

УДК 539.375

© 1994 г. М.А. Греков

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕЩИНЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ЛИНЕЙНО-УПРУГИМИ СРЕДАМИ

Для упругого потенциала, отвечающего линейно-упругому предварительно напряженному материалу, строится точное решение плоской задачи нелинейной теории упругости для трещины, расположенной на границе контакта двух различных сред. Используется унифицированный вариант [1] плоской задачи нелинейной теории упругости. Для сравнения приводится решение соответствующей задачи по линейной теории с тем же упругим потенциалом. Сопоставляются асимптотики напряжений в том и в другом случае. Показано, что асимптотика компонентов симметричного тензора Био имеет тот же порядок, что и асимптотика напряжений в линейной задаче, но при этом у первых отсутствует осцилляция, а квадраты коэффициентов при главных членах асимптотик этих напряжений с точностью до множителя совпадают с интегралом Райса-Черепанова. В то же время перемещения в нелинейной задаче не осциллируют только при выполнении некоторого соотношения для упругих постоянных контактирующих сред.

Решение плоской задачи линейной теории упругости для межфазной трещины [2–6] содержит осциллирующую сингулярность и, поэтому на некоторых участках поверхности трещин около ее концов теряет смысл. Корректировка этого решения путем введения дополнительных условий контакта поверхностей трещины [7–12] снимает осцилляцию, но сохраняет сингулярность напряжений и деформаций. Таким образом, в обоих случаях линейная теория упругости несостоятельна в некоторой окрестности вершины и трещины, и это требует решения соответствующих задач в нелинейной постановке.

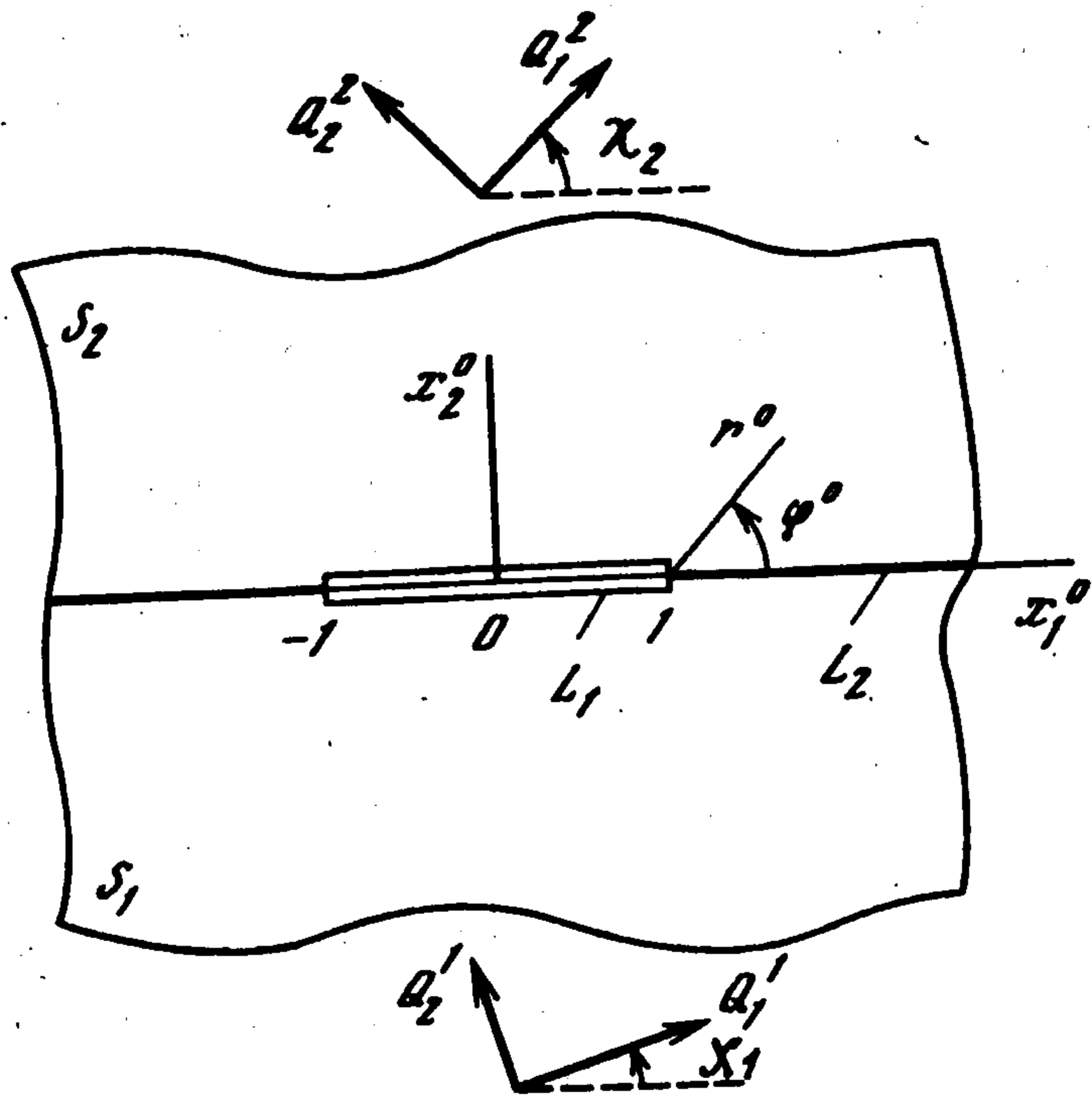
1. Постановка задачи. Рассмотрим совместную деформацию двух различных сред в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния. В плоскости x_1^0, x_2^0 граница L раздела двух сред в недеформированном состоянии совпадает с действительной осью $x_2^0 = 0$, на которой расположена трещина $L_1 = \{x_1^0, x_2^0: |x_1^0| < 1, x_2^0 = 0\}$. Предположим, что поверхности трещины свободны от внешних усилий, а на бесконечности в каждой среде S_k ($k = 1, 2$) действуют главные условные напряжения $\sigma_j^{0k\infty} = Q_j^k$ ($j = 1, 2$), причем Q_1^k под углом χ_k к оси x_1^0 (фиг. 1).

