

УДК 539.3:533.6

© 1994 г. В.М. Александров, С.А. Гришин

ДИНАМИКА КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНУТРЕННЕМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Рассматривается задача нестационарной динамики упругой круговой конической оболочки, заземленной по меньшему основанию и свободной по большему. Внутри оболочки от узкой части к широкой движется сверхзвуковой поток газа. Помимо этого осуществляется нагружение оболочки распределенной поперечной нагрузкой. Все процессы предполагаются осесимметричными. Проводится исследование на флаттер и в устойчивой ситуации отслеживается эволюция прогиба образующей конуса под действием заданной нагрузки. Поведение оболочки описывается уравнениями технической теории в смешанной форме, влияние потока учитывается по поршневой модели. Используется нелокальная аппроксимация решения специальной системой ортогональных многочленов. Обсуждаются ее свойства и приводятся результаты расчетов.

Обзор литературы имеется в [1–6]. Задача о флаттере круговой конической оболочки рассматривалась в [7, 8].

1. Постановка задачи. Имеется оболочка, срединная поверхность которой – прямой круговой усеченный конус (фиг. 1). Радиус меньшего основания – r_0 , большего – r_1 , расстояние между основаниями – d . Эти параметры однозначно связаны с параметрами γ, s_0, s_1 формулами

$$r_0 = s_0 \sin \gamma, \quad r_1 = s_1 \sin \gamma, \quad d = (s_1 - s_0) \cos \gamma \quad (1.1)$$

$$\kappa^{-1} = \operatorname{tg} \gamma = (r_1 - r_0) / d, \quad s_0 = r_0 \kappa \sqrt{1 + \kappa^{-2}}, \quad s_1 = r_1 \kappa \sqrt{1 + \kappa^{-2}} \quad (1.2)$$

Толщина оболочки h считается постоянной, а ее материал – упругим однородным изотропным с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Плотность материала – ρ . Напряженно-деформированное состояние оболочки будем описывать уравнениями технической теории в смешанной форме [1]

