УДК 539.375

© 1994 г. Н.Г. Моисеев, Г.Я. Попов

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ, КРАЯ КОТОРОЙ КАСАЮТСЯ ПЛОСКОСТЕЙ СМЕНЫ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ

Рассматривается антиплоская задача о трещине, края которой касаются плоскостей смены упругих постоянных. Существенной особенностью исследуемой задачи является то, что она приводится к сингулярному интегральному уравнению, ядро которого содержит помимо традиционной подвижной особенности ядра Коши еще и две неподвижные. Предлагается эффективный приближенный метод решения уравнений указанного типа, основанный на построении замкнутого решения некоторого уравнения частного вида. Метод решения интегральных уравнений в случае одной неподвижной особенности представлен в [1].

1. Постановка задачи и сведение ее к уравнению с двумя неподвижными особенностями. Рассмотрим антиплоскую задачу о концентрации напряжений возле трещины $0<x<1$, $y=0$, $-\infty<z<+\infty$ в составном упругом пространстве $-\infty<x,y,z<+\infty$, состоящем из полностью сцепленных между собой полупространства $x<0$, слоя $0<x<1$ и полупространства $x>1$ (G_1, G_2, G_3 – их модули сдвига соответственно). Не ограничивая общности, считаем, что сдвигающая нагрузка приложена непосредственно к берегам трещины, т.е. $\tau_{yz}(x,\pm 0)=-f(x)$, $0<x<1$. Математически задача формулируется в виде следующей смешанной краевой задачи относительно функции сдвига $w(x,y)$:

$$\Delta w(x,y)=0,\quad 0<y<+\infty,\quad -\infty<x<+\infty,\quad x\neq 0,\quad x\neq 1$$

$$G_1 w_x'(-0,y)=G_2 w_x'(+0,y),\quad 0<y<+\infty$$

$$G_2 w_x'(1-0,y)=G_3 w_x'(1+0,y),\quad 0<y<+\infty$$

$$w(-0,y)=w(+0,y),\quad w(1-0,y)=w(1+0,y),\quad 0<y<+\infty$$

$$w(x,+0)=0,\quad -\infty<x<0,\quad 1<x<+\infty$$

$$G_2 w_y'(x,+0)=-f(x),\quad 0<x<1 \tag{1.1}$$

Для решения задачи (1.1) используем обобщенную схему метода интегральных преобразований [2]. Обозначим $w(x,+0)=G_2^{-1}\varphi(x)$, $0<x<1$ и применим к задаче (1.1) синус-преобразование Фурье

$$w_\alpha(x)=\int_0^\infty \sin\alpha y\, w(x,y)\,dy$$

что приводит к следующей одномерной задаче:

$$w_\alpha''(x)-\alpha^2 w_\alpha(x)=-\alpha G_2^{-1}\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty,\quad x\neq 0,\quad x\neq 1$$

$$(\varphi(x)=0,\quad -\infty<x<0,\quad 1<x<+\infty)$$

$$w_\alpha(-0)=w_\alpha(+0),\quad w_\alpha(1-0)=w_\alpha(1+0) \tag{1.2}$$

$$G_1 w_\alpha'(-0)=G_2 w_\alpha'(+0),\quad G_2 w_\alpha'(1-0)=G_3 w_\alpha'(1+0)$$

Используя схему решения [2] разрывных одномерных краевых задач, находим что при $0<x,\ \ \xi<1$ функция Грина задачи (1.2) представима в виде

$$(-2\alpha)G_\alpha(x,\xi)=e^{-\alpha|x-\xi|}+\Delta_\alpha^{-1}\left(e^{-\alpha(x+\xi)}\cos\pi\alpha_0+e^{-\alpha(2-x-\xi)}\cos\pi\alpha_1+2qe^{-2\alpha}\operatorname{ch}\alpha(x-\xi)\right)$$

$$\Delta_\alpha=1-qe^{-2\alpha},\quad q=\cos\pi\alpha_0\cos\pi\alpha_1 \tag{1.3}$$

$$(G_1+G_2)\cos\pi\alpha_0=G_1-G_2,\quad (G_3+G_2)\cos\pi\alpha_1=G_3-G_2$$

Таким образом, находим

$$G_2 w_\alpha(x)=-\alpha\int_0^1 G_\alpha(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\quad 0<x<1$$

Обращая синус-преобразование Фурье и суммируя слабо сходящиеся интегралы с учетом разложения

$$\Delta_\alpha^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}q^k e^{-2k\alpha}$$

находим $w(x,y)$. Реализуя краевое условие $G_2 w_y'(x,+0)=-f(x)$, приходим к следующему интегральному уравнению относительно неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$L\varphi=-\frac{d}{dx}\int_0^1 L(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=f(x),\quad x\in[0,1]$$

$$\pi L(x,\xi)=\frac{1}{\xi-x}+\frac{\cos\pi\alpha_0}{\xi+x}+\frac{\cos\pi\alpha_1}{\xi+x-2}+R_L(x,\xi) \tag{1.4}$$

$$R_L(x,\xi)=\cos\pi\alpha_0 F(x+\xi)-\cos\pi\alpha_1 F(2-x-\xi)+q\Big[2(x-\xi)\left(4-(x-\xi)^2\right)^{-1}+$$

$$+F(2-x+\xi)-F(2-\xi+x)\Big]$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k(x+2k)^{-1} \tag{1.5}$$