Для материала каждой среды примем закон упругости в виде

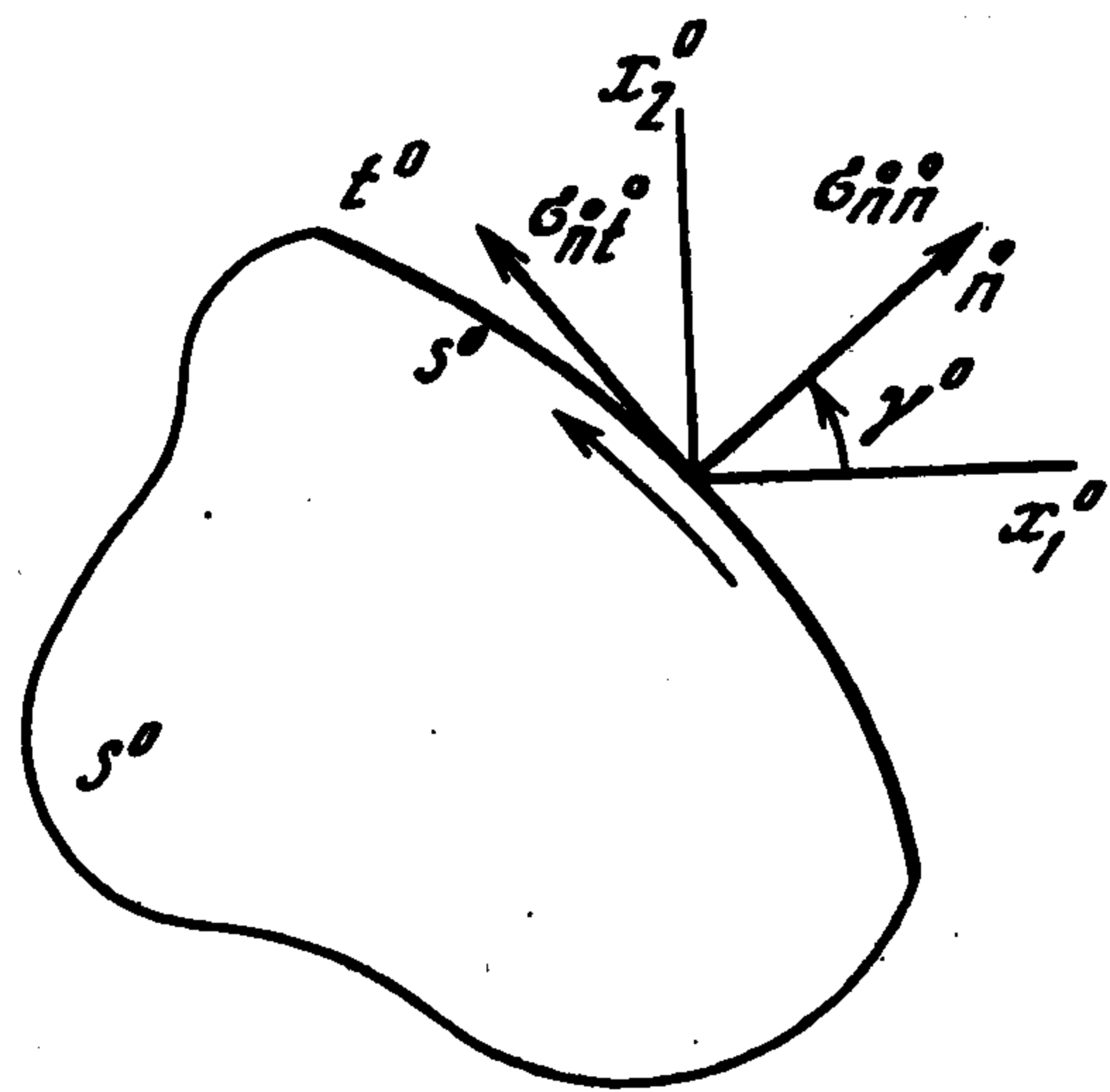
$$\sigma_j^0 = \sigma_k^v \xi^+ - (-1)^j \alpha_k^v \xi^- + \sigma_k^r \quad (j, k = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\xi^\pm = \frac{1}{2}[(\lambda_1 - 1) \pm (\lambda_2 - 1)]$$

где σ_j^0 – главные значения тензора Био (главные условные напряжения), $\lambda_j - 1$ – главные относительные удлинения, σ_k^v, α_k^v – упругие постоянные среды S_k , значения которых, вообще говоря, изменяются при изменении постоянной σ_k^r – остаточного условного напряжения в отсчетной конфигурации соответствующей среды, величины с индексом 0 относятся к недеформированной (отсчетной) конфигурации, а без него – к деформированной (текущей).



Фиг. 1



Фиг. 2

При малых деформациях и углах поворота соотношения (1.1) переходят в закон Гука в главных осях ($\sigma_j^0 = \sigma_j$, $\xi^\pm = 1/2(e_1 \pm e_2)$) и $\sigma_k^v = 2(\lambda_k^v + \mu_k^v)$, $\alpha_k^v = 2\mu_k^v$, где при $\sigma_k^r = 0$ $\lambda_k^v = \lambda_{(k)}$, $\mu_k^v = \mu_{(k)}$ — постоянные Ламе, причем при плоском напряженном состоянии λ_k^v следует заменить на $\lambda_k^{v*} = 2\lambda_k^v\mu_k^v / (\lambda_k^v + 2\mu_k^v)$.

Линейные зависимости (1.1) между величинами σ_j^0 и $\lambda_j - 1$, образующими энергетическую пару [1], отвечают линейно-упругим предварительно напряженным материалам, для которых при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, т.е. при отсутствии деформации, $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma_k^r$.

Решение нелинейной задачи построим в частном случае, когда для каждой среды S_k величина предварительного всестороннего в плоскости) условного напряжения (остаточное напряжение) совпадает с соответствующим модулем упругости материала, т.е. $\sigma_k^r = \sigma_k^v = \sigma_k^*$ и $\alpha_k^v = \alpha_k$. При этом упрощается анализ особенностей напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины, поскольку решение задачи удастся получить в аналитическом виде.

Это не означает, что построенное ниже решение задачи нелинейной теории упругости носит сугубо частный характер. Из полученного решения нелинейной задачи видно, что напряженно-деформированное состояние около вершины трещины качественно не меняется при изменении упругих постоянных. Как и в линейной задаче, зависимость асимптотических формул решения нелинейной задачи от упругих постоянных является характерной чертой межфазной трещины и выражается в зависимости биупругой постоянной ϵ от σ_k^* и α_k ($k = 1, 2$). Для трещины в однородной среде (обе среды одинаковы) эта зависимость естественно пропадает.

К сказанному следует добавить, что линейность соотношений (1.1) позволяет выявить в "чистом виде" эффект геометрической нелинейности в плоских задачах теории упругости.