$$D \nabla^4 w - \nabla_K^2 F - L(w, F) - q = 0$$

$$\nabla^4 F - Eh \nabla_K^2 w + \frac{1}{2} Eh L(w, w) = 0 \quad (1.3)$$

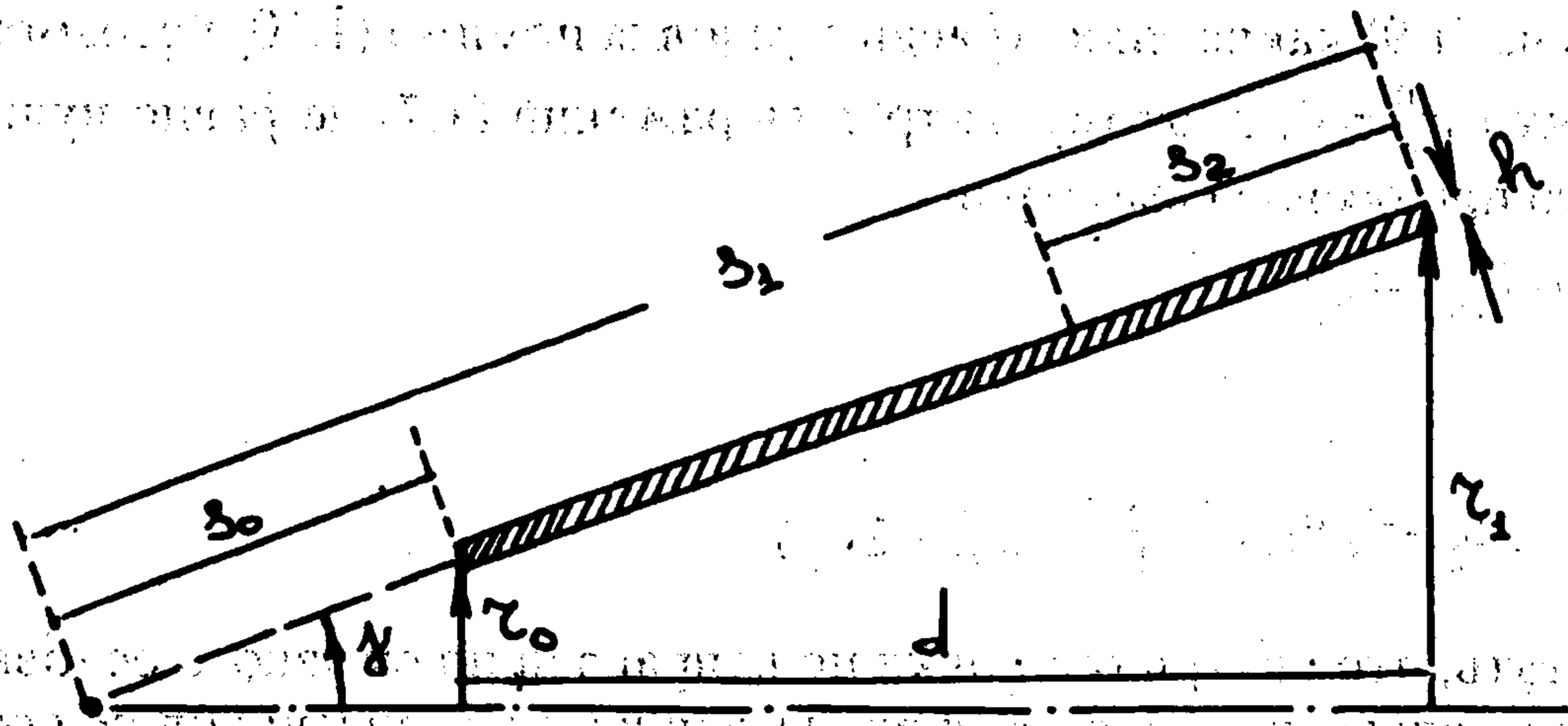
где операторы имеют вид

$$L(w, F) = (s^{-2} F_{\psi\psi} + s^{-1} F_s) w_{ss} + (s^{-2} w_{\psi\psi} + s^{-1} w_s) F_{ss} -$$

$$- 2(s^{-1} F_{\psi s} - s^{-2} F_\psi)(s^{-1} w_{\psi s} - s^{-2} w_\psi) \quad (1.4)$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^2 = \partial_{ss} + s^{-1} \partial_s + s^{-2} \partial_{\psi\psi}, \quad \nabla_K^2 = s^{-1} \kappa \partial_{ss}$$

и приняты следующие обозначения: s – расстояние по меридиану срединной поверхности от вершины конуса до избранной точки; $\psi = \varphi \sin \gamma$; φ – угловая координата точки на окружности конуса; w – смещение по нормали точки срединной поверхности; F – функция усилий; $D = \frac{1}{12} E h^3 / (1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость; $\kappa = \operatorname{ctg} \gamma$; $\partial_{ss}, \partial_s,$



Фиг. 1

$\partial_{\psi\psi}$ — операторы дифференцирования по переменным, указанным в индексах; $w_{\psi s}$, w_s , F_{ss} , F_ψ — производные по переменным, указанным в индексах; q — поперечная нагрузка, происхождение которой пока не уточняем.

Перейдем к уравнениям в вариациях. Предположим, что вместе с основным решением w^0, F^0, q^0 существует близкое возмущенное решение $w + w^0, F + F^0, q + q^0$. Подставляя его в (1.3), учитывая, что w^0, F^0, q^0 — решение, пренебрегая квадратичными по возмущению членами, получим

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - \nabla_K^2 F - L(w^0, F) - L(w, F^0) - q &= 0 \\ \nabla^4 F + Eh\nabla_K^2 w + EhL(w^0, w) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Когда основное (с индексом нуль) напряженно-деформированное состояние обладает осевой симметрией, имеем

$$\begin{aligned} L(w^0, F) &= (s^{-2} F_{\psi\psi} + s^{-1} F_s) w_{ss}^0 + F_{ss} s^{-1} w_s^0 \\ L(w, F^0) &= s^{-1} F_s^0 w_{ss} + F_{ss}^0 (s^{-2} w_{\psi\psi} + s^{-1} w_s) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$L(w^0, w) = (s^{-2} w_{\psi\psi} + s^{-1} w_s) w_{ss}^0 + w_{ss} s^{-1} w_s^0$$

Когда возмущение тоже осесимметрично, имеем

$$\begin{aligned} L(w^0, F) &= s^{-1} (F_s w_s^0)_s, \quad L(w^0, w) = s^{-1} (w_s w_s^0)_s \\ L(w^0, F) &= s^{-1} (F_s^0 w_s)_s \end{aligned} \quad (1.7)$$

В результате (1.5) примет вид

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - \nabla_K^2 F - s^{-1} (F_s w_s^0)_s - s^{-1} (F_s^0 w_s)_s - q &= 0 \\ \nabla^4 F - Eh\nabla_K^2 w + Ehs^{-1} (w_s w_s^0)_s &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\nabla^4 = s^{-1} \partial_s s \partial_s s^{-1} \partial_s s \partial_s$$

В качестве основного возьмем известное [1, 2] безмоментное решение

$$(sT_1^0)_s = s\kappa^{-1} q^0, \quad T_2^0 = s\kappa^{-1} q^0 \quad (1.9)$$

где T_1^0 — продольное усилие, T_2^0 — окружное, q^0 — постоянное нормальное давление ($q^0 > 0$ для внутреннего давления). Потребуем, чтобы

$$T_1^0(s_1) = 0 \quad (1.10)$$

Наложить на (1.9) какие-либо краевые условия помимо (1.10) невозможно. Следует принять [3], что $w_s^0 = 0$, поэтому из трех выражений (1.7) не равно нулю лишь одно. Учитывая, что при осевой симметрии

$$T_2^0 = F_{ss}^0, \quad T_1^0 = s^{-1} F_s^0 \quad (1.11)$$

вычислим

$$s^{-1} (F_s^0 w_s)_s = \frac{1}{2} \kappa^{-1} q^0 ((s - s_1^2 s^{-1}) w_{ss} + 2w_s) \quad (1.12)$$

Будем считать, что внутри оболочки по направлению от узкого основания конуса к широкому (т.е. слева направо на фиг. 1) движется сверхзвуковой поток газа. На стенку канала он оказывает некоторое давление, среднее значение которого (по s на $[s_0, s_1]$) в предположении осевой симметрии течения можно принять за q^0 . Всякое отклонение стенки вызовет возмущение давления, которое обозначим через q^1 . Согласно "поршневой теории" [2, 4, 5] имеет место формула

$$q^1 = -\frac{\rho_1 U}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(U w_s + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} w_t \right) \quad (1.13)$$

В (1.13) q^1 и w – функции как координаты s , так и времени t , M – число Маха – отношение пристеночной скорости потока U к скорости звука в газе u , ρ_1 – плотность газа. Все параметры потока положительны, с целью упрощения задачи принимаются постоянными по s и t и считаются заданными заранее.

