

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. М.Л. Фильштинский

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Исследуется поведение коэффициентов интенсивности напряжений в пьезоэлектрической среде, ослабленной туннельными трещинами достаточно произвольной конфигурации. Считается, что в недеформированном состоянии трещина ассоциируется с математическим разрезом. В качестве нагрузки рассматриваются нормальные или касательные усилия импульсного типа, действующие на берегах трещин. Соответствующая двумерная граничная задача электроупругости в трансформантах Фурье сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно скачков перемещений на разрезах. Представлены результаты расчетов.

Задачи об импульсном возбуждении изотропной среды с прямолинейной конечной или полубесконечной трещиной изучались, например, в [1–3].

1. Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  неограниченную пьезоэлектрическую среду, ослабленную туннельными вдоль оси  $x_3$  трещинами-разрезами  $L_j (j = 1, 2, \dots, n)$ . Условимся считать, что пьезоэлектрик представляет собой трансверсально-изотропный материал с осью симметрии, параллельной оси  $x_3$  (кристалл гексагональной системы  $6mm$ , предварительно поляризованная пьезокерамика [4]). Допустим, что на берегах трещин  $L_j$  действуют произвольно изменяющиеся во времени, не зависящие от координаты  $x_3$  механические усилия  $X_m (x_1, x_2, t) (m = 1, 2)$ . Будем полагать, что кривизны контуров  $L_j$  и  $X_m (x_1, x_2, t)$  принадлежат классу функций Гельдера [5] на  $L = \cup L_j$  и, кроме того,  $\cap L_j = \emptyset$ . Задача заключается в определении параметров разрушения среды с трещинами в условиях нестационарного динамического нагружения.

В указанной постановке в пьезоэлектрической среде с дефектами реализуется состояние плоской деформации в  $x_1, x_2$ . Полная система уравнений имеет вид [6]:

уравнения состояния пьезосреды

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\epsilon_{11} + c_{12}\epsilon_{22} - h_{31}D_3, & \sigma_{22} &= c_{12}\epsilon_{11} + c_{11}\epsilon_{22} - h_{31}D_3 \\ \sigma_{12} &= (c_{11} - c_{12})\epsilon_{12}, & \sigma_{33} &= c_{13}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - h_{33}D_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$E_3 = -h_{31}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \beta_{33}D_3$$

уравнения движения

$$\partial_k \sigma_{ik} = \rho_0 \partial^2 u_i / \partial t^2, \quad \partial_k = \partial / \partial x_k (i, k = 1, 2) \quad (1.2)$$

уравнения Максвелла

$$\partial_1 E_3 = \mu \partial H_2 / \partial t, \quad \partial_2 E_3 = -\mu \partial H_1 / \partial t \quad (1.3)$$

$$\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = \partial D_3 / \partial t, \quad \partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 = 0$$

Здесь  $\sigma_{ik}, \epsilon_{ik}, H_i, E_3$  и  $D_3$  – соответственно механические напряжения и деформации, магнитная и электрическая напряженности и электрическое смещение,  $c_{ij} = c_{ji}^D$  – модули упругости, измеренные при постоянной индукции электрического поля,  $h_{31}$  – пьезоэлектрический модуль,  $\beta_{33} = \beta_{33}^e$  – диэлектрическая "непроницаемость", определенная при постоянном значении деформаций,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\rho_0$  – плотность материала. Предполагается, что внешние заряды отсутствуют и удельная проводимость среды равна нулю.

К системе (1.1)–(1.3) необходимо добавить механические граничные условия на берегах разрезов

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})^\pm - e^{2i\psi}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})^\pm = \pm 2e^{i\psi}(X_1^\pm - iX_2^\pm) \quad (1.4)$$

а также электромагнитные граничные условия [7]

$$E_3^+ = E_3^-, \quad H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^- \quad (1.5)$$

Индексы "плюс" и "минус" относятся к левому и правому берегам  $L_j$  при движении от его начала  $a_j$  к концу  $b_j$ ;  $\psi$  – угол между нормалью к левому берегу и осью  $ox_1$ . Ниже считая, что усилия на обоих берегах  $L_j$  самоуравновешены, полагаем  $X_m^+ = -X_m^- = X_m$  ( $m = 1, 2$ ).

2. Применим к исходным соотношениям (1.1)–(1.3) интегральное преобразование Фурье по времени (при нулевых начальных условиях)

$$F(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.1)$$

$$f(x_1, x_2, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty F(x_1, x_2, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

где под функцией  $f(x_1, x_2, t)$  понимается любой из описанных выше компонентов акустоэлектрического поля, параметр  $\omega$  имеет смысл круговой частоты.

