}{\Gamma_\alpha + \sum_{\delta \neq \alpha} \Gamma_\delta x_{\alpha\delta}^2}$$



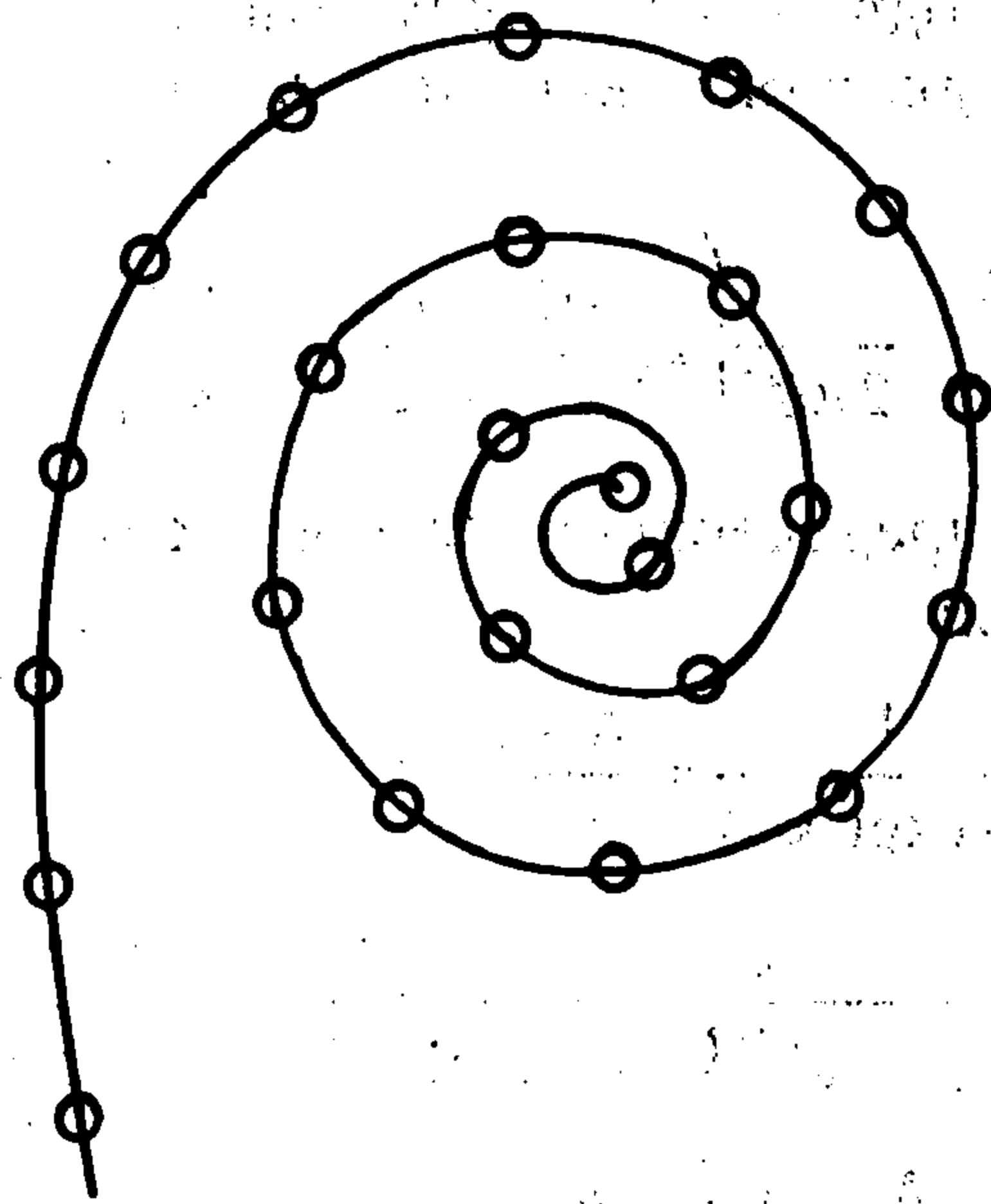
Фиг. 1



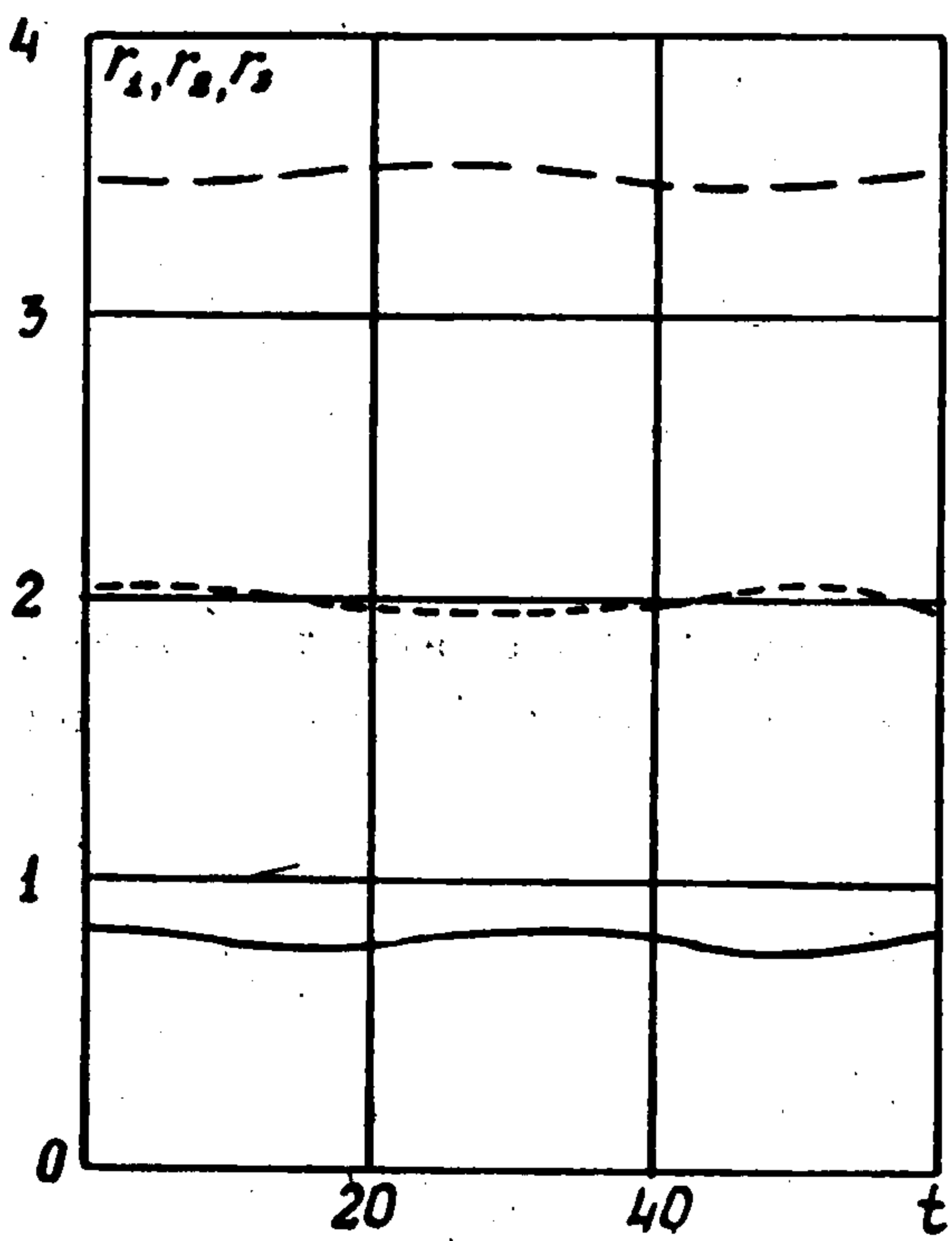
Фиг. 2



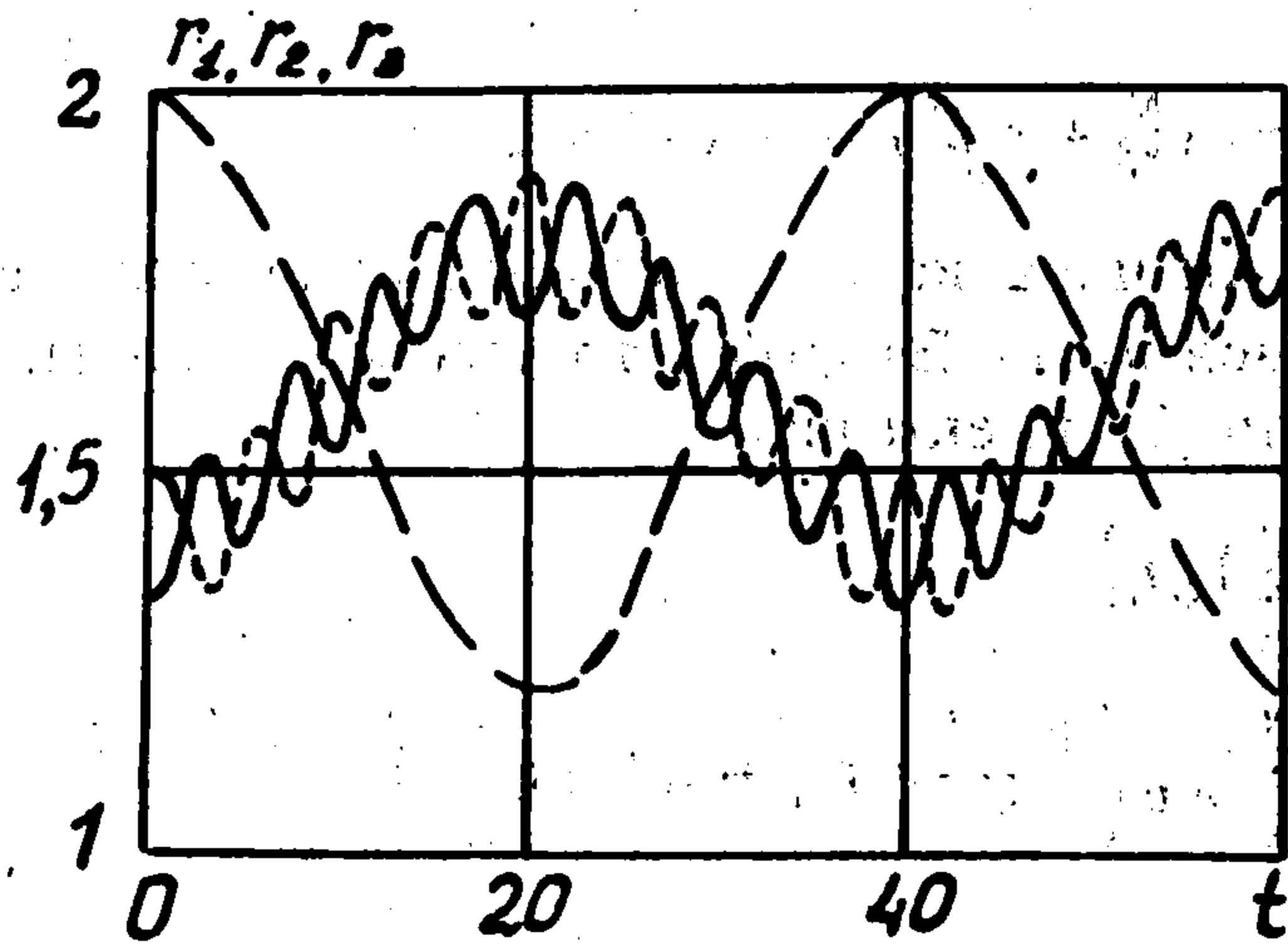
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотрим частные случаи.

Одинарный ТКВ ($n = 1$). Решение получается в замкнутой форме

$$r = \text{const}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{N-1}{4\pi r^2 N} \Gamma$$

Двойной ТКВ ($n = 2$). При помощи второго и третьего инвариантов (5) можно понизить порядок системы (4). Эволюция ТКВ описывается одним дифференциальным