Инерционные силы при движении стенки учтем членом

$$q^2 = -h \rho w_{tt} \quad (1.14)$$

Представление q из (1.8) в виде $q = q^1 + q^2$ приводит к уравнениям задачи о флаттере оболочки в потоке. Введение дополнительного слагаемого $q^3(s, t)$ ($q = q^1 + q^2 + q^3$) позволит отслеживать вынужденные колебания системы под действием заданного возмущения q^3 .

Объединяя (1.8)–(1.14), получим основную систему уравнений:

$$D \nabla^4 w - \nabla_K^2 F - s^{-1} (F_s^0 w_s)_s + \xi w_s + \eta w_t + \zeta w_{tt} = q^3$$

$$\nabla^4 F + E h \nabla_K^2 w = 0$$

$$s^{-1} (F_s^0 w_s)_s = \frac{1}{2} \kappa^{-1} q^0 ((s - s_1^2 s^{-1}) w_{ss} + 2w_s) \quad (1.15)$$

$$\xi = \rho_1 U^2 (M^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\eta = \rho_1 U (M^2 - 2) (M^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}, \quad \zeta = \rho h$$

Обратимся к граничным и начальным условиям. Край $s = s_1$ будем считать свободным. Тогда [1] $M_1 = 0$, $Q_1 = 0$ – момент и перерезывающее усилие равны нулю. В терминах производных от w это запишется так:

$$s = s_1: \quad w_{ss} + v s^{-1} w_s = 0, \quad w_{sss} + s^{-1} w_{ss} - s^{-2} w_s = 0 \quad (1.16)$$

Левые части равенств (1.16) обозначим соответственно через M_w и Q_w .

Край $s = s_0$ будем считать заземленным:

$$s = s_0: \quad w = 0, \quad w_s = 0 \quad (1.17)$$

От функции F естественно потребовать, чтобы при $s = s_1$ было равно нулю мембранное усилие T_1 , откуда в силу (1.11)

$$s = s_1: F_s = 0 \quad (1.18)$$

а также, чтобы при $s = s_0$ равнялось нулю смещение вдоль оси s .

Из соотношений теории оболочек [1], пользуясь (1.17), можно показать, что при этом $T_2 - \nu T_1 = 0$ ($s = s_0$). Учитывая (1.11), приходим к условию

$$s = s_0: F_{ss} - \nu s^{-1} F_s = 0 \quad (1.19)$$

Дифференциальная форма в левой части (1.19) отличается от формы, обозначенной ранее M_w , только знаком коэффициента Пуассона, поэтому будем называть ее M_F и писать (1.19) как $M_F = 0$ ($s = s_0$).

Функция усилий F участвует в физически осмысленных уравнениях теории оболочек только своими производными – без ограничения общности ее можно зафиксировать в одной точке:

$$s = s_1: F = 0 \quad (1.20)$$

Наконец, последнее условие может быть получено как естественное при обработке интегрированием по частям функционала, порожденного старшими членами (1.15). Именно:

$$s = s_0: Q_F = F_{sss} + s^{-1} F_{ss} - s^{-2} F_s = 0 \quad (1.21)$$

Выбор $s = s_1$ в (1.20) и $s = s_0$ в (1.21) приводит к симметричной системе условий на w и F в том же смысле, в каком симметричны уравнения равновесия и совместности теории оболочек в статико-геометрической аналогии [6].

Начальные условия для суждения о возможности флаттера не нужны, для динамики примем, что в начальный момент времени прогиб равен нулю и оболочка не движется:

$$t = 0: w = 0, \quad w_t = 0 \quad (1.22)$$

2. Метод решения. Система (1.15) представляет собой линейную систему уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Разделим переменные методом Фурье. Именно разыскивая каждую из функций w, F в виде произведения функции только времени на функцию только координаты, подставляя такую факторизацию в (1.15), из второго уравнения получим, что зависящие от времени множители w, F совпадают с точностью до мультипликативной константы. В первом же уравнении переменные разделяются при условии, что η и ζ из (1.15) связаны не зависящим от s и t множителем. Это обстоятельство послужило одной из причин, по которым параметры потока в разд. 1 были приняты постоянными.

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно зависящего от времени множителя в случае общего положения имеет общим решением линейную комбинацию экспонент как линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Поэтому решения типа флаттера (однородной системы (1.15)) будет разыскивать, выделив экспоненту по t . Если же система при заданных параметрах оболочки и потока окажется устойчивой, имеет смысл постановка динамической задачи об эволюции формы оболочки под действием известного усилия q^3 .