Систему уравнений (1.1)–(1.3) при учете (2.1) в трансформированной плоскости можно свести к двум связанным уравнениям относительно вектора механического перемещения и потенциала  $\mathbf{A} = (0, 0, A)$  [8]

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} + \gamma_2^2 \mathbf{U} + \chi \operatorname{grad} A = 0$$

$$\nabla^2 A + k^2 A = \alpha^* \operatorname{div} \mathbf{U}, \quad \mathbf{H}^* = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2)$$

$$\sigma = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} - 1, \quad \gamma_m = \frac{\omega}{c_m}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{c_{11} - \kappa_0^2}{\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho_0}}, \quad (2.2)$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{\beta_{33}}{\mu}}, \quad \kappa_0^2 = \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}}, \quad \chi = \frac{2k^2 h_{31}}{i\omega(c_{11} - c_{12})}, \quad \alpha^* = \frac{i\omega h_{31}}{\beta_{33}} \quad (m = 1, 2)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{H}^*$  – соответственно изображения по Фурье векторов перемещения  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  и магнитной напряженности  $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$ . Величина  $\kappa_0$  характеризует пьезоэлектрический эффект.

Вводя представление  $\mathbf{U} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot}(\mathbf{k}\Psi)$  ( $\mathbf{k}$  – единичный орт оси  $x_3$ ) в систему (2.2), приходим к трем дифференциальным уравнениям

$$(1 + \sigma)\nabla^2 \Phi + \gamma_2^2 \Phi + \chi A = 0$$

$$\nabla^2 \Psi + \gamma_2^2 \Psi = 0, \quad \nabla^2 A + k^2 A = \alpha^* \nabla^2 \Phi \quad (2.3)$$

Исключая  $A$  из первого уравнения (2.3) и подставляя результат в последнее уравнение, находим

$$(\nabla^2 + \beta_1^2)(\nabla^2 + \beta_2^2)\Phi = 0 \quad (2.4)$$

$$2\beta_{1,2} = \sqrt{(\gamma_1 + k)^2 + \delta_0^2} \pm \sqrt{(\gamma_1 - k)^2 + \delta_0^2}, \quad \delta_0^2 = \kappa_0^2 k^2 / (c_{11} - \kappa_0^2)$$

Из (2.3) и (2.4), в частности, следует, что в пьезоэлектрике класса  $btt$  могут существовать монохроматическая  $SV$  – волна и сопряженные волны следующих типов:

$$u_m^{(v)}(x_1, x_2, t) = U_m^{(v)} \exp[-i(\omega t + \beta_v \mathbf{x} \cdot \mathbf{n})]$$

$$a^{(v)}(x_1, x_2, t) = A^{(v)} \exp[-i(\omega t + \beta_v \mathbf{x} \cdot \mathbf{n})]$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{n} = (\cos \beta, \sin \beta) \quad (m, v = 1, 2)$$

где  $U_m^{(v)}$  и  $A^{(v)}$  – амплитуды перемещений и потенциала в волне, характеризуемой волновым числом  $\beta_v$  ( $v = 1, 2$ ),  $\beta$  – угол между нормалью к фронту излучаемой волны и осью  $x_1$ .

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (2.5)$$

причем функции  $\Phi_m$  ( $m = 1, 2$ ) представляют собой произвольные решения уравнения Гельмгольца  $(\nabla^2 + \beta_m^2)\Phi_m = 0$ .

В соответствии с этим интегрирование последнего уравнения (2.3) позволяет определить функцию  $A$ :

$$A = -\alpha^* \sum_{m=1}^2 B_m \Phi_m, \quad B_m = \frac{\beta_m^2}{k^2 - \beta_m^2} \quad (2.6)$$

На основании формул (2.5), (2.6), (1.1) и (1.3) можно получить общие представления акустоэлектромагнитных величин через функции  $\Psi$  и  $\Phi_m$  ( $m = 1, 2$ ) в трансформированной плоскости [8]

$$U_1 = \partial_1 \Phi + \partial_2 \Psi, \quad U_2 = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi$$

$$S_{11} + S_{22} = - \sum_{m=1}^2 \beta_m^2 (c_{11} + c_{12} + 2\kappa_0^2 B_m) \Phi_m$$

$$S_{22} - S_{11} + 2iS_{12} = -4(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi + i\Psi)$$

$$S_{22} - S_{11} - 2iS_{12} = -4(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} (\Phi - i\Psi) \quad (2.7)$$

$$E_3^* = k^2 h_{31} \sum_{m=1}^2 B_m \Phi_m, \quad D_3^* = \frac{h_{31}}{\beta_{33}} \sum_{m=1}^2 \beta_m^2 B_m \Phi_m$$

$$\mathbf{H}^* = \text{rot} \mathbf{A}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

3. Рассматривая граничную задачу в точной постановке, то есть не пренебрегая, как обычно, магнитным полем, будем исходить из формул (2.7). Такой подход с привлечением специальных интегральных представлений потенциалов позволяет несколько упростить процедуру сведения исходной задачи к интегральным уравнениям. Отметим, что соответствующая граничная задача рассматривалась [6] в квазистатическом

приближении. При этом использовались интегральные представления решений, построенные [9] методом потенциала.