и одним алгебраическим уравнением относительно переменных $x = x_{12}$, $\theta = \theta_{12}$:

$$\frac{dx^2}{dt} = -\frac{I_2 \sin N\theta}{2\pi\eta_1^2 \Delta_{12}}$$

$$I_3 = \xi_{12} \ln \Delta_{12} + \frac{1}{2}[(N-1)\xi_{11} + N\xi_{12}] \ln \eta_1 + \\ + \frac{1}{2}[(N-1)\xi_{22} + N\xi_{12}] \ln \eta_1 x^2 + (\xi_{11} + \xi_{22}) \ln N \quad (6)$$

Наглядно и просто исследовать эволюции системы (6) можно при помощи фазовых траекторий $I_3(r_1^2, \theta) = \text{const}$. На фиг. 2 показана типичная топология фазовых траекторий ($N = 5$, $I_2 = 2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$). Выбран прямоугольник $0 \leq r_1^2 \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/N$, так как семейство траекторий в интервале $1 \leq r_1^2 \leq 2$ симметрично относительно линии $r_1^2 = 1$ семейству траекторий в интервале $0 \leq r_1^2 \leq 1$, а траектории в прямоугольнике $0 \leq r_1^2 \leq 1$, $\pi/N \leq \theta \leq 2\pi/N$ симметричны относительно линии $\theta = \pi/N$ траекториям, представленным на фиг. 2. Кроме того, фазовые траектории в секторе $0 \leq \theta \leq 2\pi/N$ периодически повторяются в секторах $2\pi k/N \leq \theta \leq 2\pi(k+1)/N$, $k = 1, \dots, N-1$.