2. Основные соотношения. Закону (1.1) при $\sigma_k^r = \sigma_k^v = \sigma_k^*$, $\alpha_k^v = \alpha_k$ соответствует

Оупругий потенциал

$$W = \sigma_k^* |dz / d\zeta|^2 + \alpha_k |dz / d\bar{\zeta}|^2 \quad (\sigma_k^* \leq \alpha_k) \quad (2.1)$$

В этом случае решение плоских задач нелинейной теории упругости сводится [1, 13] к нахождению комплексных кусочно-голоморфных функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\bar{\zeta})$, удовлетв

ряющих линейным граничным условиям либо при заданных на контуре s^0 области напряжениях (фиг. 2)

$$\sigma^* \Phi(\zeta) e^{i\gamma^0} + \alpha \overline{\Psi(\zeta)} e^{-i\gamma^0} = e^{i\gamma^0} [\sigma_{nn}^{00}(s^0) + i\sigma_{nt}^{00}(s^0)] \quad (2.2)$$

либо при заданной конфигурации деформированного контура s^0

$$\Phi(\zeta) e^{i\gamma^0} - \overline{\Psi(\zeta)} e^{-i\gamma^0} = -idz / ds^0 \quad (2.3)$$

Здесь и далее используются комплексные координаты и компоненты векторов и тензоров, вводимые соотношениями [13]

$$\zeta = x_1^0 + ix_2^0, \quad z = x_1 + ix_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - i \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} + i \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right) \quad (2.4)$$

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21})$$

Основные выражения, определяющие напряженно-деформированное состояние тела в плоской задаче нелинейной теории упругости, имеют вид [13]

$$z = \int \Phi(\zeta) d\zeta + \int \overline{\Psi(\zeta)} d\bar{\zeta}$$

$$e^{2i\omega} = \Phi(\zeta) / \overline{\Phi(\zeta)}, \quad \Delta = \Phi(\zeta) \overline{\Phi(\zeta)} - \Psi(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)}$$

$$\Sigma_1^0 = 2\sigma^* [\Phi(\zeta) \overline{\Phi(\zeta)}]^{1/2}, \quad \Sigma_2^0 = 2\alpha \overline{\Phi(\zeta) \Psi(\zeta)} [\Phi(\zeta) \overline{\Phi(\zeta)}]^{-1/2} \quad (2.5)$$

$$\lambda \Delta \Sigma_1 = 2[\sigma^* \Phi(\zeta) \overline{\Phi(\zeta)} + \alpha \Psi(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)}]$$

$$\lambda \Delta \Sigma_2 = 2[(\sigma^* + \alpha) \Phi(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)}]$$

Здесь ω – угол поворота материальной частицы, Δ – кратность изменения площади в плоскости $x_3^0 = 0$, λ – кратность удлинения вдоль оси x_3^0 , Σ_j^0 , Σ_j – комплексные компоненты тензоров условных и истинных напряжений соответственно.

Следует отметить, что поскольку упругие постоянные σ_k^* и α_k контактирующих сред различны, то для полного решения задачи требуется найти четыре функции комплексного переменного $\Phi_k(\zeta)$, $\Psi_k(\zeta)$ ($k = 1, 2$). Каждой среде S_k соответствует своя пара Φ_k , Ψ_k , определяющая согласно выражениям (2.5) напряженно-деформированное состояние этой среды. Функции Φ_k , Ψ_k должны быть голоморфны, вообще говоря, только в соответствующих областях S_k .

В дополнение к приведенным соотношениям запишем краевые условия

$$\sigma_{nn}^{00}(x_1^0) + i\sigma_{nt}^{00}(x_1^0) = \sigma_{nn}^{00}(x_1^0) + i\sigma_{nt}^{00}(x_1^0), \quad \zeta \in L \quad (2.6)$$

$$dz_1 / dx_1^0 = dz_2 / dx_1^0, \quad \zeta \in L_2 \quad (2.7)$$

$$\sigma_{kn}^{00} = \sigma_{knt}^{00} = 0, \quad \zeta \in L_1, \quad k = 1, 2 \quad (2.8)$$

Здесь (2.6) – условие непрерывности напряжений на L , (2.7) – условие непрерывности смещений в дифференциальной форме на участке контакта L_2 ($x_1^0 = s^0$), (2.8) – условие на поверхности трещины.

3. Решение исходной задачи. Продолжим аналитически функцию $\Phi_1(\xi)$ в S_2 , а функцию $\Phi_2(\zeta)$ – в S_1 следующим образом:

$$\Phi_k(\zeta) = (\alpha_k / \sigma_k^*) \overline{\Psi_k(\bar{\zeta})}, \quad \bar{\zeta} \in S_k, \quad k = 1, 2 \quad (3.1)$$

Согласно равенству (2.2) функции $\Phi_k(\zeta)$ непрерывно продолжимы через незагруженные участки линии L . Переходя в (3.1) к сопряженным величинам и подставив результат в соотношение (2.6) при использовании формулы (2.2), получим при $\gamma^0 = -\pi/2$

$$[\sigma_1^* \Phi_1(t) + \sigma_2^* \Phi_2(t)]^+ = [\sigma_1^* \Phi_1(t) + \sigma_2^* \Phi_2(t)]^-, \quad \zeta \in L \quad (3.2)$$

$$\Phi_k^\pm(t) = \lim_{\zeta \rightarrow t \pm i0} \Phi_k(\zeta)$$

Из (3.2) следует, что голоморфная функция, заключенная в квадратных скобках, постоянна во всей плоскости, т.е.

$$\sigma_1^* \Phi_1(\zeta) + \sigma_2^* \Phi_2(\zeta) \equiv \sigma_1^* a_1^\pm + \sigma_2^* a_2^\pm, \quad a_k^\pm = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \Phi_k^\pm(t) \quad (3.3)$$

Тогда граничные условия (2.7) и (2.8) приводятся соответственно к виду

$$\Phi_1^+(t) + \beta \Phi_1^-(t) = Q, \quad \zeta \in L_2 \quad (3.4)$$

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = 0, \quad \zeta \in L_1 \quad (3.5)$$

$$\beta = \frac{1/\sigma_1^* + 1/\alpha_2}{1/\sigma_2^* + 1/\alpha_1}, \quad Q = \frac{1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2}{\sigma_1^*(1/\sigma_2^* + 1/\alpha_1)} (\sigma_1^* a_1^\pm + \sigma_2^* a_2^\pm)$$

Введем новую функцию $F(\zeta)$, голоморфную на линии контакта и исчезающую на бесконечности,

$$F(\zeta) = \begin{cases} \Phi_1(\zeta) - a_1^-, & \zeta \in S_1 \\ -\beta^{-1}[\Phi_1(\zeta) - a_1^+], & \zeta \in S_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Тогда из (3.4) и (3.5) для функции $F(\zeta)$ получим неоднородную краевую задачу Гильберта, общее решение которой может быть записано в виде [14]

$$F(\zeta) = \frac{a_1^+ - a_1^-}{2\pi i \beta X(\zeta)} \int_{-1}^1 \frac{X(t) dt}{t - \zeta} + \frac{C}{X(\zeta)} \quad (3.7)$$

$$C = \text{const}, \quad X(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right)^{i\varepsilon}, \quad \varepsilon = -\frac{\ln \beta}{2\pi}$$

$$X(t) = X^+(t) = -\beta X^-(t) = i e^{-\pi\varepsilon} \sqrt{1-t^2} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{i\varepsilon}, \quad |t| < 1$$

Переходя в (3.7) к интегрированию по замкнутому контуру, стягиваемому к отрезку $[-1, 1]$, при учете разложения на бесконечности функции $X(\zeta)$ получим

$$F(\zeta) = \frac{(a_1^+ - a_1^-) e^{\pi\varepsilon}}{2 \text{ch}(\pi\varepsilon)} \left\{ 1 - \frac{\zeta - i2\varepsilon}{X(\zeta)} \right\} + \frac{C}{X(\zeta)} \quad (3.8)$$

Постоянную C в (3.8) найдем из условия равенства нулю главного вектора всех сил действующих на элемент нижней полуплоскости $|x_1^0| < A$, $-B < x_2^0 < 0$ ($B > 0$). При $A \rightarrow \infty$, $B \rightarrow \infty$ это условие приводит к равенству

$$\varepsilon F_1 + iF_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_{12}^{01\infty} + i\sigma_{22}^{01\infty}) e^{i\omega_1^\infty t} dt \quad (3.9)$$

где (F_1, F_2) – главный вектор сил, приложенных к L со стороны положительного направления оси x_2^0 .