Цель дальнейших построений – разработка эффективного приближенного метода решений уравнений типа (1.4) при $R_L(x,\xi)\in C^{(\infty)}([0,1]^2)$. В разбираемом конкретном случае (1.5) $R_L(x,\xi)$ не только бесконечно дифференцируема, но даже аналитична. Предлагаемый метод существенно основан на предварительном получении точного решения для одного частного случая уравнения (1.4), а именно, сначала будет построено решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 L_0(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=f(x),\quad x\in[0,1]$$

$$\pi L_0(x,\xi)=\frac{1}{\xi-x}+\frac{\cos\pi\alpha_0}{\xi+x}+\frac{\cos\pi\alpha_1}{\xi+x-2}+R_0(x,\xi) \tag{1.6}$$

со специально подобранной регулярной частью $R_0(x,\xi)\in C^{(\infty)}([0,1]^2)$, а затем решение уравнения (1.4) при $R_L(x,\xi)=R_0(x,\xi)$.

2. Построение точного решения интегрального уравнения с двумя неподвижными

особенностями. Построение точного решения будет базироваться на подборе и решении двойственных друг другу задач Римана–Гильберта [3] для полуокружности.

Пусть $D = \{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Gamma = \{t\colon |t| = 1,\ 0 \leqslant \arg t \leqslant \pi\}$. Через $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ обозначим пару аналитических в области D функций, удовлетворяющих на границе области краевым условиям:

$$\operatorname{Re}[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] = \operatorname{Im}[\varphi_2(t) + k(t)\varphi_1(t)] = 0, \quad -1 < t < 1$$

$$k(t) = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right), \quad -j < t < 1 - j, \quad j = 0,1 \tag{2.1}$$

$$(0 < \alpha_j < 1,\ j = 0,1), \quad \operatorname{Re}\varphi_1(t) = 0, \ t \in \Gamma$$

Пусть $z \to \pm 1$ функции $\varphi_j(z)$ $(j = 1, 2)$ ограничены, а при $z \to 0$ для каждого $\varepsilon > 0$ имеем $|z|^\varepsilon \varphi_j(z) \to 0$ $(j = 1, 2)$.

Обозначим

$$\operatorname{Re} \varphi_2(t) = u(t), \quad t \in \Gamma \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Im} \varphi_2(t) = -\upsilon(t), \quad t \in \Gamma \tag{2.3}$$

Считая функцию $u(t)$ известной, а $\upsilon(t)$ – неизвестной, а затем, наоборот, приходим к двойственным друг другу задачам Римана–Гильберта [3] (2.1), (2.2) и (2.1), (2.3). Относительно функций $u(t)$, $\upsilon(t)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условию Гельдера на Γ ($u,\ \upsilon \in H$) [3], причем $u(1) = u(-1) = 0$.

Рассмотрим сперва задачу (2.1), (2.2). Введем обозначения

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_0 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \Omega(z) = \begin{Vmatrix} \varphi_2(z) \\ \varphi_1(z) \end{Vmatrix}, \quad z \in D \tag{2.4}$$

$$N_0(t) = I + n_0(t)A_0, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$n_0(t) = \cos\pi\alpha_0, \quad 0 < t < +\infty; \quad n_0(t) = \cos\pi\alpha_1, \quad -\infty < t < 0$$

Последовательным доопределением $\Omega(z)$ по симметрии $\Omega(z) = -\overline{\Omega(\bar{z}^{-1})}$, $|z| > 1$ и $\Omega(z) = E\overline{\Omega(\bar{z})}$, $\operatorname{Im} z < 0$ приходим к краевой задаче Римана относительно $\Omega(z)$, решение которой сводится к факторизации ее матричного коэффициента $N_0(t)$ на вещественной оси ($N_0(t) = I$ при $|t| = 1$)

$$N_0(t) = N^+(t)[N^-(t)]^{-1}, \quad -\infty < t < +\infty \tag{2.5}$$

Факторизация (2.5) строится следующим образом [4]

$$N(z) = I + \gamma(z)A_0, \quad \gamma(z) = l(z)\cos\pi\alpha_1 - l(-z)\cos\pi\alpha_0$$

$$2\pi i l(z) = \ln z, \quad -\pi < \arg z < \pi \tag{2.6}$$

Решив упомянутую выше задачу Римана с учетом условий симметрии для $\Omega(z)$, находим, что общее решение задачи Римана–Гильберта (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \varphi_2(z) \\ \varphi_1(z) \end{Vmatrix} = ia \begin{Vmatrix} 1 + 2\gamma(z) \\ -1 + 2\gamma(z) \end{Vmatrix} + \Omega_0(z) \tag{2.7}$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W(z,\tau)u(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$W(z,\tau) = \left\{\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + [\gamma(z) - \gamma(\tau)]\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right\}\frac{\tau + z}{\tau - z} + \left\{\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} - [\gamma(z) + \gamma(\tau)]\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right\}\frac{1 + \tau z}{1 - \tau z} \tag{2.8}$$

где a – произвольная вещественная постоянная. Из (2.7), (2.8) находим, что при $t \in \Gamma$

$$\operatorname{Im}\varphi_2(t) = a[1+2\gamma(t)] - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega(t,\tau)u(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\omega(t,\tau) = [1+\gamma(t)-\gamma(\tau)]\frac{\tau+t}{\tau-1} - [\gamma(t)+\gamma(\tau)]\frac{1+\tau t}{1-\tau t} \tag{2.9}$$