Запишем интегральные представления искомых потенциалов  $\Phi_\nu$  и  $\Psi$  в виде:

$$\Phi_\nu(z) = \frac{(-1)^\nu (k^2 - \beta_\nu^2)}{\beta_\nu^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2)} \left\{ \int_L q_1 H_0^{(1)}(\beta_\nu r) ds + \int_L \left( q_2 \frac{\partial H_0^{(1)}(\beta_\nu r)}{\partial \zeta} d\zeta + q_3 \frac{\partial H_0^{(1)}(\beta_\nu r)}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \right\}$$

$$(\nu = 1, 2)$$

$$\Psi(z) = \frac{k^2}{i\beta_1^2 \beta_2^2} \left\{ \int_L q_4 H_0^{(1)}(\gamma_2 r) ds + \int_L \left( q_2 \frac{\partial H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\partial \zeta} d\zeta - q_3 \frac{\partial H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \right\} \quad (3.1)$$

$$q_m = q_m(\zeta) = \frac{\gamma_1^2}{8i} (e^{-i\psi} R_1 - (-1)^m e^{i\psi} R_2) \quad (m = 1, 4)$$

$$q_2 = q_2(\zeta) = i\lambda e^{-i\psi} R_1' / 2, \quad q_3 = q_3(\zeta) = i\lambda e^{i\psi} R_2' / 2$$

$$R_m = R_m(\zeta) = [U_1] - (-1)^m i[U_2], \quad R_m' = \frac{dR_m}{ds} \quad (m = 1, 2)$$

$$\lambda = \gamma_1^2 / \gamma_2^2, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \bar{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \zeta \in L$$

Здесь  $ds$  – элемент дуги контура  $L$ ,  $H_p^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода порядка  $p$ . Квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на  $L$ .

Для функций  $q_m(\zeta)$  имеют место соотношения, вытекающие из (3.1):

$$q_1(\zeta) = \gamma_1^2 [U_n] / 4i, \quad q_4(\zeta) = \gamma_1^2 [U_s] / 4$$

$$q_2(\zeta) = i\lambda(V + iV^*) / 2, \quad q_3(\zeta) = i\lambda(V - iV^*) / 2 \quad (3.2)$$

$$V = [U_n'] - \rho^{-1} [U_s], \quad V^* = [U_s'] + \rho^{-1} [U_n]$$

Здесь  $U_n$  и  $U_s$  – соответственно амплитуды нормальной и касательной компоненты вектора перемещения на  $L$ ,  $\rho$  – радиус кривизны контура  $L$  в точке  $\zeta$ .

Построение представлений (3.1) – не совсем тривиальная операция и требует пояснений. Функции  $\Psi$  и  $\Phi_\nu$  должны быть решениями соответствующих уравнений Гельмгольца и удовлетворять условиям излучения. Кроме того, представления (3.1) должны обеспечивать наличие скачков перемещений и непрерывность вектора механических напряжений, а также выполнение электромагнитных условий (1.5) на  $L$ . Указанные условия в силу (2.7), (1.4) и (1.5) имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^2 \alpha_\nu [\Phi_\nu] = -4(c_{11} - c_{12}) e^{2i\psi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi + i\Psi) \right], \quad e^{2i\psi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi + i\Psi) \right] = e^{-2i\psi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi - i\Psi) \right] \quad (3.3)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} \sum_{\nu=1}^2 B_\nu \Phi_\nu \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{\nu=1}^2 B_\nu \Phi_\nu \right] = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^2 B_\nu [\Phi_\nu] = 0, \quad \alpha_\nu = -\beta_\nu^2 (c_{11} + c_{12} + 2\kappa_0^2 B_\nu), \quad z \in L$$

Представления (3.1) были построены таким образом, чтобы условия (3.3) удовлетворялись автоматически. Оставшиеся при этом две комплексные функции  $[U_n]$  и  $[U_s]$  необходимы для удовлетворения остальных механических граничных условий на трещинах.