Учитывая (3.1) и (3.6), согласно [1, 13] имеем

$$F_1 + iF_2 = i \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_1^* \Phi_1^-(t) - \alpha_1 \bar{\Psi}_1^-(t)] dt = i \sigma_1^* \int_{-\infty}^{\infty} [2e^{\pi \varepsilon} \operatorname{ch}(\pi \varepsilon) F^-(t) + a_1^- - a_1^+] dt \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) и (3.7) в (3.9), получим $C = 0$. Кроме того, из (2.5) находим

$$\frac{Q_1^k + Q_2^k}{2\sigma_k^*} e^{i\omega_k^\infty} = \begin{cases} a_1^-, & k=1 \\ a_2^+, & k=2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\frac{Q_1^k - Q_2^k}{2\sigma_k^*} e^{i(\omega_k^\infty + 2\chi_k)} = \begin{cases} a_1^+, & k=1 \\ a_2^-, & k=2 \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\Phi_k(\zeta) = \frac{1}{2\operatorname{ch}(\pi \varepsilon)} \left\{ B_k + A_k e^y \frac{\zeta - i2\varepsilon}{X(\zeta)} \right\} \quad (3.12)$$

$$\Psi_k(\zeta) = \frac{\sigma_k^*}{2\alpha_k \operatorname{ch}(\pi \varepsilon)} \left\{ \bar{B}_k - \bar{A}_k e^{-y} \frac{\zeta + i2\varepsilon}{X(\bar{\zeta})} \right\}$$

$$y = \pi \varepsilon (3 - 2k), \quad \zeta \in S_k$$

$$A_k = \frac{\sigma_{22}^{0k\infty} - i\sigma_{12}^{0k\infty}}{\sigma_k^*} e^{i\omega_k^\infty}$$

$$B_k = \frac{\operatorname{ch}(\pi \varepsilon) \sigma_{11}^{0k\infty} + (-1)^k \operatorname{sh}(\pi \varepsilon) \sigma_{22}^{0k\infty} + i e^y \sigma_{12}^{0k\infty}}{\sigma_k^*} e^{i\omega_k^\infty}$$

($\sigma_{ij}^{0k\infty}$ – значения условных напряжений σ_{ij}^0 на бесконечности в среде S_k).

Так как бесконечно удаленная точка расположена на линии контакта L_2 , то перемещения и напряжения на бесконечности должны удовлетворять условиям контакта (2.6) и (2.7), или (3.2) и (3.4). Переходя в (3.2) и (3.4) к пределу при $x_1^0 \rightarrow \infty$, при учете (3.11) получим соответственно

$$(\sigma_{12}^{01\infty} + i\sigma_{22}^{01\infty}) e^{i\omega_1^\infty} = (\sigma_{12}^{02\infty} + i\sigma_{22}^{02\infty}) e^{i\omega_2^\infty} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} (1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2)(\sigma_{11}^{02\infty} - \sigma_{22}^{02\infty} + i\sigma_{12}^{02\infty}) e^{i(\omega_2^\infty - \omega_1^\infty)} = \\ = (1/\sigma_1^* + 1/\alpha_1)(\sigma_{11}^{01\infty} + \sigma_{22}^{01\infty}) - 2(1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2)(\sigma_{22}^{01\infty} - i\sigma_{12}^{01\infty}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Соотношения (3.13) и (3.14) устанавливают связь между напряжениями, приложенными к нижней и верхней полуплоскостям на бесконечности. В частности, при

$$\sigma_{12}^{0k\infty} = \sigma_{22}^{0k\infty} = 0 \quad (k=1,2) \quad (3.15)$$

из (3.14) следует

$$\omega_1^\infty = \omega_2^\infty, \quad (1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2)\sigma_{11}^{02\infty} = (1/\sigma_1^* + 1/\alpha_1)\sigma_{11}^{01\infty} \quad (3.16)$$

Напряженное состояние, определяемое равенствами (3.15), (3.16), характерно тем, что появление трещины между двумя средами не оказывает на него никакого влияния. В этом вырожденном случае комплексные потенциалы Φ_k и Ψ_k имеют постоянные значения

$$\Phi_k = \frac{1/\sigma_1^* + 1/\alpha_1}{1/\sigma_k^* + 1/\alpha_k} H, \quad \Psi_k = \frac{\sigma_k^*}{\alpha_k^*} \bar{\Phi}_k \quad (\zeta \in S_k) \quad (3.17)$$

$$H = [\sigma_{11}^{01\infty} / (2\sigma_1^*)] e^{i\omega_1^\infty}$$

С другой стороны, при $\omega_1^\infty = \omega_2^\infty$ имеем

$$\sigma_{22}^{0k\infty} = \sigma_{22}^{0\infty}, \quad \sigma_{12}^{0k\infty} = \begin{cases} \sigma_{12}^{0\infty}, & \alpha_1 = \alpha_2 \\ 0, & \alpha_1 \neq \alpha_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$(1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2)\sigma_{11}^{02\infty} = (1/\sigma_1^* + 1/\alpha_1)\sigma_{11}^{01\infty} + (1/\sigma_1^* - 1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2 - 1/\alpha_1)\sigma_{22}^{0\infty}$$

Кроме того, при действии в S_1 вдали от трещины предварительного всестороннего растяжения $\sigma_{11}^{01\infty} = \sigma_{22}^{01\infty} = \sigma_1^*$, $\sigma_{12}^{01\infty} = 0$ и при $\sigma_{12}^{02\infty} = 0$ из (3.13) находим $\omega_2^\infty = \omega_1^\infty$, $\sigma_{22}^{02\infty} = \sigma_1^*$. Тогда из (3.14) следует

$$\sigma_{11}^{02\infty} = \sigma_1^* + \frac{2(\sigma_2^* - \sigma_1^*)}{\sigma_2^*(1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2)} \quad (3.19)$$

Из (3.19) видим, что только при $\sigma_2^* = \sigma_1^*$ в обеих средах вдали от трещины может быть реализовано предварительное всестороннее растяжение σ_1^* , т.е. исходное недеформированное состояние.