Ядро $L_0(x, \xi)$, определенное соотношение

$$2L_0(x,\xi) = i\omega(\exp(i\pi x),\ \ \exp(i\pi\xi)) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(\xi-x)\right)[1+{}^1\!/_2(\cos\pi\alpha_0-\cos\pi\alpha_1)(\xi-x)]+$$

$$+{}^1\!/_2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(\xi+x)\right)[(\xi+x)\cos\pi\alpha_1+(2-\xi-x)\cos\pi\alpha_0] \tag{2.10}$$

представимо в виде (1.6) при

$$\pi^{-1}R_0(x,\xi) = h_0(\xi-x)+h_1(\xi+x)\cos\pi\alpha_0 - h_1(2-\xi-x)\cos\pi\alpha_1$$

$$h_0(z) = \pi^{-1}q_0 + {}^1\!/_2(1+q_0 z)\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2} - \frac{2}{\pi z}\right), \tag{2.11}$$

$$2q_0 = \cos\pi\alpha_0 - \cos\pi\alpha_1,\quad 4h_1(z) = (2-z)\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2} - 2\left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-1}$$

причем функция $h_j(z)$ аналитична в полосе $-2 < \operatorname{Re} z < 2j+2$, $j = 0, 1$.

Таким образом, решение уравнения (1.6) при $L_0(x, \xi)$ из (2.10) эквивалентно следующему интегральному уравнению с ядром (2.9):

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega(t,\tau)u(\tau)\tau^{-1}d\tau = \upsilon(t),\quad t\in\Gamma \tag{2.12}$$

при $\varphi(x) = u(\exp(i\pi x))$, $f(x) = \upsilon(\exp(i\pi x))$.

Теорема 1. Пусть функция $u(t)$, $t \in \Gamma$ – решение интегрального уравнения (2.12). Тогда комплексный потенциал $\Omega_0(z)$ (2.8) определяет по формуле

$$\begin{Vmatrix}\varphi_2(z)\\ \varphi_1(z)\end{Vmatrix} = \Omega_0(z),\quad z\in D$$

решение краевой задачи (2.1), (2.3), удовлетворяющее условию

$$\|1,-1\|\lim_{z\to 0} N^{-1}(z)\begin{Vmatrix}\varphi_2(z)\\ \varphi_1(z)\end{Vmatrix} = 0 \tag{2.13}$$

причем $u(t) = \operatorname{Re}\varphi_2(t)$, $t \in \Gamma$.

Пусть функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ образуют решение краевой задачи (2.1), (2.3), удовлетворяющее условию (2.13). Тогда $u(t) = \operatorname{Re}\varphi_2(t)$, $t \in \Gamma$ – решение интегрального уравнения (2.12).

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы без условия (2.13) уже доказана. Условие (2.13) для потенциала $\Omega_0(z)$ (2.8) проверяется непосредственно.

Докажем вторую часть теоремы. Для этого интеграл в левой части (2.12) представим следующим образом: $-\operatorname{Im}[\|1,0\|\Omega_0(t)] = (2i)^{-1}\|1,0\|[\Omega_0^+(t)+\Omega_0^-(t)]$, $t\in\Gamma$, где $\Omega_0(z)$ – потенциал (2.8). Пусть $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ – решение задачи (2.1), (2.3). Вектор $\Omega(z)$

из (2.4) считаем доопределенным на всю комплексную плоскость указанным ранее способом. При этом

$$2u(t) = \|1,0\|[\Omega^+(t) - \Omega^-(t)],\ \ t \in \Gamma$$

что позволяет представить потенциал (2.8) следующим образом:

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i} N(z) \int\limits_{|t|=1} N^{-1}(t)[\Omega^+(t) - \Omega^-(t)] \frac{(t+z)dt}{2t(t-z)}$$

а затем вычислить его с помощью теоремы о вычетах. Окончательно приходим к тому, что разность между левой и правой частями уравнения (2.12) представима в виде $C(1+2\gamma(t))$, $t \in \Gamma$, где чисто мнимая постоянная $2iC$ представляет собой левую часть условия (2.13). Последнее представление доказывает вторую часть теоремы.

Теперь построим решение задачи Римана – Гильберта (2.1), (2.3). Отобразим конформно область D z-плоскости на нижнюю полуплоскость плоскости s ($\operatorname{Im} s < 0$). Это отображение осуществляется следующими функциями:

$$s = s(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2, \quad z = z(s) = \frac{1+s^{1/2}}{1-s^{1/2}} \quad (0 < \arg s < 2\pi)$$

Обозначим

$$\Phi(s) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(z(s)) \\ \varphi_2(z(s)) \end{Vmatrix} \tag{2.14}$$

Доопределяя $\Phi(s)$ по симметрии на верхнюю полуплоскость

$$\Phi(s) = \operatorname{diag}\{-1,1\}\overline{\Phi(\overline{s})}, \quad \operatorname{Im} s > 0 \tag{2.15}$$

приходим к следующей краевой задаче Римана:

$$\begin{gathered} \Phi^+(\sigma) = \Phi^-(\sigma) + 2iv(z(\sigma)) \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad -\infty < \sigma < 0 \\ \Phi^+(\sigma) = G(\sigma)\Phi^-(\sigma), \quad 0 < \sigma < +\infty \\ G(\sigma) = A(1-\alpha_0), \quad 0 < \sigma < 1 \\ G(\sigma) = A(1-\alpha_1), \quad 1 < \sigma < +\infty \\ A(\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos \pi\alpha, & -(1+\cos \pi\alpha) \\ 1-\cos \pi\theta, & \cos \pi\alpha \end{Vmatrix} \end{gathered} \tag{2.16}$$

решение которой ищется в классе функций, ограниченных в окрестности точек $s = 0$, $s = \infty$ и удовлетворяющих условию $\Phi(s)|\,s-1\,|^{\varepsilon} \to 0$ при $s \to 1$ для каждого $\varepsilon > 0$.