Фазовая плоскость делится на две области с принципиально различными режимами. Граница между этими областями отмечена штриховой линией. В области 1, которая на фиг. 2 лежит ниже штриховой линии, наблюдается слабое взаимодействие, при котором вихревые окружности, вращаясь с различными скоростями, не проходят друг через друга. В области 2, лежащей выше штриховой линии, наблюдается сильное взаимодействие ("чехарда"), при котором вихревые окружности периодически проходят друг через друга. Уравнение для штриховой линии определяется из соотношения

$$I_3(x, \theta) = I_3(I_2/2, \pi/N) \quad (7)$$

В приведенном на фиг. 2 случае ($I_2 = 2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$) минимальное значение $x = x_{\min}$ достигается при $\theta = 0$; из соотношения (7) следует

$$2^{2N-3} x_{\min}^{N-1} (x_{\min}^N - 1)^2 = (1 + x_{\min}^2)^{2N-1}$$

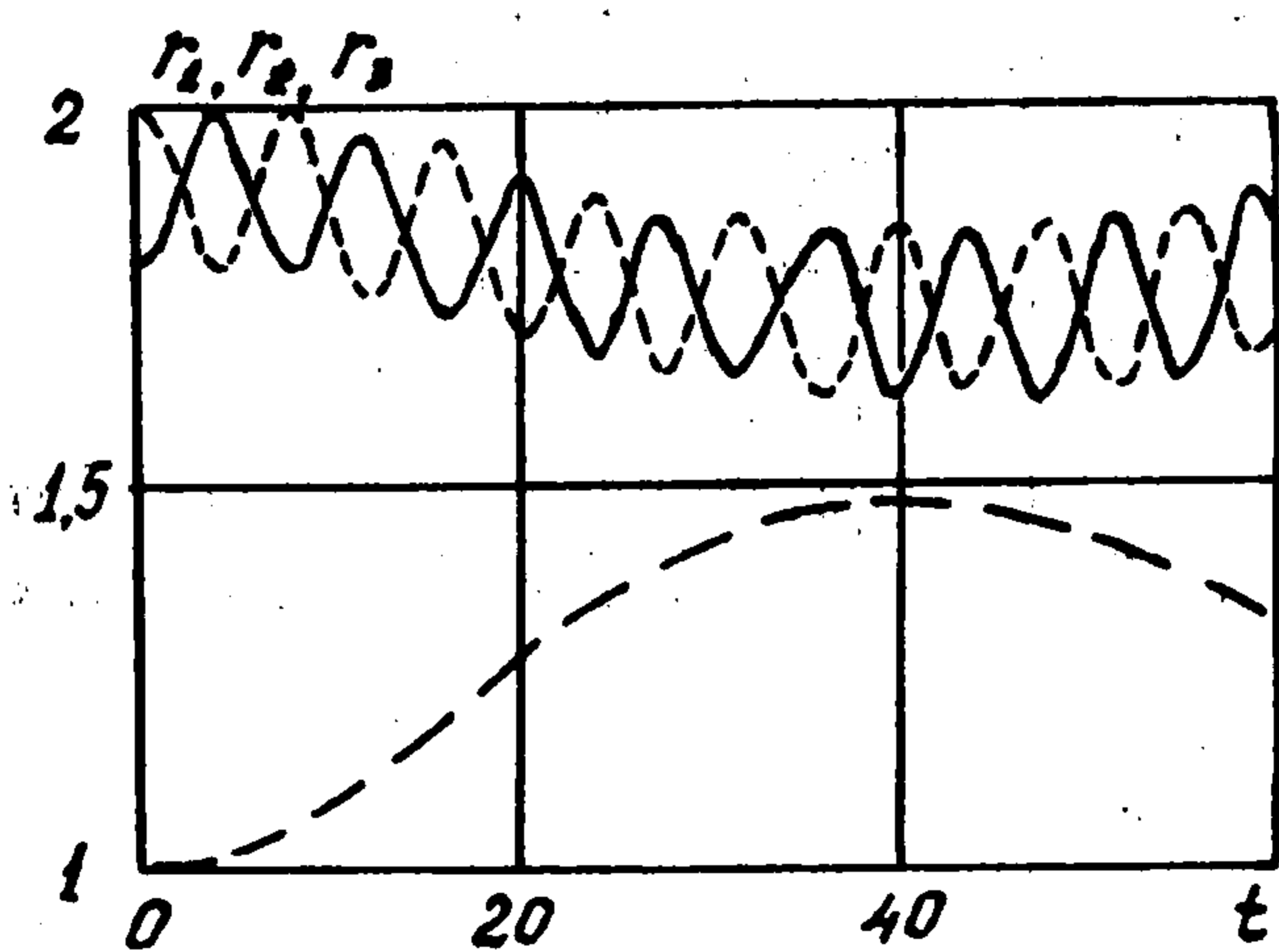
При $N \rightarrow \infty$ имеем $x_{\min} = 1 - a/N$, где $a = \ln(3 + \sqrt{8})$.