Простота геометрии области, независимость краевых условий на w и F и свойства старших членов (1.15) дают возможность и наводят на мысль использовать нелокальную аппроксимацию по координатам при построении приближенного решения. Предположим, что построены две системы полиномов $g_k(s), f_k(s)$ ($k = 1, \dots, \infty$) со

следующими свойствами: g_k удовлетворяют условиям (1.16), (1.17), f_k – условиям (1.18)–(1.21), причем

$$(\nabla^4 g_k, g_m) = \delta_{km}, \quad (\nabla^4 f_k, f_m) = \delta_{km}, \quad \forall k, m \quad (2.1)$$

где δ_{km} – символ Кронекера, а скалярное произведение

$$(a, b) = \int_{s_0}^{s_1} abs ds \quad (2.2)$$

Тогда, представив решение и правую часть рядами (суммирование в (2.3), (2.4) ведется по k от 1 до ∞)

$$w = \sum w_k(t)g_k(s), \quad F = \sum F_k(t)f_k(s), \quad q^3 = \sum q_k(t)g_k(s) \quad (2.3)$$

подставив их в (1.15), домножив первое уравнение на sg_m ($m = 1, \dots, \infty$), второе – на sf_j ($j = 1, \dots, \infty$), проинтегрировав в пределах от s_0 до s_1 и воспользовавшись (2.1), придем к паре бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$Dw_m - \sum (F_k \kappa Y_{mk}^3 + w_k (-\kappa^{-1} q^0 (Y_{mk}^1 - \frac{1}{2} Y_{mk}^2) + \xi Y_{mk}^1) + (\eta w_k^* + \zeta w_k^{**})) Y_{mk}^0) = \sum q_k Y_{mk}^0 \quad (2.4)$$

$$F_j + \kappa E h \sum Y_{jk}^4 w_k = 0$$

$$Y_{mk}^0 = (g_m, g_k), \quad Y_{mk}^1 = (g_m, \partial_s g_k), \quad Y_{mk}^2 = (g_m, (s - s_1^2 s^{-1}) \partial_{ss} g_k)$$

$$Y_{mk}^3 = (g_m, s^{-1} \partial_{ss} f_k), \quad Y_{jk}^4 = (f_j, s^{-1} \partial_{ss} g_k) \quad (2.5)$$

Точкой обозначено дифференцирование по t .

Выражения F_j через w_k из второй системы (2.4) подставим в первую. Далее удобно работать с векторами и матрицами. Обозначив столбцы коэффициентов w_k, F_k, q_k (2.3) соответственно через w, F, q и считая Y_{mk}^i (2.5) компонентами матриц Y^i , перепишем первую систему (2.4) в векторном виде (I – единичная матрица)

$$\zeta Y^0 w^{**} + \eta Y^0 w^* + Y^5 w = Y^0 q \quad (2.6)$$

$$Y^5 = DI + Eh \kappa^2 Y^3 Y^4 + (\xi - \kappa^{-1} q^0) Y^1 + \frac{1}{2} \kappa^{-1} q^0 Y^2$$

Матрица Y^0 , являясь матрицей Грама системы линейно-независимых функций g_k , невырождена. Домножив равенство (2.6) слева на $\zeta^{-1} Y^{0^{-1}}$ и обозначив $z = w^*$, $X = -\zeta^{-1} Y^{0^{-1}} Y^5$, запишем его как систему первого порядка в блочной форме