4. Граничные условия (1.4) в трансформантах Фурье запишем в форме

$$(S_{11} + S_{22})^{\pm} - e^{2i\psi} (S_{22} - S_{11} + 2iS_{12})^{\pm} = \pm 2e^{i\psi} (X_1^* - iX_2^*) \quad (4.1)$$

$$(S_{11} + S_{22})^{\pm} - e^{-2i\psi} (S_{22} - S_{11} - 2iS_{12})^{\pm} = \pm 2e^{-i\psi} (X_1^* + iX_2^*)$$

В силу того, что интегральные представления (3.1) автоматически обеспечивают непрерывность вектора механических напряжений на  $L$ , каждое из условий (4.1) достаточно выполнить лишь на одном из берегов разреза, например, на левом. Подставляя предельные значения входящих в (4.1) функций при  $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ , приходим к системе двух комплексных сингулярных интегродифференциальных уравнений:

$$\sum_{m=1}^2 \int_L \{f'_m(\zeta) G_{mv}(\zeta, \zeta_0) + f_m(\zeta) g_{mv}(\zeta, \zeta_0)\} ds = N_v(\zeta_0) \quad (4.2)$$

$$f_1(\zeta) = [U_n], \quad f_2(\zeta) = [U_s], \quad f'_m = \frac{df_m}{ds} \quad (v = 1, 2)$$

$$G_{1v}(\zeta, \zeta_0) = i\lambda K_1 \sin(\psi - \alpha_0) \pm \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) e^{\pm 2i\psi_0} (F_1 e^{\pm i(\psi - 3\alpha_0)} + F_2 e^{\mp i(\psi + \alpha_0)}) + T_{1v}(\zeta, \zeta_0)$$

$$G_{2v}(\zeta, \zeta_0) = i\lambda K_1 \cos(\psi - \alpha_0) + \frac{1}{2}i(c_{11} - c_{12}) e^{\pm 2i\psi_0} (F_1 e^{\pm i(\psi - 3\alpha_0)} - F_2 e^{\mp i(\psi + \alpha_0)}) + T_{2v}(\zeta, \zeta_0)$$

$$g_{1v}(\zeta, \zeta_0) = -\frac{1}{2}i\gamma_1^2 (K_0 + (c_{11} - c_{12})\Phi_{22} e^{\pm 2i(\psi_0 - \alpha_0)}) + \rho^{-1} G_{2v}(\zeta, \zeta_0)$$

$$g_{2v}(\zeta, \zeta_0) = \pm \frac{1}{2}\gamma_2^2 (c_{11} - c_{12}) H_2(\gamma_2 r) e^{\pm 2i(\psi_0 - \alpha_0)} - \rho^{-1} G_{1v}(\zeta, \zeta_0), \quad T_{v1}(\zeta, \zeta_0) = T_v(\zeta, \zeta_0)$$

$$T_{v2}(\zeta, \zeta_0) = \overline{T_v(\zeta, \zeta_0)},$$

$$T_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{\lambda}{\pi} (c_{11} + c_{12} - 2\kappa_0^2) \left( 2 \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi}}{\zeta - \zeta_0} - i e^{2i\psi_0} \frac{e^{-i\psi} + e^{i(\psi - 2\alpha_0)}}{\zeta - \zeta_0} \right),$$

$$F_1 = \lambda \Phi_{33} + \gamma_2 H_3(\gamma_2 r)$$

$$T_2(\zeta, \zeta_0) = \frac{\lambda}{\pi} (c_{11} + c_{12} - 2\kappa_0^2) \left( 2 \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi}}{\zeta - \zeta_0} - e^{2i\psi_0} \frac{e^{-i\psi} - e^{i(\psi - 2\alpha_0)}}{\zeta - \zeta_0} \right),$$

$$F_2 = \lambda \Phi_{31} - \gamma_2 H_1(\gamma_2 r)$$

$$\Phi_{mn} = (\beta_2^2 - \beta_1^2)^{-1} (\beta_2^{m-2} (k^2 - \beta_2^2) H_n(\beta_2 r) - \beta_1^{m-2} (k^2 - \beta_1^2) H_n(\beta_1 r))$$

$$K_0 = c_2^* H_0^{(1)}(\beta_2 r) - c_1^* H_0^{(1)}(\beta_1 r), \quad K_1 = c_2^* \beta_2 H_1(\beta_2 r) - c_1^* \beta_1 H_1(\beta_1 r)$$

$$c_i^* = (\beta_2^2 - \beta_1^2)^{-1} (\beta_i^2 (c_{11} + c_{12} - 2\kappa_0^2) - k^2 (c_{11} + c_{12}))$$

$$H_1(x) = \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x), \quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x)$$

$$H_3(x) = \frac{16i}{\pi x^3} + \frac{2i}{\pi x} + \mp H_3^{(1)}(x), \quad N_v(\zeta_0) = 4e^{\pm i\psi_0} \mp (X_1^* iX_2^*)$$

$$r = |\zeta - \zeta_0|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0), \quad \psi = \psi(\zeta), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0)$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20}, \quad \zeta, \zeta_0 \in L$$

Здесь верхние знаки соответствуют индексу  $v = 1$ , нижние —  $v = 2$ . Ядра  $G_{mv}$ ,  $g_{mv}$  имеют сингулярный характер типа Коши за счет функций  $T_1, T_2$ . Если трещины прямолинейные ( $\rho = \infty$ ), то ядра  $g_{mv}$  упрощаются и в силу допущений относительно  $L$  могут обладать не более чем логарифмической особенностью.