При отсутствии трещины, т.е. в случае сплошного контакта двух различных сред, из (2.1), (3.7) и (3.8), очевидно, следует

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1^-, \quad \Psi_1 = (\sigma_1^*/\alpha_1)\bar{a}_1^+ \quad (\zeta \in S_1) \\ \Phi_2 &= a_2^+, \quad \Psi_2 = (\sigma_2^*/\alpha_2)\bar{a}_2^- \quad (\zeta \in S_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

При этом напряженное состояние в каждой среде постоянно и совпадает с напряженным состоянием на бесконечности. Однако, если при действии всестороннего растяжения $\sigma_{11}^{01} = \sigma_{22}^{01} = \sigma_1^*$ в S_1 деформации отсутствуют, то среда S_2 испытывает в этом случае ненулевую деформацию при $\sigma_2^* \neq \sigma_1^*$.

Положение точек каждой среды найдем из первого соотношения в (2.5) и (3.12)

$$z_k = \frac{A_k}{2 \operatorname{ch}(\pi \epsilon)} \left[e^y \frac{\zeta^2 - 1}{X(\zeta)} - e^{-y} \frac{\sigma_k^* \bar{\zeta}^2 - 1}{\alpha_k X(\bar{\zeta})} \right] + \frac{B_k}{2 \operatorname{ch}(\pi \epsilon)} \left[\zeta + \frac{\sigma_k^* \bar{\zeta}}{\alpha_k} \right], \quad \zeta \in S_k \quad (3.21)$$

Деформацию поверхности трещины получим из (3.21) при $\zeta = x_1^0$, $|x_1^0| \leq 1$.

$$z_k(x_1^0) = \frac{\sigma_k^*(1/\sigma_k^* + 1/\alpha_k)}{2 \operatorname{ch}(\pi \epsilon)} \left\{ B_k x_1^0 + i(-1)^k A_k \sqrt{1 - (x_1^0)^2} \left(\frac{1 + x_1^0}{1 - x_1^0} \right)^{i\epsilon} \right\} \quad (3.22)$$

Из (3.22) видно, что даже в простейшем случае растяжения на бесконечности $\sigma_{jj}^{0k\infty} = \sigma^*$, $\sigma_{12}^{0k\infty} = \omega_k^\infty = 0$ ($j, k = 1, 2$) при $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma^*$ поверхности трещин проникают друг в друга вблизи вершин. Действительно, в этом случае $A_k = 1$, $B_k = e^{\pi \epsilon (2k - 3)}$ и

$$z_k(x_1^0) = \frac{\sigma^*(1/\sigma^* + 1/\alpha_k)}{2 \operatorname{ch}(\pi \epsilon)} \left\{ x_1^0 e^{-y} - (-1)^k \sqrt{1 - (x_1^0)^2} \left[\sin \left(\epsilon \ln \frac{1 + x_1^0}{1 - x_1^0} \right) - i \cos \left(\epsilon \ln \frac{1 + x_1^0}{1 - x_1^0} \right) \right] \right\} \quad (3.23)$$

При приближении к правой вершине ($x_1^0 \rightarrow 1$) первые точки поверхностей трещины,

соответствующие максимальному "перехлесту", имеют координату $x_1^0 = \text{th}(\frac{1}{2}\pi/\epsilon)$.
При этом

$$x_1^k = \frac{\sigma^*(1/\sigma^* + 1/\alpha_k)e^{-y}}{2 \text{ch}(\pi\epsilon) \text{cth}(\frac{1}{2}\pi/\epsilon)} \quad (3.24)$$

$$x_2^k = (-1)^{k+1} = \frac{\sigma^*(1/\sigma^* + 1/\alpha_k)}{2 \text{ch}(\pi\epsilon) \text{ch}(\frac{1}{2}\pi/\epsilon)}$$

Хотя перемещения этих точек вдоль L_1 не совпадают ($x_1^1 \neq x_1^2$), однако можно показать, что в общем случае при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ это не исключает взаимного проникания поверхностей трещины. С другой стороны, при $1/\sigma_1^* + 1/\alpha_2 = 1/\sigma_2^* + 1/\alpha_1$ осцилляция перемещений отсутствует.

Используя соотношения (2.5) и (3.12), можно определить также напряженное состояние в любой точке каждой среды. Так, в окрестности правого конца трещины ($x_1^0 = 1$) имеем асимптотики для сжимаемых материалов обеих сред

$$\frac{\partial z_k}{\partial \zeta} = \Phi_k(\zeta) \sim \frac{r^{0-i\epsilon}}{2\sigma_k^* \sqrt{2\pi r^0}} K f_k e^{-i\varphi^0/2}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial \bar{\zeta}} = \bar{\Psi}_k(\zeta) \sim -\frac{r^{0-i\epsilon}}{2\alpha_k \sqrt{2\pi r^0}} K f_k^{-1} e^{i\varphi^0/2}$$

$$f_k = \exp[\pi\epsilon(3-2k) + \epsilon\varphi^0], \quad k=1,2$$

$$K = K_1 - iK_2 = 2\sqrt{2\pi} e^{-\pi\epsilon} \lim_{\zeta \rightarrow 1} (\zeta - 1)^{1/2+i\epsilon} \Phi_k(\zeta) = \frac{(1-i2\epsilon)\sqrt{\pi} e^{i\epsilon \ln 2}}{\text{ch}(\pi\epsilon)} (\sigma_{22}^{0k\infty} - i\sigma_{12}^{0k\infty}) e^{i\omega_k^0}$$

При этом

$$\Sigma_1^{0k} \sim \frac{|K|}{\sqrt{2\pi r^0}} f_k, \quad \Sigma_2^{0k} \sim -\frac{|K|}{\sqrt{2\pi r^0}} f_k^{-1} e^{i\varphi^0} \quad (3.25)$$

$$\Delta_k \sim \frac{|K|^2}{4\sigma_k^{*2} (2\pi r^0)} \left[f_k^2 - \left(\frac{\sigma_k^*}{\alpha_k f_k} \right)^2 \right]$$

Тогда

$$\frac{\lambda \Sigma_1^k}{\sigma_k^*} \sim 2 \frac{f_k^4 + \sigma_k^*/\alpha_k}{\Psi}$$

$$\frac{\lambda \Sigma_2^k}{\sigma_k^*} \sim \frac{2K(1 + \sigma_k^*/\alpha_k) f_k^2}{\bar{K}\Psi} r^{0-i2\epsilon} \quad (3.26)$$

$$\Psi = f_k^4 - (\sigma_k^*/\alpha_k)^2$$

Полученные асимптотические зависимости показывают, что в условиях плоской деформации ($\lambda = \text{const}$) сжимаемых материалов истинные напряжения в окрестности вершины трещины ограничены и имеют колебательный характер, определяемый множителем $r^{0-i2\epsilon}$. В то же время условные напряжения имеют такую же особенность

$r^{0-1/2}$, как и напряжения в линейно-упругой задаче, однако, в отличие от последних они не осциллируют при $r^0 \rightarrow 0$. При переходе к полярной системе координат r^0, φ^0 (фиг. 1)

из (3.26) и равенств

$$\sigma_{r_0 r_0}^0 + \sigma_{\varphi_0 \varphi_0}^0 = \Sigma_1^0, \quad \sigma_{r_0 r_0}^0 - \sigma_{\varphi_0 \varphi_0}^0 + i2\sigma_{r_0 \varphi_0}^0 = \Sigma_2^0 e^{-i2\varphi^0}$$