Каноническая матрица решений [3] задачи (2.16)

$$G(\sigma) = X^+(\sigma)[X^-(\sigma)]^{-1}, \quad 0 < \sigma < +\infty$$

построена с использованием результатов работы Л.А. Хвощинской[1]

$$X(s) = T(1-\alpha_0)W_0(\alpha_0,\alpha_1;s) \equiv T(1-\alpha_1)W_\infty(\alpha_0,\alpha_1;s)$$

[1] *Хвощинская Л.А.* Однородная краевая задача Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей в случае двух или трех особых точек. Минск, 1981. 48 с. – Деп. в ВИНИТИ. № 5157-81.

$$T(\alpha)=\mathrm{diag}\left\{\cos\frac{\pi\alpha}{2},\ i\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right\}\begin{Vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{Vmatrix}$$

$$W_j(\alpha,\beta;s)=\begin{Vmatrix}w_{1,j}(\alpha,\beta;s) & D_s w_{1,j}(\alpha,\beta;s)\\ w_{2,j}(\alpha,\beta;s) & D_s w_{2,j}(\alpha,\beta;s)\end{Vmatrix},\quad j=0,\infty$$

$$D_s w = s(dw/ds)-(1-s)^{-1}w$$

$$w_{1,0}(\alpha,\beta;s)=-w(-(\alpha,\beta;s),\quad w_{2,0}(\alpha,\beta;s)=w(\alpha,\beta;s)$$

$$w_{1,\infty}(\alpha,\beta;s)=w(\beta,\alpha;s^{-1}),\quad w_{2,\infty}(\alpha,\beta;s)=-w(-\beta,\alpha;s^{-1})$$

$$w(\alpha,\beta;s)=\Gamma(\alpha)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)(-s)^{(1-\alpha)/2}{}_2F_1\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2},\ 1-\frac{\alpha-\beta}{2};\ 1-\alpha;s\right),$$
$$-\pi<\arg(-s)<\pi \qquad (2.17)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Тождество в первом из соотношений (2.17) является следствием из формул аналитического продолжения соответствующих гипергеометрических функций и определяет два различных представления одной и той же матрицы – функции $X(s)$.

Далее понадобятся следующие обозначения:

$$M(s,\sigma)=\pi^{-3}(2+\alpha_0+\alpha_1)^{-1}(\alpha_0-\alpha_1)^{-1}(\cos\pi\alpha_0-\cos\pi\alpha_1)(D_s-D_\sigma)m_1(s)m_0(\sigma) \qquad (2.18)$$

$$m_k(s)=\gamma_k(\alpha_0)[w_{2,0}(\alpha_0,\alpha_1;s)+(-1)^k w_{1,0}(\alpha_0,\alpha_1;s)]\equiv$$

$$\equiv\gamma_k(\alpha_1)[w_{2,\infty}(\alpha_0,\alpha_1;s)+(-1)^k w_{1,\infty}(\alpha_0,\alpha_1;s)]$$

$$\gamma_k(1-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(k-\alpha)\right),\quad k=0,1$$

где D_s – дифференциальный оператор из (2.17).

Частные индексы [3] задачи (2.16) равны нулю. Задача (2.16) имеет единственное решение. Непосредственной проверкой устанавливается, что это решение удовлетворяет условию симметрии (2.15). Реализация условия (2.13) приводит к одному условию разрешимости уравнения (2.12). Окончательный результат сформулируем для эквивалентного уравнению (2.12) уравнения (1.6), (2.10).

Теорема 2. Уравнение (1.6) с ядром $L_0(x,\xi)$ из (2.10) и правой частью $f(x)\in H$ имеет решение в классе H тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие разрешимости

$$\int_0^1 f(x)m_0\left(-\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{2}\right)\sin^{-1}\pi x dx=0. \qquad (2.19)$$

Если условие (2.19) выполнено, то уравнение (1.6), (2.10) в указанном классе имеет единственное решение, которое определяется по формуле

$$\varphi(x)=4\int_0^1 M\left(-\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{2},\ -\mathrm{tg}^2\frac{\pi\xi}{2}\right)\frac{f(\xi)\sin^{-1}\pi\xi d\xi}{\cos\pi\xi-\cos\pi x} \qquad (2.20)$$

причем $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

Пусть $W_p^{(1)}[0,1]$ – пространство абсолютно непрерывных на сегменте [0,1] функций $\varphi(x)$, для которых выполнено $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\varphi'(x)\in L_p(0,1)$ с нормой, равной норме $\varphi'(x)$ в $L_p(0,1)$, $p>1$.

Рассмотрим уравнение

$$L_0\varphi = -\frac{d}{dx}\int_0^1 L_0(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x), \quad x\in[0,1] \tag{2.21}$$

Теорема 3. При $1<p<p'=\min\{\alpha_0^{-1},\alpha_1^{-1}\}$ оператор L_0: $W_p^{(1)}[0,1]\to L_p(0,1)$ ограничен и имеет ограниченный обратный L_0^{-1}: $L_p(0,1)\to W_p^{(1)}[0,1]$.