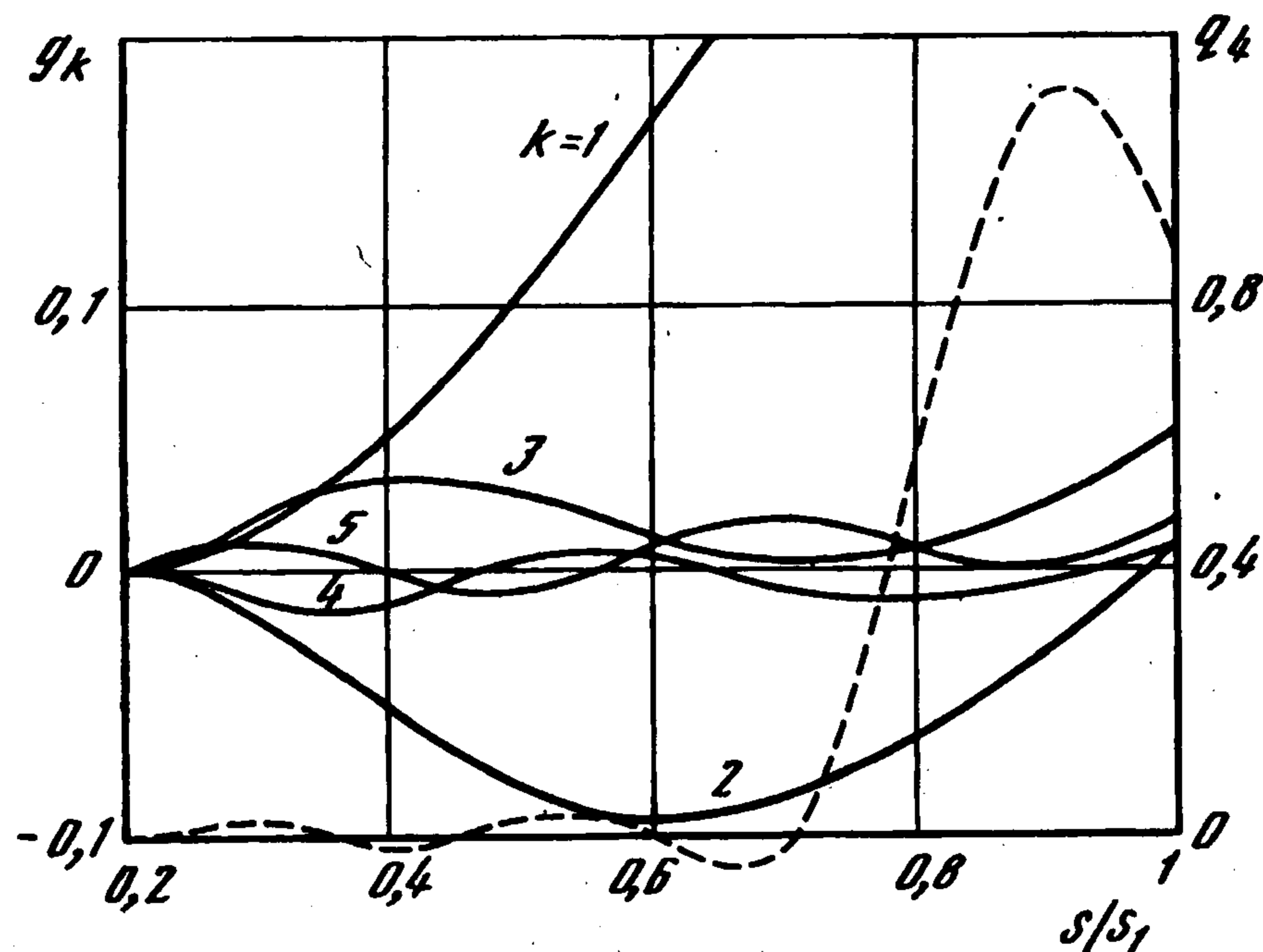
$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta \zeta^{-1} I & X \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta^{-1} q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Начальные условия (1.21) перепишем в виде

$$t = 0: \quad z = w = 0 \quad (2.8)$$

Остается оборвать ряды (2.3) после n членов и вычислить правую часть q , чтобы исследовать систему (2.7) на устойчивость или решать задачу Коши (2.7), (2.8) стандартным методом Рунге–Кутты.

Исследуем билинейную форму в левых частях (2.1). Для этого возьмем две функции $a(s), b(s)$, заданные на $[s_0, s_1]$, составим для них интеграл $(\nabla^4 a, b)$ и понизим производные в подынтегральном выражении, проинтегрировав по частям дважды. Затем преобразуем внеинтегральный член с целью выделить произведения диф-



Фиг. 2

ференциальных форм, входящих в краевые условия (1.16), (1.17). В итоге получим

$$(\nabla^4 a, b) = (sQ_a b - sM_a b') \Big|_{s_0}^{s_1} + \int_{s_0}^{s_1} (a'' b'' + \nu s^{-1} (a'' b' + a' b'') + s^{-2} a' b') ds \quad (2.9)$$

Здесь через Q_a , M_a обозначены те же формы от a , что и в разд. 1 от w , штрихом обозначено дифференцирование по s и принято стандартное обозначение для разности значений функции на концах интервала.

На линеале функций, удовлетворяющих условиям (1.16), (1.17), внеинтегральный член (2.9) обращается в нуль, интеграл же можно трактовать как билинейный симметричный функционал аргументов a , b . Соответствующий ему квадратичный функционал, как это можно показать приведением подынтегральной формы к сумме квадратов, является положительным, поэтому левая часть (2.9) определяет для подобных функций новое скалярное произведение

$$\langle a, b \rangle \equiv (\nabla^4 a, b) \quad (2.10)$$

Аналогичной выкладкой с той только разницей, что вместе ν всюду следует писать $-\nu$; устанавливается, что левая часть (2.9) определяет скалярное произведение на линеале функций, подчиненных условиям (1.18)–(1.21).

Перейдем к построению полиномиального базиса. Рассмотрим полином степени k :

$$p_k(s) = \sum_{i=0}^k a_i s^i \quad (2.11)$$

Продифференцировав (2.11), вычислим:

$$M_p \equiv p_k'' + \nu s^{-1} p_k' = \sum_{i=0}^k a_i i(i-1+\nu) s^{i-2}$$

$$Q_p \equiv p_k''' + s^{-1} p_k'' - s^{-2} p_k' = \sum_{i=0}^k a_i i^2 (i-2) s^{i-3} \quad (2.12)$$

Подчиним полином p_k граничным условиям (1.16), (1.17) и выразим из них младшие коэффициенты через старшие. Условие $p_k(s_0) = 0$ дает формулу

$$a_0 = -\sum_{i=1}^k a_i s_0^i \quad (2.13)$$

Оставшиеся условия не содержат a_0 и приводят к системе относительно a_1, a_2, a_3 с матрицей и правой частью следующего вида:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2s_0 & 3s_0^2 & -\sum_{i=4}^k a_i s_0^{i-1} \\ vs_1^{-1} & 2(1+v) & 3(2+v)s_1 & -\sum_{i=4}^k a_i i(i-1+v)s_1^{i-2} \\ -s_1^{-2} & 0 & 9 & -\sum_{i=4}^k a_i i^2(i-2)s_1^{i-3} \end{array} \quad (2.14)$$