Для фиксации решения в классе функций с производными, неограниченными на

концах контуров  $L_j$  [5], к (4.2) необходимо присоединить дополнительные условия

$$\int_{L_j} [U_n'] ds = 0, \quad \int_{L_j} [U_s'] ds = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

регламентирующие равенство нулю скачков перемещений в вершинах разрезов.

Таким образом, построенный алгоритм решения нестационарной краевой задачи для пьезоэлектрической среды с трещинами-разрезами сводится к следующему. Из системы (4.2), (4.3) определяются трансформанты скачков нормального и касательного перемещений на разрезах. Далее по этим функциям при помощи представлений (3.1) восстанавливаются потенциалы  $\Phi_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) и  $\Psi$ . Затем по формулам (2.7) в плоскости изображения определяются акустоэлектромагнитные поля в среде. Завершающим пунктом служит переход к оригиналам искомым величин с учетом (2.1).

5. Для определения динамических коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  [2] найдем главную асимптотику напряжений в окрестности вершины трещины. Целесообразно рассмотреть следующие комбинации:

$$2(N - iT) = S_{11} + S_{22} - e^{2i\psi} (S_{22} - S_{11} + 2iS_{12}) \quad (5.1)$$

$$2(N + iT) = S_{11} + S_{22} - e^{-2i\psi} (S_{22} - S_{11} - 2iS_{12})$$

где  $N$  и  $T$  — соответственно нормальное и касательное напряжения на продолжении за вершину дефекта. Оставляя в (5.1) лишь сингулярные интегралы, при учете (2.7), (3.1), находим:

$$\begin{aligned} S_{11}^0 + S_{22}^0 &= -\frac{1}{\pi i} (c_{11} + c_{12} - 2\kappa_0^2) \left( \int_L \frac{q_2 d\zeta}{\zeta - z} + \int_L \frac{q_3 d\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{z}} \right) \\ S_{22}^0 - S_{11}^0 + 2iS_{12}^0 &= \frac{1}{\pi i} (c_{12} - c_{11}) \left( \int_L \frac{dR_2}{\zeta - z} - \sigma \int_L \frac{q_2 e^{-2i\alpha} d\zeta}{\zeta - z} + (\sigma + 2) \int_L \frac{q_3 e^{-2i\psi} d\zeta}{\zeta - z} \right) \\ S_{22}^0 - S_{11}^0 - 2iS_{12}^0 &= \frac{1}{\pi i} (c_{12} - c_{11}) \left( -\int_L \frac{dR_1}{\zeta - \bar{z}} - \bar{\sigma} \int_L \frac{q_3 e^{-2i\alpha} d\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{z}} + (\sigma + 2) \int_L \frac{q_2 e^{-2i\psi} d\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{z}} \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\alpha = \arg(\zeta - z)$$

Фигурирующие здесь плотности  $R_\nu$ ,  $q_m$  ( $\nu = 1, 2$ ;  $m = 2, 3$ ) определены в (3.1).

Произведем параметризацию контура  $L_j$ :  $\zeta = \zeta(\delta)$ ,  $\zeta_0 = \zeta(\delta_0)$ ,  $-1 \leq \delta$ ,  $\delta_0 \leq 1$ . В соответствии с этим положим

$$[U_n'] = \chi(\delta)\Omega_1(\omega, \delta), \quad [U_s'] = \chi(\delta)\Omega_2(\omega, \delta) \quad (5.3)$$