получим для условных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{r_0 r_0}^{0k} &\sim \frac{|K|}{2\sqrt{2\pi r^0}} (f_k - f_k^{-1} \cos \varphi^0) \\ \sigma_{\varphi_0 \varphi_0}^{0k} &\sim \frac{|K|}{2\sqrt{2\pi r^0}} (f_k + f_k^{-1} \cos \varphi^0) \\ \sigma_{r_0 \varphi_0}^{0k} &\sim \frac{|K|}{2\sqrt{2\pi r^0}} f_k^{-1} \sin \varphi^0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Исходя из асимптотических представлений величин $\partial z_k / \partial \zeta$ и $\partial z_k / \partial \bar{\zeta}$, согласно [13] находим также значение интеграла Райса–Черепанова

$$J = \frac{1}{8} |K|^2 (1/\sigma_1^* + 1/\alpha_1 + 1/\sigma_2^* + 1/\alpha_2)$$

4. Решение линейной задачи. Рассмотрим решение плоской задачи линейной теории упругости для трещины, расположенной на границе контакта двух сред, отвечающих при малых деформациях и углах поворота закону Гука (1.1). Считаем, что величина предварительного всестороннего растяжения в каждой среде равна σ_k^r и является независимым параметром. В силу малости деформаций и углов поворота индекс 0 всюду опускаем.

Согласно [13, 14] выражения для напряжений и перемещений в среде S_k при учете обозначений (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \Sigma_1^k + i \frac{4\alpha_k^v}{\kappa_k^v + 1} \omega_k &= 4\Phi_k(\zeta) + 2\sigma_k^r \\ (\Sigma_1^k - \Sigma_2^k) / 2 &= \Phi_k(\zeta) - \Phi_k(\bar{\zeta}) + (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi_k'(\zeta)} + \sigma_k^r \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\alpha_k^v (u_1^k + iu_2^k) = \kappa_k^v \int \Phi_k(\zeta) d\zeta + \int \Phi_k(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi_k(\zeta)} \quad (4.2)$$

где u_j^k – компонента вектора перемещения точек среды S_k вдоль оси x_j , $\kappa_k^v = 1 + 2\alpha_k^v / \sigma_k^v$ при плоской деформации и $\kappa_k^v = (5/\alpha_k^v + 1/\sigma_k^v) / (3/\alpha_k^v - 1/\sigma_k^v)$ при плоском напряженном состоянии, $j, k = 1, 2$.

Условия (2.6)–(2.8) в данном случае записываются соответственно в виде

$$\Sigma_1^1 - \Sigma_2^1 = \Sigma_1^2 - \Sigma_2^2, \quad \zeta \in L \quad (4.3)$$

$$u_{1,1}^1 + iu_{2,1}^1 = u_{1,1}^2 + iu_{2,1}^2, \quad \zeta \in L_2 \quad (4.4)$$

$$\Sigma_1^k - \Sigma_2^k = 0, \quad \zeta \in L_1, \quad (k=1,2) \quad (4.5)$$

Из (4.1) и (4.3) следует

$$[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^+ - [\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^- = \sigma_1^r - \sigma_2^r, \quad \zeta \in L \quad (4.6)$$

Это значит, что

$$\Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta) = \begin{cases} a_1^+ + a_2^+, & \zeta \in S_1 \\ a_1^- + a_2^-, & \zeta \in S_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$a_1^- - a_1^+ + \sigma_1^r = a_2^+ - a_2^- + \sigma_2^r \quad (4.8)$$

Согласно (4.1) и (4.8) имеем

$$\sigma_{22}^{1\infty} - i\sigma_{12}^{1\infty} = \sigma_{22}^{2\infty} - i\sigma_{12}^{2\infty} \equiv \sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty} \quad (4.9)$$

$$\frac{\sigma_{11}^{k\infty} + \sigma_{22}^{\infty} - 2\sigma_k^r}{4} + i \frac{\omega_k^{\infty}}{\kappa_k^v / \alpha_k^v + 1 / \alpha_k^v} = \begin{cases} a_1^-, & k=1 \\ a_2^+, & k=2 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$a_1^- - a_2^+ + \sigma_1^r = \sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}$$

Здесь уместно отметить, что решение задачи в линейной постановке требует непрерывности напряжений σ_{22} и σ_{12} на участке контакта двух сред и в том числе на бесконечности, в то время как в нелинейной задаче условные напряжения σ_{22}^0 и σ_{12}^0 разрывны при $\omega_1^{\infty} \neq \omega_2^{\infty}$ (достаточно сравнить (3.13) и (4.9)).

При учете равенств (4.7) условия (4.4) и (4.5) преобразуем соответственно к граничным условиям для одной функции $\Phi_1(\zeta)$

$$\Phi_1^+(t) + \eta \Phi_1^-(t) = M, \quad \zeta \in L_2 \quad (4.11)$$

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \sigma_1^r, \quad \zeta \in L_1 \quad (4.12)$$

$$\eta = (\kappa_1^v / \alpha_1^v + 1 / \alpha_2^v) / (\kappa_2^v / \alpha_2^v + 1 / \alpha_1^v)$$

$$M = \frac{1 / \alpha_2^v}{\kappa_2^v / \alpha_2^v + 1 / \alpha_1^v} [\kappa_2^v (a_1^+ + a_2^+) + a_1^- + a_2^-]$$

Для функции $F(\zeta)$, определяемой соотношениями (3.6) (при замене β на η), из (4.11) и (4.12) также получаем неоднородную краевую задачу Гильберта, решение которой имеет вид

$$F(\zeta) = \frac{(a_1^+ - a_1^- - \sigma_1^r) e^{\pi \varepsilon_e}}{2 \operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e)} \left[1 - \frac{\zeta - i2\varepsilon_e}{Y(\zeta)} \right] \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_e = -\frac{\ln \eta}{2\pi}, \quad Y(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right)^{i\varepsilon_e}$$

Далее на основании (3.6) и (4.7)

$$\Phi_k(\zeta) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e)} \left[B_k + \delta D e^{\delta y_e} \frac{\zeta - i2\varepsilon_e}{Y(\zeta)} \right] + \frac{1}{2} (1 - \delta) \sigma_k^r \quad (4.14)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \zeta \in S_k \\ -1, & \bar{\zeta} \in S_k \end{cases}, \quad y_e = \pi \varepsilon_e (3 - 2k), \quad k = 1, 2$$

$$B_k = \frac{\operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e) \sigma_{11}^{k\infty} + \{\operatorname{sh} y_e - e^{y_e}\} \sigma_{22}^{\infty}}{2} - \operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e) \sigma_k^r + i \left[e^{y_e} \sigma_{12}^{\infty} + \frac{2 \operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e)}{\kappa_k^v / \alpha_k^v + 1 / \alpha_k^v} \omega_k^{\infty} \right]$$

$$D = \sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}$$

Полагая в (4.11) $x_1 \rightarrow \infty$ и разделяя вещественные и мнимые части, с учетом (4.9) и