Определитель матрицы (2.14) равен

$$6[x^2(1+v) - 2(1+2v)x + 3(1+v)], \quad x \equiv s_0 / s_1 \quad (2.15)$$

Элементарное исследование показывает, что для реальных $v \in [0, 1/2]$ он может обращаться в нуль только при комплексных x , т.е. матрица (2.14) невырождена, и разрешить эту систему всегда возможно.

Совершенно аналогично, подчинив p_k условиям (1.18)–(1.21), получим систему (2.14), в которой v следует заменить на $-v$, а s_0 и s_1 – поменять местами. Ее матрица тоже невырождена.

Здесь уместно отметить, что условия

$$F(s_0) = 0, \quad Q_F(s_1) = 0 \quad (2.16)$$

также обращающие в нуль внеинтегральный член (2.9), привели бы к системе типа (2.14), вырождающейся при некотором соотношении между v и s_0/s_1 .

Понятно, что удовлетворить четырем условиям (1.16), (1.17) или (1.18)–(1.21) нетривиальным полиномом степени ниже четвертой, нельзя. Следовательно, базисную последовательность $\{p_k\}$ начнем полиномом четвертой степени. Коэффициент при старшей степени возьмем равным единице. По нему вычислим правую часть (2.14). Решив систему и воспользовавшись (2.13), найдем a_1, a_2, a_3, a_0 . Для полинома пятой степени возьмем коэффициенты: 1 – при пятой, 0 – при четвертой, младшие из (2.14), (2.13). Для шестой: 1 – при шестой, 0 – при пятой и четвертой, младшие из (2.14), (2.13) и так далее. В результате будет построен полиномиальный базис $\{p_k\}$ соответствующего линеала, ортогонализация которого процессом Грама – Шмидта со скалярным произведением (2.10) приведет к системе функций с искомыми свойствами (2.1).

Полиномиальный базис выгодно отличается от многих других тем, что интеграл (2.9) от полиномов, многократно используемый в процессе ортогонализации, может быть вычислен явно. Представив подобно (2.11) полином степени m :

$$h_m(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j \quad (2.17)$$

выполнив дифференцирование, подставив (2.11), (2.17) в (2.10) и проинтегрировав, получим

$$\langle p_k, h_m \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{ij}{i+j-2} [ij - (1 \mp v)(i+j-2)] \times \\ \times (s_1^{i+j-2} - s_0^{i+j-2}) a_i b_j + a_1 b_1 \ln(s_1 / s_0) \quad (2.18)$$

где штрих у знака суммы означает, что опущен член с $i = j = 1$, давший при интегрировании логарифм, верхний знак берется при построении системы $\{g_k\}$, нижний – $\{f_k\}$. Чтобы привести обозначения в соответствии с (2.1), остается сдвинуть

индекс: g_1, f_1 – полиномы четвертой степени. Графики нескольких первых полиномов g_k (для частного выбора v и s_0/s_1) приведены на фиг. 2. Стоит отметить неперемежаемость узлов и быстрое уменьшение амплитуды с ростом номера.

Используемая в конкретных расчетах длина базиса n полностью определяется свойствами матрицы из коэффициентов при $a_i b_j$ в (2.18). Этот не раз отмечавшийся ранее [9, 10, 11, 5] недостаток техники приближения полиномами вынуждает тщательно контролировать процесс Грама – Шмидта, применяя переортогонализацию [12] и выдавая на дисплей численные значения скалярных произведений $\langle g_k, g_m \rangle, \langle f_k, f_m \rangle$. В рассмотренной серии примеров удавалось добиться удовлетворительной ортогонализации лишь для $n \leq 8$, что сильно ограничивает класс допустимых нагрузок q^3 . Слабым утешением служит то, что и логика оболочечного подхода исключает нагрузки высокой изменчивости. Ввиду сказанного, рассмотрим крайне невыгодный с точки зрения постановки и метода случай импульсного нагружения, локализованного на участке ширины s_2 (фиг. 1) вблизи большего основания конуса ($q_* > 0, t_0 > 0$ – задаваемые параметры):

$$q^3(s, t) = q^4(s)q^5(t) \quad (2.19)$$

$$q^4 = \begin{cases} 1, & s \in [s_2 - s_1, s_1] \\ 0, & s < s_2 - s_1 \end{cases}, \quad q^5 = \begin{cases} q_*, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

При $t \geq t_0$ все q_k из (2.3) тождественно равны нулю, а при $0 < t < t_0$ коэффициенты q_k не зависят от времени, так что для таких t речь идет о наилучшем приближении функции $q^4(s)$ заданной системой g_1, \dots, g_n в смысле нормы, индуцированной (2.2). Минимизируя квадрат расстояния от q^4 до линейной оболочки g_1, \dots, g_n , придем к линейной системе размера $n \times n$:

$$Y^0 \mathbf{q} = \mathbf{R} \quad (2.20)$$

где \mathbf{R} – n -мерный вектор с компонентами

$$R_i = \int_{s_0}^{s_1} q^4 g_i s ds \quad (2.21)$$

Матрица Y^0 (2.5) невырождена, а интегралы (2.21) для индикаторной функции q^4 (2.19) считаются явно, поэтому составление и решение (2.20) не представляет затруднений. О качестве аппроксимации индикатора базисом доступной длины в частном случае можно судить по штриховой кривой на фиг. 2.