Для доказательства прежде всего отметим, что условие (2.19) не выполнено при $f(x)\equiv 1$ (интеграл в левой части (2.19) равен $^1/_2\ \pi(\cos(\pi\alpha_0/2)\cos(\pi\alpha_1/2))^{-1}$.

Таким образом, произвольная постоянная, с точностью до которой по правой части (2.21) восстанавливается правая часть уравнения (1.6), однозначно фиксируется условием (2.19). Ограниченность сингулярных интегральных операторов L_0 и L_0^{-1} в указанных пространствах проверяется с помощью соответствующих результатов из [5, 6].

Располагая точным решением уравнения (1.6), (2.10), как будет доказано ниже, можно его ядро взять в качестве характеристического в разбираемом уравнении (1.4). Это является, как увидим, узловым моментом в предлагаемом методе решения этого уравнения. Другой узловой момент – построение эффективных формул обращения оператора L_0, когда правая часть его – многочлен, т.е. построение соотношений типа спектральных в методе ортогональных многочленов [2].

3. Построение эффективного решения характеристического уравнения с правой частью в виде многочлена. Займемся решением уравнения (2.21), правая часть которого – многочлен. Используя формулы из разд. 2, можем выписать решение в виде квадратур. Однако этими формулами не удобно пользоваться при численной реализации. Задача данного раздела – получение представлений такого решения в виде быстро сходящихся рядов.

Рассмотрим системы многочленов $q_n(x)$, $p_n(x)$, $\deg_x p_n=\deg_x q_n=n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ последовательно, начиная с $n=0$, определяемые соотношениями

$$q'_{n+1}(x)=-p_n(x),\quad p'_n(x)=q_{n-1}(x)$$
$$q_0(x)\equiv p_0(x)\equiv 1\quad (q_{-1}(x)\equiv p_{-1}(x)\equiv 0) \tag{3.1}$$

Будем строить функции $\varphi_n(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ как решения уравнений

$$L_0\varphi_n=p_n(x),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.2}$$

Специальный выбор (3.1) многочленов в правой части (3.2) продиктован используемым методом построения функций $\varphi_n(x)$. Отметим, что такой выбор многочленов в правой части (3.2) не ограничивает общности построений, так как решение для произвольного полинома в правой части (3.2) очевидным образом строится в виде соответствующих линейных комбинаций функций $\{\varphi_n(x)\}$.

Способ построения системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ (3.2) основан на последовательном решении следующих краевых задач Римана:

$$\begin{aligned}&\Phi_n^+(\sigma)=\Phi_n^-(\sigma)+2iq_{n+1}(x(\sigma))\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix},\quad -\infty\leqslant\sigma\leqslant 0\\ &\Phi_n^+(\sigma)=G(\sigma)\Phi_n^-(\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant+\infty,\quad n=-1,0,1,\ldots\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_n^+(\sigma)=\Psi_n^-(\sigma)+2ip_n(x(\sigma))\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix},\quad -\infty\leqslant\sigma\leqslant 0\\ &\Psi_n^+(\sigma)=-G(\sigma)\Psi_n^-(\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant+\infty,\quad n=-1,0,1,\ldots\end{aligned} \tag{3.4}$$

в которых

$$i\pi x'(s) = s^{-1/2}(1-s)^{-1}, \quad 0 < \arg s < 2\pi$$

$$x(0) = 0 \ \ (x(\infty) = 1), \quad \Phi_{-2}(s) \equiv \Psi_{-1}(s) \equiv 0$$

Решение задач (3.3), (3.4) ищем в том же классе, что и решение задачи (2.16). Многочлен $q_{n+1}(x)$ однозначно определяется по многочлену $p_n(x)$ первым соотношением из (3.1) и условием (2.19). Решение уравнения (3.2) определяется из решения задачи (3.3) следующим образом:

$$2\varphi_n(x) = \|0,1\| \left(\Phi_n^+\left(-\mathrm{tg}^2 \frac{\pi x}{2}\right) + \Phi_n^-\left(-\mathrm{tg}^2 \frac{\pi x}{2}\right) \right) \tag{3.5}$$

Каноническая факторизация матричного коэффициента задачи (3.4)

$$-G(\sigma) = Y^+(\sigma)[Y^-(\sigma)]^{-1}, \quad 0 < \sigma < +\infty$$

строится так же как и каноническая факторизация $X(\sigma)$ (2.17) коэффициента $G(\sigma)$ и имеет следующий вид

$$Y(s) = \theta(1-\alpha_0)W_0(1-\alpha_0, 1-\alpha_1; s) \equiv \theta(1-\alpha_1)W_\infty(1-\alpha_0, 1-\alpha_1; s) \tag{3.6}$$

$$\theta(\alpha) = \mathrm{diag}\left\{\cos\frac{\pi\alpha}{2}, i\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right\} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

где матрицы-функции $W_j(\alpha, \beta; s)$ $(j = 0,\ j = \infty)$ определены в (2.17). Частные индексы канонической факторизации (3.6) также нулевые.