На фиг. 3 представлен пример временной зависимости радиусов окружностей $r_1(t)$, $r_2(t)$ для случая сильного взаимодействия при $N = 5$, $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 2$.

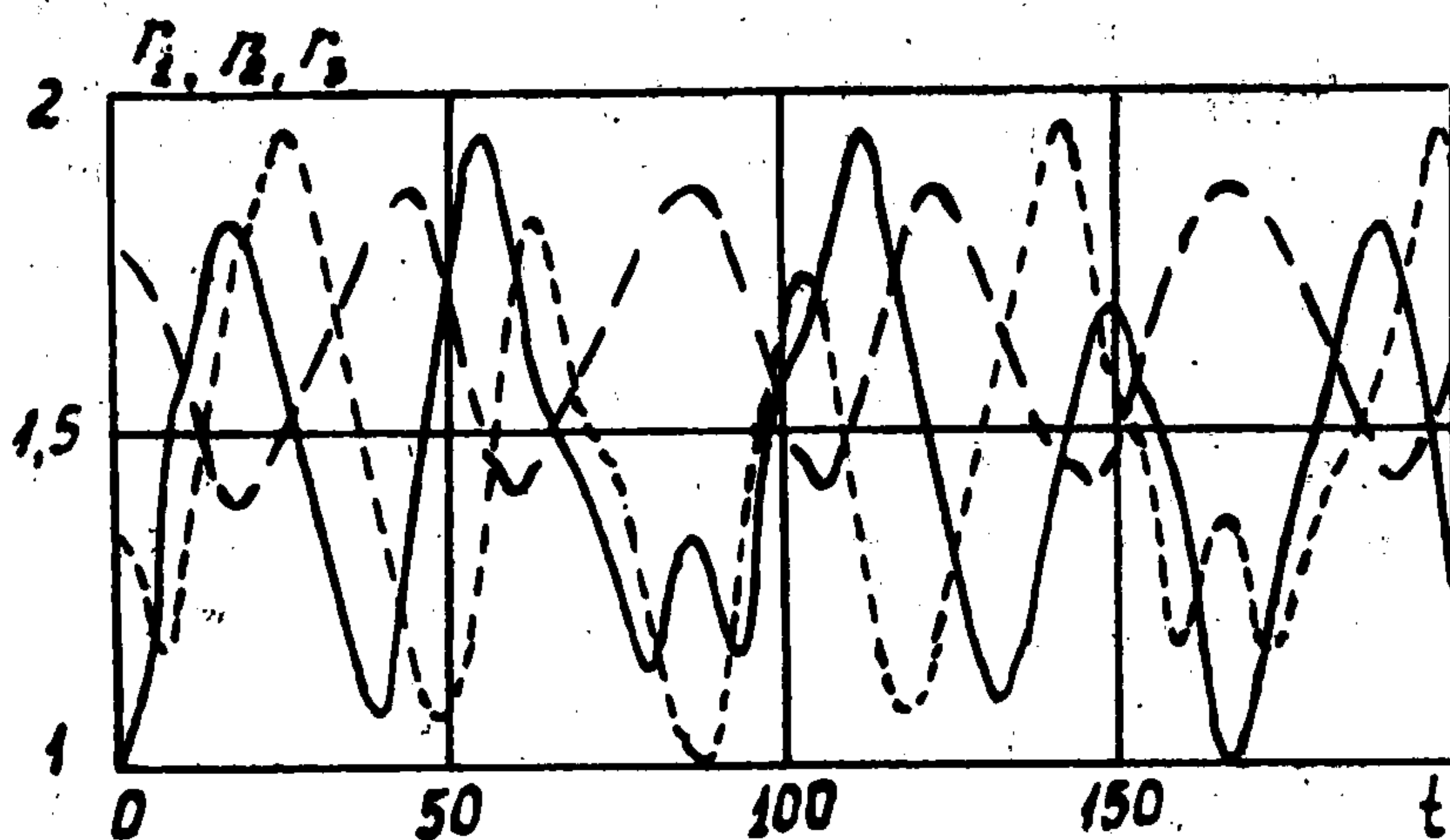
Точечные вихри – это необходимая для численного расчета математическая идеализация реального вихревого поля: объемного вихря или линии тангенциального разрыва скорости. Такая дискретизация наделяет систему новыми, не присущими ей свойствами, одним из которых является сильное взаимодействие. Поэтому при численном расчете эволюции спиральной вихревой пелены (фиг. 4) методом дискретных вихрей [4] следует избегать слишком грубого шага разбиения, чтобы не попасть в область сильного взаимодействия, т.е. нефизического решения. Используя результаты вышеизложенной модельной задачи, можно дать рекомендации по выбору этого шага в зависимости от расстояния между витками спирали.