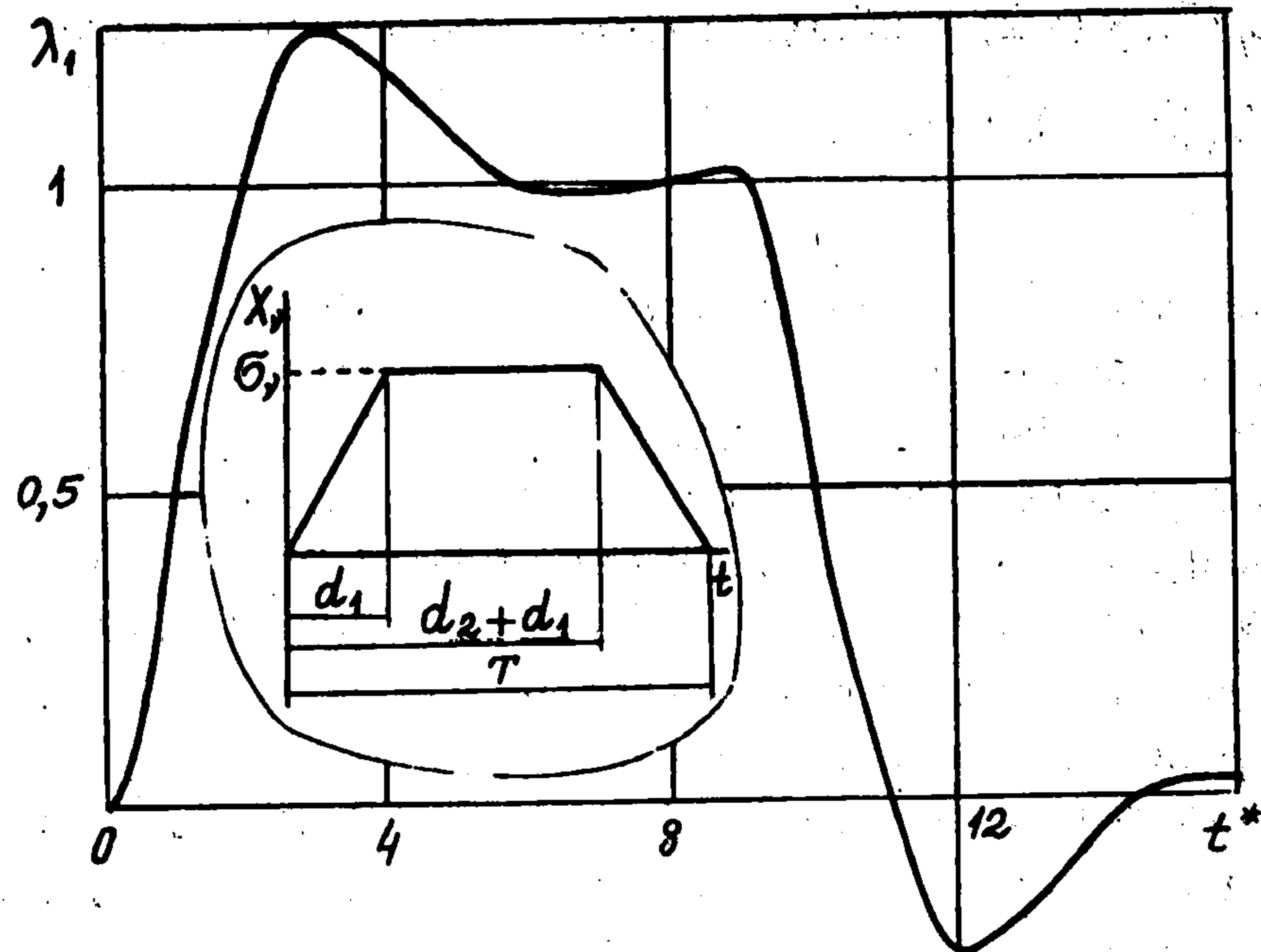
$$\chi(\delta) = (s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2})^{-1}, \quad \Omega_m(\omega, \delta) \in H[-1, 1] \quad (m = 1, 2)$$

В силу формул, описывающих поведение интегралов типа Коши в окрестности концов линии интегрирования [5], а также асимптотического соотношения [10]