Решения задач (3.3), (3.4) строятся на взаимной основе следующим образом:

$$\Phi_n^\pm(s) = \int_{s_k}^{s} \left[i\sigma^{-1}X(\sigma)a_n - \Psi_n^\pm(\sigma)x'(\sigma) \right] d\sigma + iq_{n+1}(k) \begin{Vmatrix} t_k \\ \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad k = 0,1;$$

$$ia_n = H_X^{-1}\,\mathrm{diag}\{1,-i\} \left\{ i \begin{Vmatrix} t_1 q_{n+1}(1) - t_0 q_{n+1}(0) \\ 0 \end{Vmatrix} + \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} \left[\Psi_n^+(\sigma) + \Psi_n^-(\sigma) \right] x'(\sigma) d\sigma \right\}$$

$$n = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.7}$$

$$\Psi_n^\pm(s) = \int_{s_k}^{s} \left[i\sigma^{-1}Y(\sigma)b_n + \Phi_{n-2}^\pm(\sigma)x'(\sigma) \right] d\sigma + p_n(k) \begin{Vmatrix} -1 \\ \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad k = 0,1;$$

$$ib_n = H_Y^{-1}\,\mathrm{diag}\{1,-i\} \left\{ i \begin{Vmatrix} p_n(1) - p_n(0) \\ 0 \end{Vmatrix} - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} \left[\Phi_{n-2}^+(\sigma) + \Phi_{n-2}^-(\sigma) \right] x'(\sigma) d\sigma \right\}$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.8}$$

$$\mathrm{diag}\{1,i\} H_{X,Y} = \int_0^{-\infty} X, Y(\sigma)\sigma^{-1} d\sigma$$

$$t_k = \mathrm{tg}^2 \frac{\pi\alpha_k}{2}, \quad k = 0,1; \quad s_0 = 0, \quad s_1 = \infty \tag{3.9}$$

Числовые матрицы H_X, H_Y (3.9) являются невырожденными, так как в противоположном случае соответствующие неоднородные задачи в рассматриваемом классе будут иметь нетривиальные решения.

Для канонических матриц-функций $X(s)$, $Y(s)$ и функций $(-s)^{-1}m_0(s)$, $x'(s)$ имеют место разложения

$$s^{-1}X(s)=\operatorname{diag}\{1,i\}\rho_k'\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j-(1+\varepsilon_r\alpha_k)/2}X_{k,j}^{(r)}$$

$$s^{-1}Y(s)=\operatorname{diag}\{1,i\}\rho_k'\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j+(-1+\varepsilon_r-\varepsilon_r\alpha_k)/2}Y_{k,j}^{(r)}$$

$$(-s)^{-1}m_0(s)=\rho_k'\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j-(1+\varepsilon_r\alpha_k)/2}\mu_{k,j}^{(r)} \tag{3.10}$$

$$x'(s)=\varepsilon_k\rho_k'\rho_k^{-1/2}\sum_{j=0}^{\infty}l_j\rho_k^j,\quad k=0,1;\quad \varepsilon_0=1$$

$$\varepsilon_1=-1,\quad \rho_0=1-\rho_1,\quad \rho_1=(1-s)^{-1},\quad \pi l_j=\left(\tfrac{1}{2}\right)_j(j!)^{-1}$$

которые можно получить с помощью формулы аналитического продолжения гипергеометрической функции Гаусса ([7], формула 9.131(1)). Отметим, что все ряды в (3.10) имеют радиус сходимости, равный единице.

Разложения (3.10) позволяют для $\Phi_n^{\pm}(s)$ и $\Psi_n^{\pm}(s)$ получить следующие представления

$$\Phi_n^{\pm}(s)=\operatorname{diag}\{i,1\}\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j+(1-\varepsilon_r\alpha_k)/2}\lambda_{n,j}^{(k,r)}+i\operatorname{diag}\{1,\pm1\}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j/2}f_{n,j}^{(k)},\quad k=0,1 \tag{3.11}$$

$$\Psi_n^{\pm}(s)=\operatorname{diag}\{i,1\}\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j+(1+\varepsilon_r-\alpha_k\varepsilon_r)/2}æ_{n,j}^{(k,r)}+i\operatorname{diag}\{1,\pm1\}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_k^{j/2}g_{n,j}^{(k)},\quad k=0,1 \tag{3.12}$$

Реализация соотношений (3.7) с помощью (3.11) и (3.12) позволяет получить представления коэффициентов разложений (3.11) через коэффициенты разложения (3.12)

$$f_{n,0}^{(k)}=q_{n+1}(k)\left\|\begin{matrix}t_k\\1\end{matrix}\right\|,\quad \lambda_{n,0}^{(k,0)}=\frac{2}{1-\alpha_k}\operatorname{diag}\{1,-1\}X_{k,0}^{(0)}a_n$$

$$f_{n,2j+1+r}^{(k)}=-\varepsilon_k\big(j(r+1)/2\big)^{-1}\sum_{m=0}^{j}l_{j-m}g_{n,2m+r}^{(k)}$$

$$\nu_{n,j}^{(k,r)}=-\frac{\varepsilon_k}{j+1+\varepsilon_r(1-\alpha_k)/2}\sum_{m=0}^{j}l_{j-m}æ_{n,m}^{(k,r)} \tag{3.13}$$

$$\lambda_{n,j+1-r}^{(k,r)}=\big(j+1+\varepsilon_r(1-\alpha_k)/2\big)^{-1}\operatorname{diag}\{1,-1\}X_{n,j+1-r}^{(r)}a_n+\nu_{n,j}^{(k,r)},$$

$$j=0,1,2,\ldots;\quad r=0,1;\quad k=0,1$$

$$a_n=-H_X^{-1}\sum_{k=0}^{1}\varepsilon_k\left\{\left\|\begin{matrix}t_kq_{n+1}(k)\\0\end{matrix}\right\|+\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r+1}{2}}\operatorname{diag}\{1,0\}f_{n,2j+1+r}^{(k)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\varepsilon_r}{2}(1-\alpha_k)+1}\operatorname{diag}\{1,-1\}\nu_{n,j}^{(k,r)}\right]\right\}$$

$$H_X=\sum_{k=0}^{1}\varepsilon_k\sum_{r=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j+(1-\varepsilon_r\alpha_k)/2}}{j+(1-\varepsilon_r\alpha_k)/2}X_{k,j}^{(r)}$$