Тройной ТКВ ($n = 3$). При помощи инвариантов I_2 и I_3 можно понизить порядок системы (4) до четвертого, однако и после этого она остается сложной. Поэтому исследовать эволюцию вихревого ансамбля приходилось численно, используя алгоритм Рунге–Кутты четвертого порядка.

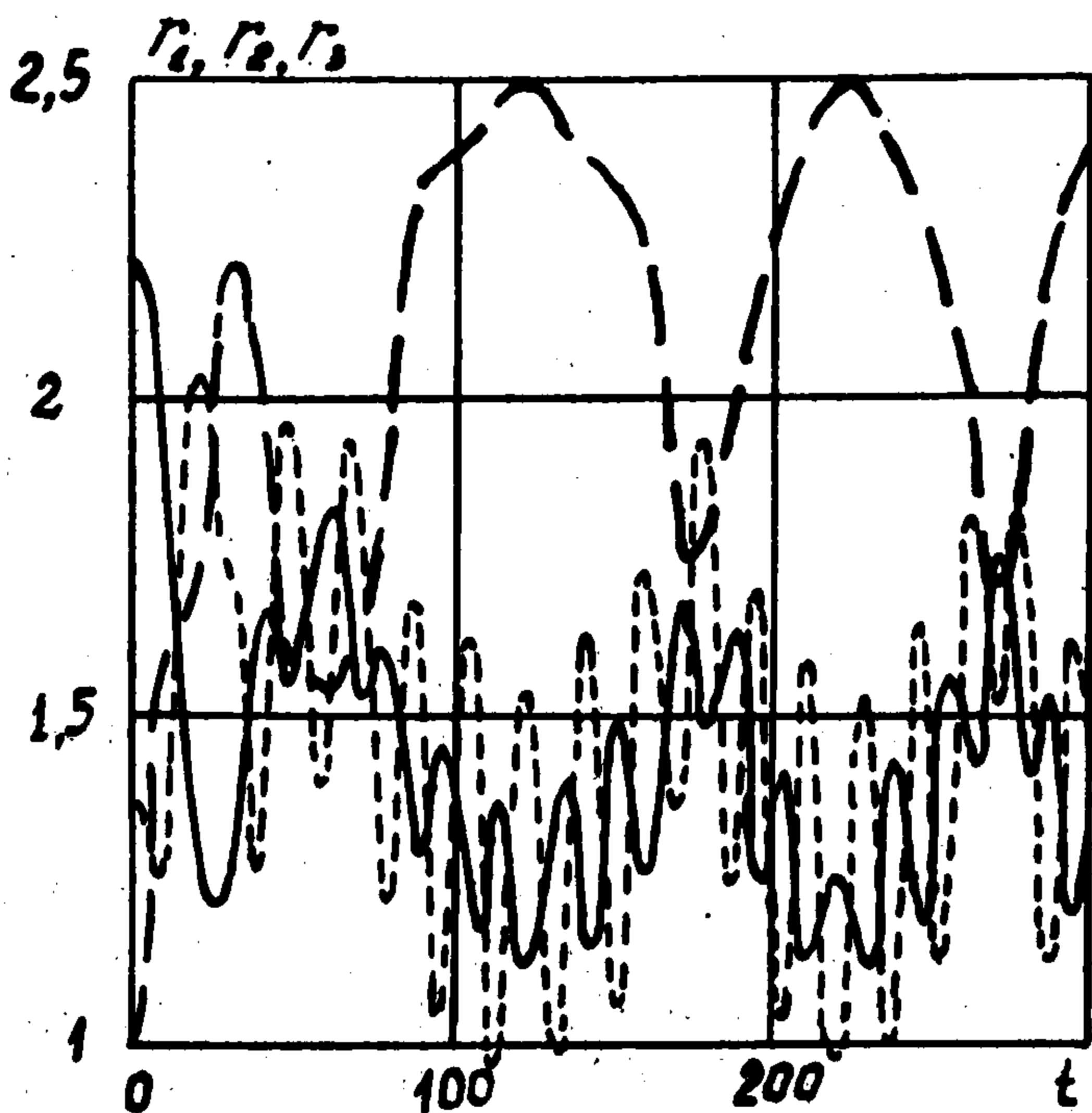
Анализ движения системы, естественно, выявил гораздо больше сценариев взаимодействия, чем для двойного ТКВ. Перечислим их.