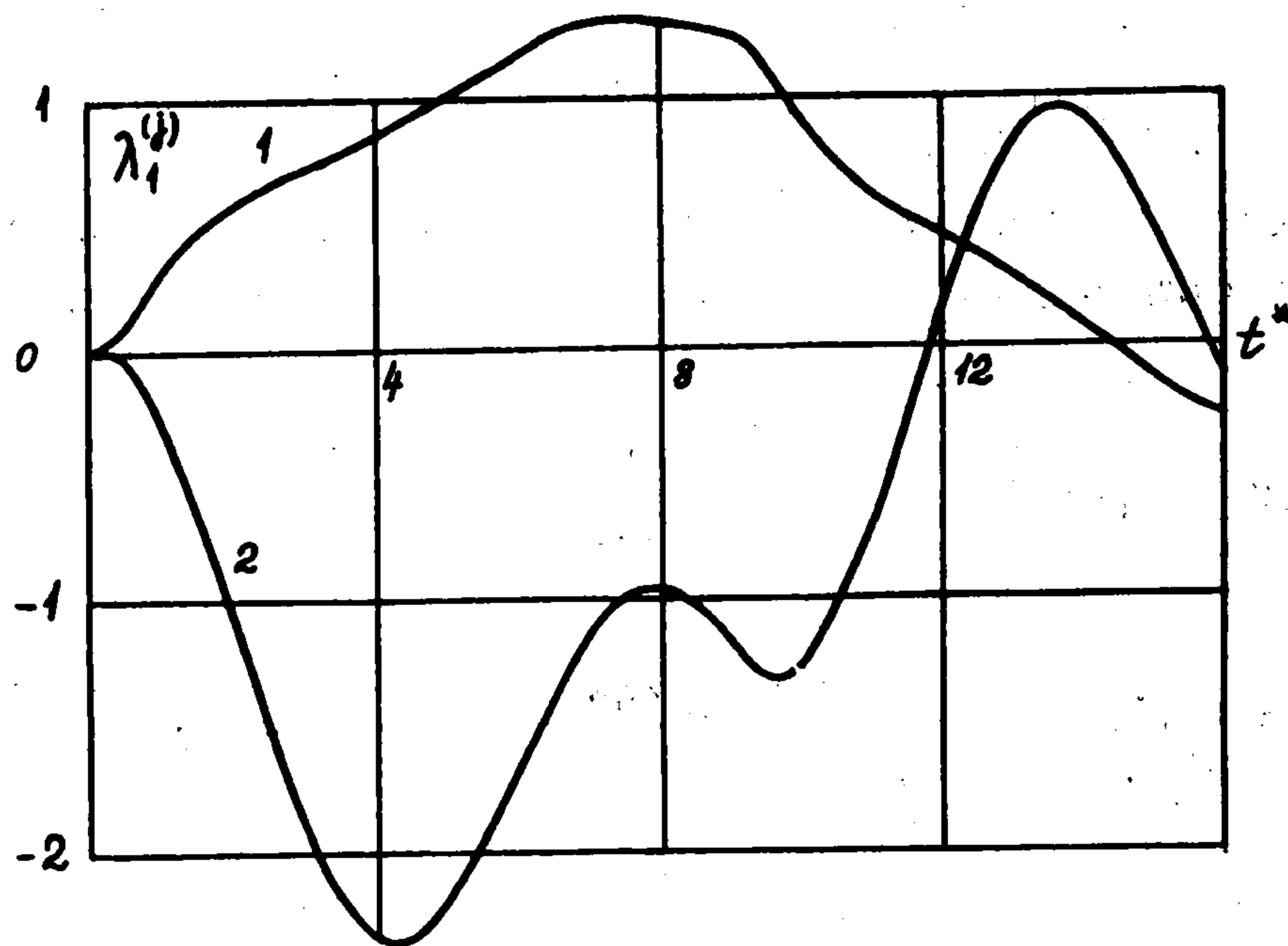
$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta) e^{-2i\alpha} d\zeta}{\zeta - z} = \pm \frac{e^{\pm i\gamma\pi} \omega^*(c) h(z)}{2i \sin \gamma\pi (z - c)^\gamma} + F_0(z) \quad (5.4)$$

$$\omega(\zeta) = \omega^*(\zeta)(\zeta - c)^{-\gamma}, \quad 0 < \text{Re } \gamma < 1$$

можно заключить, что входящие в (5.2) интегралы обладают корневой особенностью в вершине контура  $c$ . Полный анализ выражений (5.2) при учете (5.3), (5.4) позволяет



Фиг. 1



Фиг. 2

после перехода к оригиналам определить коэффициенты интенсивности напряжений в виде (нижний знак относится к вершине  $c = b$ )

$$K_{I,II}^{\mp} = \mp \frac{\lambda(c_{11} + c_{12} - 2\kappa_0^2)}{\sqrt{2s'(\mp 1)}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \Omega_{1,2}(\omega, \mp 1) e^{-i\omega t} d\omega \quad (5.5)$$

6. В качестве первого примера рассмотрим пьезокерамическую среду (материал PZT-4 [4]), ослабленную единственной прямолинейной трещиной длиной  $2l$ . Возбуждение сопряженных полей в среде осуществляется вследствие импульсной нагрузки трапецеидальной формы (фиг. 1). Соответствующие спектральные функции данного импульса имеют вид

$$X_v^*(\omega) = \frac{\sigma_v}{\omega^2 \sqrt{2\pi}} \left[ d_1^{-1} (e^{i\mu_1} - 1) - \mu_2 (e^{i\omega T} - e^{i\mu_3}) \right] \quad (6.1)$$

$$\mu_1 = \omega d_1, \quad \mu_2 = (T - d_1 - d_2)^{-1}, \quad \mu_3 = \omega(d_1 + d_2) \quad (v=1,2)$$

Целесообразно ввести безразмерные временные параметры ( $c_2$  – скорость SV-волны в пьезоэлектрике)  $t^* = c_2 t l^{-1}$ ,  $d_i^* = c_2 d_i l^{-1}$ ,  $T^* = c_2 T l^{-1}$ .