Аналогичного вида представления имеют место (реализация (3.8)) для коэффициентов разложений $\Psi_n^{\pm}(s)$ (3.12) через коэффициенты разложений (3.11) для $\Phi_{n-2}^{\pm}(s)$. Эти соотношения позволяют согласно (3.4) последовательно находить коэффициенты разложений (3.11), начиная с $n=-1$, и (3.12), начиная с $n=1$ $\left(\Psi_{-1}^{\pm}(s)\equiv 0,\quad \Psi_0^{\pm}(s)\equiv i\begin{Vmatrix}-1\\ \pm 1\end{Vmatrix}\right)$.

Входящие в представление (3.13) значения полинома $q_{n+1}(x)$ при $x=k$ $(k=0,1)$ однозначно определяются условием (2.19)

$$q_{n+1}(k)=r_n+\varepsilon_k\Delta_{n,0}^{(k)},\quad k=0,1;\quad \Delta_{n,0}^{(k)}=-\frac{1}{2}\int_0^1 p_n(x)dx$$

$$\Delta_{n,j}^{(k)}=\varepsilon_k\|0,1\|f_{n,j}^{(k)},\quad j=1,2,\ldots;\quad \pi^2\left(\cos\frac{\pi\alpha_0}{2}\cos\frac{\pi\alpha_1}{2}\right)^{-1}r_n=$$

$$=\sum_{k=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j+(1-\varepsilon_r\alpha_k+\nu)/2}}{j+(1-\varepsilon_r\alpha_k+\nu)/2}\sum_{m=0}^{j}\Delta_{n,2m+\nu}^{(k)}\mu_{k,j-m}^{(r)} \tag{3.14}$$

Здесь учтено, что

$$q_{n+1}(x(s))=\|0,1\|\sum_{j=0}^{\infty}f_{n,j}^{(k)}\rho_k^{j/2} \tag{3.15}$$

Полином $p_n(x)$ определяется из (3.1) по $q_{n-1}(x)$ с точностью до, вообще говоря, произвольной постоянной.

В соответствии с (3.5) и (3.11) решения уравнений (3.2) $(n=0,1,2,\ldots)$ имеют следующие представления:

$$\varphi_n(x)=\sum_{r=0}^{1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{1-\alpha_0\varepsilon_r}\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_{n,j}^{(0,r)}\sin^{2j}\frac{\pi x}{2}=$$

$$=\sum_{r=0}^{1}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{1-\alpha_1\varepsilon_r}\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_{n,j}^{(1,r)}\cos^{2j}\frac{\pi x}{2} \tag{3.16}$$

$$\varphi_{n,j}^{(k,r)}=\|0,1\|\lambda_{n,j}^{(k,r)},\quad j=0,1,2\ldots;\quad k,r=0,1$$

причем ряды в (3.15), (3.16), так же как и в (3.11), (3.12), имеют радиус сходимости, равный единице.

4. Построение приближенного решения интегрального уравнения задачи. Полученное в предыдущих разделах позволяет приступить непосредственно к приближенному решению интегрального уравнения (1.4). Все построения будут проведены при условии

$$L\varphi=0,\quad \varphi\in W_p^{(1)}[0,1],\quad p>1\Rightarrow\varphi=0 \tag{4.1}$$

Это условие будет выполнено, если оператор L строго положителен, т.е.

$$(L\varphi,\varphi)>0,\quad \varphi\neq 0,\quad \varphi\in W_p^{(1)}[0,1],\quad p>1 \tag{4.2}$$

$$(\varphi,f)=\int_0^1\varphi(x)f(x)dx$$

Именно таким является оператор L в уравнении (1.4), (1.5). Это следует из того, что $(L\varphi, \varphi)$ – интеграл энергии задачи (1.1), в которой граничное условие $G_2 w'_y(x,0) = -f(x)$, $x \in [0,1]$ заменено на $w(x,0) = G_2^{-1}\varphi(x)$.

Изложим схему приближенного решения уравнения (1.4) применительно к уравнению (1.4), (1.5).

Дальнейшие построения опираются на представление

$$(L - L_0)\varphi = R\varphi = \int_0^1 R(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{4.3}$$

где L_0 – оператор из (2.21), и дальнейшую эквивалентную регуляризацию

$$\varphi + L_0^{-1}R\varphi = L_0^{-1}f \tag{4.4}$$

В случае (1.5) ядро $R(x, \xi)$ (4.3) можно представить (см. также (2.11)) рядом Тейлора

$$\begin{gathered}\pi R(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(x,\xi), \quad j^{-1}\beta_j(x,\xi) = \beta_j^{(0)}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j(\xi - x)^{j-1} - \beta_j^{(1)}(\cos\pi\alpha_0 - \\ -(-1)^j \cos\pi\alpha_1)(1 - \xi - x)^{j-1}, \quad j = 1,2,\ldots \\ \beta_{2m-s}^{(0)} = (2q_0)^{1-s}\xi(2m) - sq(1 + 2q\Phi(q,2m-s,2)) \\ \beta_{2m-s}^{(1)} = \left(1 - 2^{-2m}\right)\xi(2m) - 1 + q2^{s-2m}\Phi\left(q,2m-s,\tfrac{3}{2}\right), \quad m = 1,2,\ldots; \quad s = 0,1\end{gathered} \tag{4.5}$$

где функции ξ и Φ определены формулами 9.522(1) и 9.550 из [7]. Скорость сходимости ряда (4.5) при $x, \xi \in [0,1]$ определяется соотношениями

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \left|\beta_j^{(k)}\right|^{1/j} = (2k+1)^{-1}, \quad k = 0,1 \tag{4.6}$$

Уравнение (4.4) является уравнением Фредгольма второго рода. Можно показать (см. (4.1), (4.5), (4.6)), что оно имеет единственное решение в $W_p^{(1)}[0,1]$ $(1 < p < p')$ [8]. Обоснованность дальнейших построений следует из общей теории приближенных методов решения уравнений второго рода [8].