(4.10) получим соотношения, аналогичные равенству (3.14) в нелинейной задаче,

$$\sigma_{11}^{2\infty} - 2 \frac{\kappa_2^v - 1}{\kappa_2^v + 1} \sigma_2^r = \mu \left(\sigma_{11}^{1\infty} - 2 \frac{\kappa_1^v - 1}{\kappa_1^v + 1} \sigma_1^r \right) + \frac{3 + \mu - (3\mu + 1)e^{2\pi\epsilon_e}}{2\text{ch}(\pi\epsilon_e)e^{\pi\epsilon_e}} \sigma_{22}^{\infty} \quad (4.15)$$

$$\omega_2^{\infty} - \omega_1^{\infty} = \frac{\alpha_2^v - \alpha_1^v}{\alpha_1^v \alpha_2^v} \sigma_{12}^{\infty} \quad (4.16)$$

$$\mu = (\kappa_1^v / \alpha_1^v + 1 / \alpha_1^v) / (\kappa_2^v / \alpha_2^v + 1 / \alpha_2^v)$$

Из (4.14)–(4.16) находим напряжения, при которых трещина не раскрывается

$$\sigma_{12}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = 0 \quad (4.17)$$

$$\sigma_{11}^{2\infty} - 2 \frac{\kappa_2^v - 1}{\kappa_2^v + 1} \sigma_2^r = \mu \left(\sigma_{11}^{1\infty} - 2 \frac{\kappa_1^v - 1}{\kappa_1^v + 1} \sigma_1^r \right)$$

В этом вырожденном случае Φ_k имеют следующие постоянные значения:

$$\Phi_1 = \frac{\sigma_{11}^{1\infty} - 2\sigma_1^r}{4} + i \frac{\omega_1^{\infty}}{\kappa_1^v / \alpha_1^v + 1 / \alpha_1^v} + \frac{1}{2}(1 - \delta)\sigma_1^r \quad (4.18)$$

$$\Phi_2 = \mu\Phi_1 + \frac{\sigma_1^r / \alpha_1^v - \sigma_2^r / \alpha_2^v}{\kappa_2^v / \alpha_2^v + 1 / \alpha_2^v} + \frac{1}{2}(1 - \delta)\sigma_2^r - \frac{\mu}{2}(1 + \delta)\sigma_1^r$$

Необходимо отметить, что при $\sigma_k^r = 0$ ($k = 1, 2$) соотношения (4.14)–(4.18) совпадают с соответствующими выражениями, полученными в [6].

Пусть в S_1 на бесконечности действует предварительное всестороннее растяжение $\sigma_{11}^{1\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = \sigma_1^r$, $\sigma_{12}^{\infty} = 0$. Тогда из (4.15) находим

$$\sigma_{11}^{2\infty} = \sigma_1^r + 2 \frac{\kappa_2^v - 1}{\kappa_2^v + 1} (\sigma_2^r - \sigma_1^r) \quad (4.19)$$

откуда следует, что, как и в нелинейной задаче, предварительное всестороннее растяжение, соответствующее нулевой деформации, может быть реализовано вдали от трещины одновременно в S_1 и S_2 только при $\sigma_2^r = \sigma_1^r$.

В случае сплошного контакта двух сред напряженное состояние в каждой среде совпадает с соответствующим напряженным состоянием на бесконечности, а функции Φ_k таковы

$$\Phi_1 = a_1^-, \quad \Phi_2 = a_2^+ - \sigma_{22}^{\infty} + i\sigma_{12}^{\infty} + \sigma_2^r \quad (\zeta \in S_1) \quad (4.20)$$

$$\Phi_1 = a_1^- - \sigma_{22}^{\infty} + i\sigma_{12}^{\infty} + \sigma_1^r, \quad \Phi_2 = a_2^+ \quad (\zeta \in S_2)$$

Перемещения точек каждой среды находим из (4.2) при учете (4.14)

$$\alpha_k^v (u_1^k + iu_2^k) = \frac{1}{2\text{ch}(\pi\epsilon_e)} \left\{ D \left[\kappa_k^v e^{y_e} \frac{\zeta^2 - 1}{Y(\zeta)} - e^{-y_e} \frac{\bar{\zeta}^2 - 1}{Y(\bar{\zeta})} \right] + B_k (\kappa_k^v \zeta + \bar{\zeta}) - \right. \quad (4.21)$$

$$\left. - (\zeta - \bar{\zeta}) \left[\bar{B}_k + \bar{D} e^{y_e} \frac{\bar{\zeta} + i2\epsilon_e}{Y(\bar{\zeta})} \right] \right\} + \sigma_k^r \bar{\zeta}, \quad \zeta \in S_k$$

Отсюда следуют выражения для перемещений точек поверхности трещины при $\zeta = x_1, |x_1| < 1$

$$\alpha_k^v [(u_1^k(x_1) + iu_2^k(x_1))] = \frac{\kappa_k^v + 1}{2 \operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e)} \left[B_k x_1 + i(-1)^k D \sqrt{1-x_1^2} \left(\frac{1+x_1}{1-x_1} \right)^{i\varepsilon_e} \right] + \sigma_k^r x_1, \quad k=1,2 \quad (4.22)$$

В окрестности правого конца трещины при $\zeta \rightarrow 1$ из (4.1) и (4.14) имеем асимптотики линейной задачи

$$\begin{aligned} \Phi_k(\zeta) &\sim \frac{r^{-i\varepsilon_e}}{2\sqrt{2\pi r}} \delta K_e g_k e^{-i\varphi/2} \\ \Phi_k'(\zeta) &\sim -\frac{r^{-i\varepsilon_e}}{2\sqrt{2\pi r}} \delta K_e (1+i2\varepsilon_e) g_k e^{-i3\varphi/2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$g_k = \exp[\delta \pi \varepsilon_e (3-2k) + \varepsilon_e \varphi], \quad k=1,2$$

$$K_e = K_{1e} - iK_{2e} = 2\sqrt{2\pi} e^{-\pi \varepsilon_e} \lim_{\zeta \rightarrow 1} (\zeta - 1)^{1/2+i\varepsilon_e} \Phi_k(\zeta) = \frac{(1-i2\varepsilon_e)\sqrt{\pi} e^{i\varepsilon_e \ln 2}}{\operatorname{ch}(\pi \varepsilon_e)} (\sigma_{22}^\infty - i\sigma_{12}^\infty)$$

Тогда для комплексных компонент тензора напряжений получим

$$\begin{aligned} \Sigma_1^k &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} g_k \operatorname{Re}\{K_e r^{-i\varepsilon_e} e^{-i\varphi/2}\} \\ \Sigma_2^k &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} \{K_e g^{-1} r^{-i\varepsilon_e} e^{-i\varphi/2} - \bar{K}_e [1+i(1-i2\varepsilon_e) \sin \varphi e^{i\varphi}] g_k r^{i\varepsilon_e} e^{i\varphi/2}\}, \quad \zeta \in S_k \end{aligned} \quad (4.24)$$