Функции  $\Omega_i(\omega, \mp 1)$  ( $i=1,2$ ) вычисляли из системы (4.2), (4.3) при учете (6.1) по схеме метода механических квадратур [11]. Полубесконечный интервал интегрирования в (5.5) заменяли конечным  $[0, \omega^*]$ ; при этом величину  $\omega^*$  определяли путем численного анализа из соображений достижения минимальной погрешности. Количество чебышевских узлов

интерполяции на контуре трещины принимали равным  $N = 15, 20$  и  $25$ , дальнейшее увеличение  $N$  не приводило к существенному уточнению результатов.

Фиг. 1 иллюстрирует изменение величины  $\lambda_1 = \sqrt{\pi l} K_I^+ / \sigma_2$  в функции  $t^*$  при действии на берегах трещины равномерно распределенных нормальных усилий ( $X_1 = 0, X_2 \neq 0$ ). Параметры импульса задавали равными  $T^* = 10, d_1^* = 1, d_2^* = 8, \sigma_2^* = c_2 \sigma_2 l^{-1} = 1H/(c \cdot m^2)$ .

Как видно из фиг. 2, вследствие инерционного эффекта относительный динамический коэффициент интенсивности  $\lambda_1(t^*)$  может превысить свое статическое значение  $\lambda_1^0 = 1$  почти на 25%. Тот факт, что в интервале  $11c_2^{-1}l < t < 14,6c_2^{-1}l$ , величина  $\lambda_1$  принимает отрицательные значения, выражает стремление берегов трещины сомкнуться по истечении некоторого времени с момента исчезновения нагрузки. Если на трещине действуют равномерные касательные усилия, изменяющиеся согласно импульсу с параметрами  $T^* = 10, d_1^* = 1, d_2^* = 8, \sigma_1^* = c_2 \sigma_1 l^{-1} = 1H/(c \cdot m^2)$ , то, как показали численные исследования, динамический эффект для величины  $\lambda_2(t^*) = \sqrt{\pi l} K_{II}^+ / \sigma_1$  (в сравнении с  $\lambda_2^0 = 1$ ) составляет лишь 10%.

В качестве второго примера исследовали случай взаимодействия двух прямолинейных трещин  $L_1$  и  $L_2$  с параметрическими уравнениями  $\xi_1^{(1)} = 3\delta, \xi_2^{(1)} = 0$  и  $\xi_1^{(2)} = \delta, \xi_2^{(2)} = h$ . Было принято, что трещина  $L_2$  свободна от нагрузки, а на  $L_1$  действуют импульсные нормальные усилия с параметрами  $T^* = c_2 T h^{-1} = 10, d_1^* = c_2 d_1 h^{-1} = 1, d_2^* = c_2 d_2 h^{-1} = 8, \sigma_2^* = c_2 \sigma_2 h^{-1} = 1H/(c \cdot m^2)$ , причем  $h/l_2 = 1$ . Графики величин  $\lambda_1^{(j)} = \sqrt{\pi l_j} K_{Ij}^+ / \sigma_2$  ( $j = 1, 2; 2l_j$  — длина трещины  $L_j$ ) в функции  $t^* = c_2 t h^{-1}$  приведены на фиг. 2. Кривые 1 и 2 относятся к трещинам  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

Из данных расчетов следует, что в среде с двумя трещинами влияние инерционного эффекта более существенно, чем в среде с одной трещиной. Как видно из фиг. 2  $\max|\lambda_1^{(2)}| \approx 2,34$  в то время как в случае статической нагрузки ( $X_2 = \sigma_2$ ) величина  $|\lambda_1^{(2)}| \approx 1,45$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mechanics of Fracture. V. 4. Elastodynamic Crack Problems/ Ed. by Sih G.C. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1977. 352 p.
2. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239 с.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. М. 1. Ч.А. С. 204–326.
5. Мухелшвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Партон В.З., Фильштинский М.Л. Динамическая задача теории упругости для пьезоэлектрической среды с туннельными разрезами // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т. 42. № 5. С. 17–24.
7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев, Наук. думка, 1989. 279 с.
8. Партон В.З., Фильштинский М.Л. Общие представления сопряженных электромагнитных и механических полей в пьезоэлектрической среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 1. С. 53–55.
9. Фильштинский Л.А., Волкова Л.В. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (плоская деформация) // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 831–834.
10. Григояк Э.И., Грингауз М.Г., Фильштинский Л.А. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 3. С. 567–570.
11. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solution of singular integral equations // Mechanics of Fract. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. 1973. V. 1. P. 368–425.

Сумы

Поступила в редакцию  
7.VII.1993 г