Заменяя ядро $R(x, \xi)$ частичной суммой ряда (4.5)

$$\pi R_n(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j(x,\xi), \quad R_n\varphi = \int_0^1 R_n(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

будем строить приближенное решение θ_n уравнения (4.4) (следовательно, и уравнения (1.4), (1.5)) как решение следующего уравнения с вырожденным ядром:

$$\theta_n + L_0^{-1}R_n\theta_n = L_0^{-1}f \tag{4.7}$$

предварительно преобразовав ядро к виду

$$R_n(x,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{kj}^{(n)} p_k(x)p_j(\xi)$$

(полиномы $p_k(x)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ определены в разделе 3).

Решение уравнения (4.7) ищем в виде

$$\theta_n(x) = L_0^{-1}f + \sum_{m=0}^{n} \theta_m^{(n)}\varphi_m(x)$$

(функции $\varphi_j(x)$ $(j = 0,1,2,\ldots)$ определены в разделе 3 ((3.1), (3.11), (3,16)). Следуя [9], относительно неизвестных коэффициентов этого представления приходим к следующей конечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\theta_k^{(n)} + \sum_{m=0}^{n} a_{km}^{(n)}\theta_m^{(n)} = b_k^{(n)}, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

$$a_{km}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} r_{kj}^{(n)}(\varphi_m, p_j), \quad b_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} r_{kj}^{(n)}(L_0^{-1}f, p_j)$$

Для определения элементов матрицы этой системы необходимо вычислить интегралы вида (φ_n, p_m). Для этого выполним замену переменных $x = x(s)$. Учитывая (3.1), имеем

$$(\varphi_n, p_m) = -\int_0^{-\infty} \varphi_n(x(s))\frac{d}{ds}q_{m+1}(x(s))ds$$

Разбивая интервал интегрирования на два от 0 до –1 и от –1 до –∞, а затем используя на каждом из них соответствующие локальные разложения из (3.14)–(3.16), находим

$$(\varphi_n, p_m) = -\gamma_{n,m}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\gamma_{n,m}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j+1+(\nu-\varepsilon_r\alpha_k)/2}}{j+1+(\nu-\varepsilon_r\alpha_k)/2}\sum_{\delta=0}^{j}(2\delta+\nu+1)\Delta_{m,2\delta+\nu+1}^{(k)}\varphi_{n,j-\delta}^{(k,r)}$$

причем радиус сходимости ряда $\gamma_{n,m}(z)$, так же как и рядов из (3.15), (3.16), (3.11), (3.12), равен единице.

Скорость сходимости построенного таким образом приближенного решения, определяется оценкой $\|\varphi - \theta_n\|_{W_p^{(1)}} \le \delta_n$, $\delta_n = \delta 2^{-n}$, которая следует из (4.6).

В более общем случае, когда $R_L(x,\xi) \in C^{(\infty)}([0,1]^2)$ и выполнено условие (4.1), решение строится по той же схеме. Если приближение $R_n(x, \xi)$ брать в виде частичной суммы соответствующего ряда по классическим ортогональным многочленам, например следующим образом:

$$R_n(x,\xi) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_{kj}T_k(1-2x)T_j(1-2\xi)$$

($T_k(x)$ – многочлен Чебышева первого рода, β_{kj} – коэффициенты Фурье двойного ряда разложения $R(x, \xi)$ по указанным многочленам), то последовательность оценок скорости сходимости δ_n будет удовлетворять свойству: при каждом натуральном m последовательность $\{\delta_n n^m,\ n = 1,2,\ldots\}$ является ограниченной.

Все построения данной работы проведены при условиях

$$|\cos\pi\alpha_0| < 1, \quad |\cos\pi\alpha_1| < 1 \tag{4.8}$$

Эти ограничения можно сделать менее жесткими: строгим должно быть только одно из неравенств (4.8). Схема решения уравнения (1.6), (2.10) для этих четырех исключительных случаев остается неизменной. Меняется только запись формул факторизации матрицы – функции $G(s)$, причем сама факторизация осуществляется согласно цитированной выше работе Л.А. Хвощинской.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Онищук О.В.* Об одном методе решения интегральных уравнений и его применении к задаче об изгибе пластинки с крестообразным включением // ПММ. Т. 52. Вып. 2. 1988. С. 269–283.
2. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
4. *Храпков А.А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677–689.
5. *Хведелидзе Б.В.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбил. мат. ин-та им. А.М. Размадзе. Т. 23. 1957. С. 3–158.
6. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбил. мат. ин-та им. А.М. Размадзе. Т. 60. 1979. С. 3–135.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
9. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.: Л.: Гостехиздат, 1949. 380 с.

Одесса

Поступила в редакцию
1.IV.1993