Из (4.24) достаточно просто получить соотношения для компонент напряжений в полярной системе координат. При $\sigma_k^r = 0$ ($k=1,2$) эти зависимости совпадают с хорошо известными асимптотиками линейной задачи [15], поскольку в этом случае постоянные λ_k^v и μ_k^v , через которые выражаются σ_k^v и α_k^v , совпадают с соответствующими параметрами Ламе $\lambda_{(k)}$ и $\mu_{(k)}$. То же можно сказать и относительно интеграла Райса-Черепанова в линейной задаче, для которого при произвольном значении σ_k^r справедливо выражение

$$J_e = \frac{1}{4} |K_e|^2 (1/\sigma_1^v + 1/\sigma_2^v + 1/\alpha_1^v + 1/\alpha_2^v)$$

Следует, однако, отметить, что зависимость асимптотик (4.24) от параметров σ_k^r связана с особенностью именно межфазной трещины. Для трещины в однородной среде ($\varepsilon_e = 0$) соотношения (4.24) не зависят от значения остаточного напряжения σ^r ($\sigma^r = \sigma_1^r = \sigma_2^r$). Тем же свойством обладают, очевидно, и асимптотики нелинейной задачи. Хотя выражения (3.27) получены при конкретных значениях σ_k^r , однако качественно их зависимость от упругих постоянных не отличается от аналогичной зависимости асимптотик линейной задачи (4.24).

Заметим также, что при любых значениях σ_k^r деформации и углы поворота малы в той области, где напряженно-деформированное состояние мало отличается от исходного, т.е. отвечает конфигурации, близкой к отсчетной. Такое состояние достигается, например, вдали от трещины при $\sigma_k^r = \sigma^r$, $\sigma_{jj}^{0k\infty} = \sigma^r$, $\sigma_{12}^{0k\infty} = \omega_k^\infty = 0$ ($k, j=1,2$). При этом, поскольку поверхности трещины свободны от внешней нагрузки, то напряженно-деформированное состояние окрестности середины трещины будет мало отличаться от исходного, если $\sigma^r / \sigma_k^v \ll 1$ ($k=1,2$). В противном случае (тем более при $\sigma_k^r = \sigma_k^v = \sigma_k^*$)

трещина целиком расположена в области больших деформаций и анализ поведения трещины возможен только на основе решения соответствующей нелинейной задачи.

5. Выводы. Решение задачи в нелинейной постановке выявило определенные преимущества условных напряжений перед напряжениями линейной задачи, а также перед истинными напряжениями. Последнее подробно освещено в [13, 16].

Условные напряжения не осциллируют при приближении к концу трещины, что позволяет физически обоснованно использовать их в силовом критерии разрушения. В то же время применение истинных напряжений для предсказания разрушения проблематично ввиду их ограниченности и колебательном характере вблизи вершины трещины.

Существенной особенностью межфазной трещины является то, что коэффициенты интенсивности напряжений K_j (K_{je}) для нее не имеют физического смысла, так как зависят как от нормальных, так и от касательных усилий. Явное преимущество в связи с этим имеют условные напряжения перед напряжениями линейной задачи, поскольку асимптотические формулы для первых (в отличие от асимптотик линейной задачи) содержат тот же обобщенный параметр нагрузки $|K|$, что и интеграл J . Для условных напряжений отсюда, очевидно, следует эквивалентность силового и энергетического критериев разрушения не только при разрушении какого-либо одного типа, но также при смешанном типе разрушения (нормальном отрыве и срезе одновременно).

Условные напряжения и напряжения линейной задачи имеют различные асимптотические зависимости от полярного угла. Это ставит под сомнение результаты, полученные на основе анализа асимптотических зависимостей линейной задачи, если размер области больших упругих деформаций около вершины трещины превышает допустимые линейной механикой разрушения пределы.

Характерной особенностью решений нелинейной и линейной задач является осцилляция перемещений при приближении к концу трещины, и как следствие этого, взаимопenetрация поверхностей трещины. В общем случае параметры осцилляции ϵ и ϵ_c различаются, однако при плоской деформации и одинаковых модулях сдвига ($\alpha_1 = \alpha_2$) обеих сред они равны. В последнем случае некоторые результаты, полученные для линейной задачи, легко переносятся и на нелинейную. В частности, при чистом растяжении учет контакта поверхностей трещины в линейной задаче не приводит к существенным поправкам, и размер зоны контакта практически совпадает с малым размером области, где согласно решениям задач поверхности трещины проникают друг в друга [11]. В то же время при действии касательных напряжений σ_{12}^∞ зона контакта в линейной задаче может быть значительной, и решение с осцилляцией неприемлемо [11, 12]. Тем не менее, как следует из [17, 18], концепция линейной механики разрушения все же может быть применима и при действии напряжений σ_{12}^∞ . При этом зона проникновения поверхностей трещины должна иметь размер $r_c < 0,01$ [17], что для наиболее распространенных на практике композитов с параметрами осцилляции $|\epsilon_c| < 0,15$ [18] приводит к неравенству $|\sigma_{12}^\infty| < 0,84\sigma_{22}^\infty$. Подобный результат можно ожидать и для нелинейной задачи. По крайней мере, при $\epsilon = \epsilon_c$ он очевиден.

В случае значительных размеров области осцилляции необходимо рассмотреть соответствующую нелинейную задачу с учетом контакта поверхностей трещины. При отсутствии ограничений на величину упругой деформации ее решение будет свободно от противоречий, характерных аналогичному решению линейной задачи.

Автор благодарит К.Ф. Черныха, предложившего тему данного исследования и давшего ряд полезных советов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16511).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
2. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1959. V. 49. N. 2. P. 199–204.
3. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 131–137.
4. England A.H. A crack between dissimilar media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. N. 2 P. 400–402.
5. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. N. 2. P. 403–410.
6. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. N. 2. P. 418–423.
7. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. N. 4. P. 631–636.
8. Comninou M. Interface crack with friction in contact zone // Trans. ASME. Ser. E. 1977. V. 44. N. 4. P. 780–781.
9. Comninou M. The interface crack in a shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. N. 2. P. 287–290.
10. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. N. 2. P. 345–348.
11. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитн. материалов. 1979. № 3. С. 387–396.
12. Симонов И.В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитн. материалов. 1985. № 6. С. 969–976.
13. Черных К.Ф. Нелинейная плоская теория упругости и ее применение к физически и геометрически нелинейной механике трещин // Успехи механики. 1989. Т. 12. Вып. 4. С. 51–75.
14. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
15. Sih G.C., Chen E.P. Cracks in composite materials // Mechanics of fracture / G.C. Sih, ed. Hague: Martinus Nijhoff Publ. 1981. V. 6. P. 15–81.
16. Новожилов В.В., Черных К.Ф. Об "истинных" мерах напряжений и деформации в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.
17. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. N. 1. P. 98–103.
18. Hutchinson J.W., Mear M., Rice J.R. Crack paralleling an interface between dissimilar materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. N. 4. P. 828–832.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
30.IX.1992