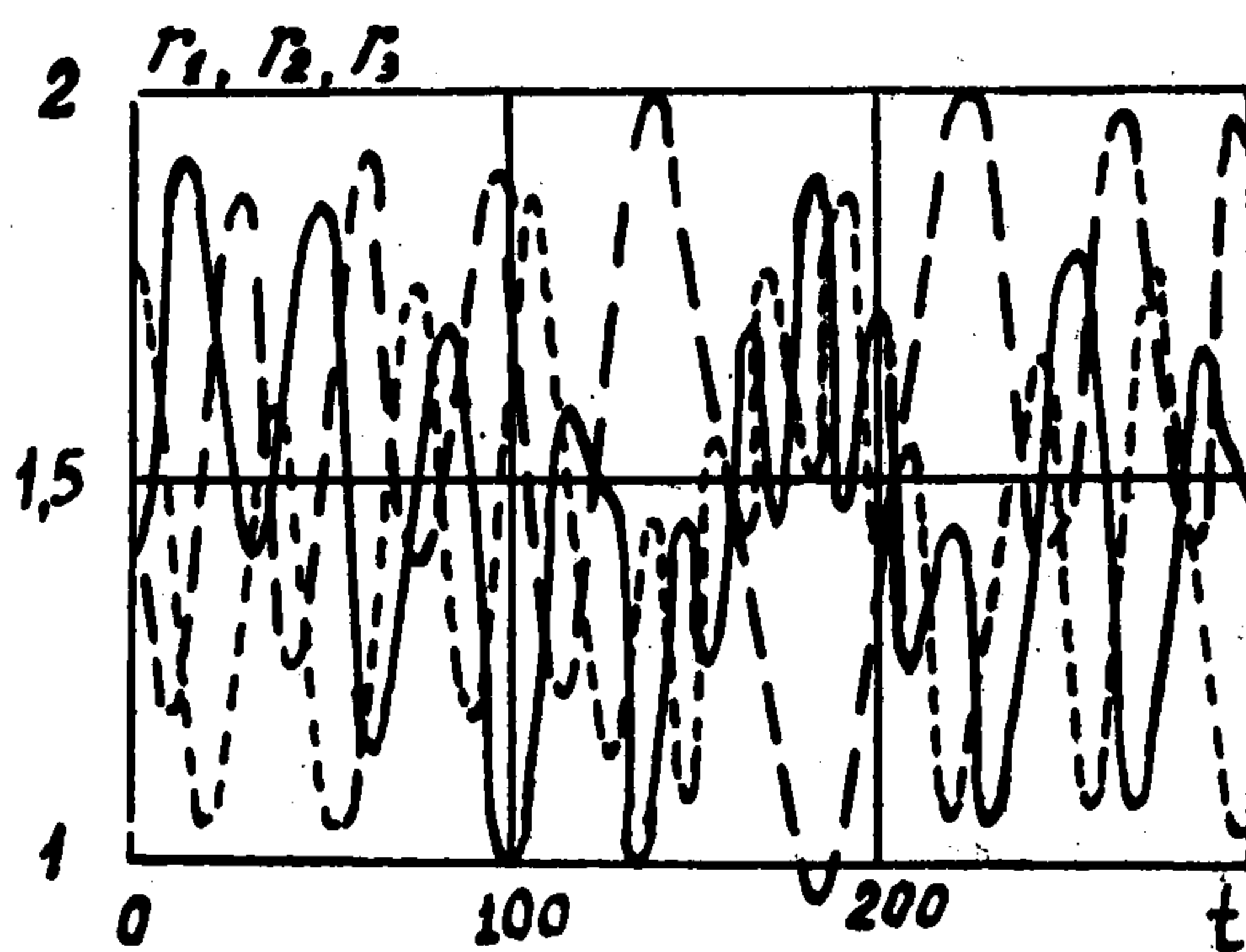
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

1°. *Слабое взаимодействие.* Оно аналогично случаю двойного ТКВ (фиг. 5).