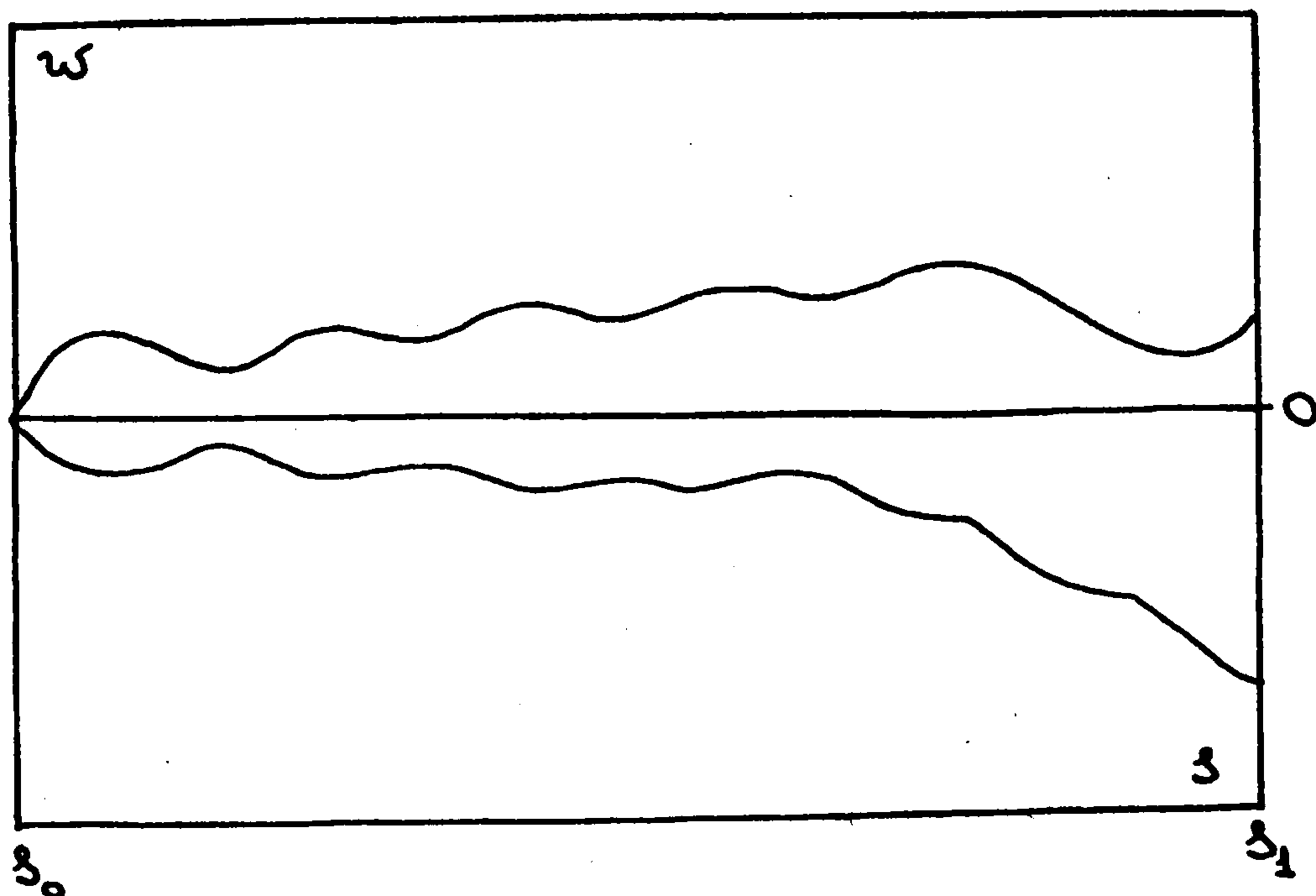
Вернемся к системе (2.7) и исследуем вопрос о ее устойчивости. Если в рядах (2.3) оставлено n членов, матрица (2.7) имеет размеры $2n \times 2n$. Представив же $\mathbf{w} = \mathbf{W}e^{\alpha t}$, продифференцировав по t и подставив в однородное уравнение (2.6), придем к спектральной задаче для матрицы \mathbf{X} размера $n \times n$:

$$(\mathbf{X} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad -\lambda = \alpha(\eta/\zeta + \alpha) \quad (2.22)$$

Найдя собственные числа (2.22) λ_i , которые могут быть либо действительными либо комплексно сопряженными парами, определим $2n$ показателей экспонент α из n квадратных уравнений:

$$\alpha^2 + \alpha\eta/\zeta + \lambda_i = 0 \quad (2.23)$$

В проведенных расчетах спектральная задача решалась обоими путями – для матрицы \mathbf{X} и для матрицы (2.7) – одним и тем же методом: стандартными программами пакета SSP исходная матрица приводилась к форме Хессенберга, после чего применялся QR-алгоритм. Первый путь быстрее, зато второй, как правило, приводил к более надежным результатам, что важно при работе с базисом предельной длины.