2°. *Парное сильное взаимодействие.* В этом случае вихри с двух окружностей вступают в сильное взаимодействие друг с другом, меняясь местами. Третья вихревая окружность может как вступать в сильное взаимодействие с двумя "сцепленными" окружностями (фиг. 6), так и не вступать (фиг. 7).

3°. *Тройное сильное взаимодействие* (фиг. 8).

4°. *Хаотическое взаимодействие.* Согласно статистической механике [5, 6] в системе, описываемой тремя и более нелинейными дифференциальными уравнениями, может возникнуть хаос [7]. Один из возможных сценариев возникновения хаоса – появление ϵ -слоя на сепаратрисах в фазовом пространстве [8]. Численное исследование системы (4) выявило многообразие хаотических режимов. На фиг. 9 показан случай, когда система сначала вела себя случайным образом, а через некоторое время попала в область сильного периодического взаимодействия, причем такой сценарий ("реламинизация") встречается часто. Также обнаружен режим перемежаемости, при котором система из хаотического режима перешла на парное взаимодействие, а потом вернулась к хаосу (фиг. 10). Следует отметить сильную чувствительность системы к начальным условиям.

Известно, что система надлежащим образом расположенных трех и более вихрей подвержена автомодельному коллапсу [9]. Коллапс ТКВ в результате численного счета обнаружить не удалось. По-видимому, такое схлопывание неустойчиво, при сближении трех вихрей вклад остальных следует рассматривать как неавтомодельное возмущение автомодельному процессу схлопывания.

В отличие от процесса схлопывания, полностью определенного, если задано согласованное с ним начальное взаимодействие вихрей, распад одного точечного вихря при отсутствии внешних воздействий не является естественным, причинно обусловленным процес-

сом: не определено время начала распада, как и другие его характеристики. Недетерминированность распада вихрей приводит к необратимости в динамике системы точечных вихрей и, возможно, в динамике идеальной жидкости вообще. Такой необычный механизм появления "стрелы времени" не имеет аналогов в динамике частиц.

Вопросы существования и устойчивости стационарных и равномерно вращающихся кластеров точечных вихрей обсуждались ранее [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора // Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 68–94.
3. Бетяев С.К. Эволюция вихревых пелен // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Чувашск. ун-т, 1980. С. 27–38.
4. Smith J.H.V. Improved calculations of leading-edge separation from slender, thin, delta wings. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 306. № 1484. P. 67–90.
5. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
7. Петвиашвили В.И. Неоднородные солитоны // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 5–19.
8. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука. 1991. 235 с.
9. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 3. P. 339–400.
10. Aref H., Kadtko J.B., Zawadski I. Point vortex dynamics: recent results and open problems // Fluid Dynamics Research, 1988. V. 3. № 1–4. P. 63–74.

Жуковский

Поступила в редакцию
3.VIII.1993

УДК 532.546

© 1994 г. О.Ю. Динариев

КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЫ. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В рамках фрактальной модели трещиновато-пористой среды (ТПС) [1] найдена асимптотика кривой восстановления давления при больших временах. Все процессы предполагаются изотермическими.

Для описания движения жидкости в ТПС обычно используется модель [2–4], когда трещины и матрица представляются взаимопроникающими континуумами со своими индивидуальными пористостями и проницаемостями, причем трещины и матрица могут обмениваться насыщающей жидкостью. Известно, однако, что в реальных трещиноватых породах для масштабов, сравнимых с размерами пористых блоков, трещины образуют систему, которую нельзя считать сплошной.

В последнее время для описания объектов со сложной нерегулярной геометрией используется теория фракталов – множеств с нецелой пространственной размерностью [5, 6]. Отмечалось, что возникающие при разрушении системы трещины хорошо описываются фрактальной геометрией [7–9]. Была предложена [1] модель ТПС, когда трещины образуют фрактал с размерностью Хаусдорфа–Безиковича d , погруженный в сплошную пористую среду с пространственной размерностью D ($D \geq d$, $D = 2$ или $D = 3$; $D = 2$ соответствует