Фиг. 3

Возможны две асимптотические проверки качества вычислений. При $\xi = \eta = q^0 = 0$ матрица X симметрична и положительно определена, λ_i должны быть положительными, следовательно, все α – чисто мнимые. Заданием $D \rightarrow \infty$ можно при конечных q^0 , ξ , η , ζ сделать X как угодно близкой к симметричной положительно определенной, α в этом случае останутся комплексными числами, а $\alpha/|\alpha|$ будут стремиться к чисто мнимым.

В ситуации, когда хотя бы одно из чисел α оказывается в правой полуплоскости, система неустойчива и нет смысла отслеживать ее эволюцию в ответ на конкретное возмущение. Если же все α оказывались в левой полуплоскости, решалась неоднородная задача. Для этого применялся метод Рунге – Кутты четвертого порядка в модификации Гира, реализованный в стандартной программе пакета SSP.

3. Пример. Все расчеты проводились на IBM PC 286 с двойной точностью. Для задачи Коши на экран дисплея выдавались графики зависимости прогиба образующей w от координаты s в общих осях для различных моментов времени. Здесь в качестве примера рассмотрим оболочку с параметрами: $E = 78,48 \times 10^9$ Па, $\nu = 0,25$, $\rho = 1 \times 10^{-9}$ кг/м³, $r_0 = 0,1$ м, $r_1 = 0,5$ м, $d = 1,0$ м, $h = 0,001$ м. Усредненные параметры потока возьмем следующими: $u = 1 \times 10^3$ м/с, $\rho_1 = 1 \times 10^{-13}$ кг/м³, $q^0 = 19,62 \times 10^4$ Па, $U / \sqrt{1 + (\text{tg} \gamma)^2} = 3 \times 10^3$ м/с. При $n = 6$ найдено шесть пар комплексно-сопряженных собственных чисел с практически одинаковой действительной частью, равной -50 , и мнимыми частями: $\pm 42670, 31220, 22670, 18750, 14960, 12610$, так что система устойчива. Динамический расчет на локальную импульсную нагрузку при $s_2 = 0,2$ м, $t_0 = 1 \times 10^{-6}$ с дает разумную картину эволюции прогиба, согласованную с временами $t_p = 9,037 \times 10^{-5}$ с, $t_s = 1,565 \times 10^{-4}$ с достижения левого края объемной и сдвиговой волнами в материале оболочки соответственно. Колебательный процесс устойчив на временах порядка десятков t_p . Роль параметра q_* , как это и следует из (1.15), (2.19), сводится к перемасштабированию оси ординат на графиках $w(s)$.

Совсем иная картина наблюдается при $n = 8$. Сначала возмущение распространяется справа налево, как и должно быть, но с некоторого момента амплитуда старшей базисной функции начинает быстро нарастать, подавляя остальные члены линейной комбинации (2.3). Узлы графиков $w(s)$ при этом практически не движутся, создается впечатление, что система потеряла устойчивость по старшей гармонике. Это – хорошо известная в вычислительной практике [11] “пила”, принимающая в случае нашего короткого базиса не самый характерный вид. Независимое от задачи нестационарной динамики исследование спектра матрицы системы в задаче о флаттере позволяет с уверенностью отбросить такие численно неустойчивые ситуации. Подозрения же на численную неустойчивость возникают

при анализе выдачи скалярных произведений в процессе ортогонализации: ошибка при построении старших полиномов заметно возрастает. Ее можно также распознать параметрическим анализом: результаты счета сильно реагируют на незначительное изменение параметров задачи, например s_2 .

При устойчивом счете, если сделать достаточно много шагов по времени, можно обнаружить еще одну неприятную особенность короткого базиса: огибающая нескольких десятков кривых $w(s)$ выглядит на дисплее примерно так, как показано на фиг. 3, – имеются участки заметного сужения области, заматаемой образующей. Обычно эти участки согласованы с узлами старшего полинома, а сама область фиг. 3 различна при разных n .

При всех отмеченных недостатках расчет варианта занимает секунды, что важно в многопараметрической задаче, и может быть с пользой применен в практической деятельности. По результатам вычислений отчетливо видно, как после удара, локализованного вблизи большего основания конуса, волна возмущения движется в сторону меньшего, создавая там значительные напряжения, способные при определенных условиях вызвать разрушение именно в узкой части конической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
4. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров И.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. М.: ВИНТИ, 1965. С. 34–90.
5. Лампер Р.Е. Введение в теорию флаттера. М.: Машиностроение, 1990. 138 с.
6. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
7. Григолюк Э.И., Михайлов А.П. Флаттер трехслойной круговой конической оболочки // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 5. С. 1100–1103.
8. Диткин В.В., Орлов Б.А., Пшеничнов Г.И. Численное исследование флаттера конических оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 185–189.
9. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
10. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972. 398 с.
11. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
12. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1993