УДК 62–50

© 1994 г. П.В. Прокопович, А.А. Чикрий

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УБЕГАНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРУПП ОБЪЕКТОВ

Рассматривается задача об убегании хотя бы одного из m убегающих от n преследователей в k-мерном евклидовом пространстве. Все объекты однотипны, а их динамика линейна. В качестве вспомогательной выступает задача об убегании из фиксированных положений на полубесконечном интервале времени.

На конечном интервале времени задача убегания из заданных начальных положений изучалась ранее [1]. Работа примыкает к исследованиям [2–6].

1. Пусть R^k – k-мерное евклидово пространство; (x, y) – скалярное произведение векторов x и y из R^k; $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Обозначим $\operatorname{int} X$, ∂X, $\operatorname{co} X$, $\operatorname{con} X$ соответственно внутренность, границу, выпуклую и коническую оболочки произвольного множества $X \subset R^k$; $\Omega(R^k)(\operatorname{co}\Omega(R^k))$ – пространство всех непустых компактов (выпуклых компактов) пространства R^k с введенной в нем метрикой Хаусдорфа; $S = \{x \in R^k : \|x\| \leq 1\}$; $N_q = \{1,2,\ldots,q\}$. Если множество X состоит из конечного числа элементов, то через $|X|$ обозначим число его элементов.

Для множества $F \in \Omega(R^k)$ определим опорную функцию $c(F, \cdot): R^k \to R$ соотношением

$$c(F,\psi) = \max_{f \in F}(f,\psi), \quad \psi \in R^k$$

Пусть $\psi_0 \in R^k$, $\|\psi_0\| \neq 0$. Множество

$$U(F,\psi_0) = \{f \in F : (f,\psi_0) = c(F,\psi_0)\}$$

называется опорным множеством к множеству F в направлении ψ_0. Если опорное множество $U(F, \psi_0)$ состоит из единственной точки, то говорят, что множество F строго выпукло в направлении $\psi_0 \in R^k$. Говорят, что множество $F \in \Omega(R^k)$ строго выпукло, если оно строго выпукло в любом направлении $\psi_0 \in R^k$, $\|\psi_0\| \neq 0$ [7]. Множество $F \in \Omega(R^k)$ назовем компактом с гладкой границей, если

$$U(F,\psi) \cap U(F,\psi') = \varnothing, \quad \forall \psi, \psi' \in \partial S, \quad \psi \neq \psi'$$

Заметим, что компакт с гладкой границей, как и строго выпуклый компакт, необязательно является множеством выпуклым. Например, единичная сфера ∂S в пространстве R^k – строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = Ay + \upsilon, \quad \upsilon \in V, \quad V \in \Omega(R^k) \tag{1.1}$$

где y – k-мерный вектор фазового состояния объекта, υ – k-мерный вектор управления, A – квадратная матрица порядка k. Под допустимым управлением на отрезке $I = [0, t_1]$ понимаем любую измеримую функцию $\upsilon: I \to V$.

Обозначим $X(t_1; G, V)$ множество достижимости для управляемого объекта (1.1) в момент времени $t_1 \geqslant 0$ из начального множества $G \in \Omega(R^k)$, т.е.

$$X(t_1; G, V) = \exp(t_1 A)G + \int_0^{t_1} \exp((t_1 - s)A)Vds$$

Пусть $y(t)$ – решение уравнения (1.1), соответствующее управлению $\upsilon(t)$ и начальному условию $y(0) \in G$, $G \in \Omega(R^k)$. Говорят [8], что пара $(\upsilon(t), y(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке I и условию трансверсальности на множестве G, если существует такое решение $\psi(t)$ вспомогательной сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi} = -A^* \psi \tag{1.2}$$

с начальным условием $\psi(0) \in \partial S$, что выполнены следующие условия:

1) $(\upsilon(t), \psi(t)) = c(V, \psi(t))$ для почти всех $t \in I$

2) $(y(0), \psi(0)) = c(G, \psi(0))$

Лемма 1. Пусть $G \in \operatorname{co}\Omega(R^k)$. Точка $y(t_1)$ принадлежит множеству $\partial X(t_1; G, V)$ при $t_1 > 0$ тогда и только тогда, когда пара $(\upsilon(t), y(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке I и условию трансверсальности на множестве G.

Лемма 2 [4]. Пусть $y_j(t)$ – решение уравнения (1.1), соответствующее управлению $\upsilon_j(t)$ и начальному условию $y_i(0) \in G$, $G \in \Omega(R^k)$, причем пара $(\upsilon_j(t), y_j(t))$ удовлетворяет условию максимума на отрезке $I = [0, t_1]$, $t_1 > 0$ и условию трансверсальности на множестве $G \in \Omega(R^k)$; $\psi_j(t)$ – соответствующее решение сопряженной системы уравнений (1.2), $j = 1, 2$. Если $y_1(0) \neq y_2(0)$, и хотя бы при одном $j \in N_2$ для почти всех $t \in I$ функция $c(V, \psi)$ дифференцируема в точке $\psi_j(t)$, то $y_1(t_1) \neq y_2(t_1)$.

Лемма 3 [5, 6]. Если V – компакт с гладкой границей, $G \in \operatorname{co}\Omega(R^k)$, то множество $X(t_1; G, V)$ при $t_1 > 0$ является выпуклым компактом с гладкой границей.

2. Движение объектов в пространстве $R^k (k \geqslant 2)$ описывается уравнениями

$$P_i: \dot{x}_i = Ax_i + u_i,\ u_i \in U_i;\quad E_j: \dot{y}_j = Ay_j + \upsilon_j,\ \ \upsilon_j \in V \tag{2.1}$$

$$U_i, V \in \Omega(R^k),\ \ U_i \subset \operatorname{co} V;\ \ i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, \ldots, m$$

причем в начальный момент $x_i(0) = x_i^0$, $y_j(0) = y_j^0$, где

$$x_i^0 \neq y_j^0,\ \ i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, \ldots, m \tag{2.2}$$

Здесь x_i, y_j – фазовые координаты i-го преследователя и j-го убегающего, A – квадратная матрица порядка k. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i: [0, +\infty) \to U_i$, $\upsilon_j: [0, +\infty) \to V$.

Говорят, что в игре (2.1) из начального состояния $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ возможно убегание (разрешима локальная задача убегания), если существуют такие управления игроков $E_j (j = 1, \ldots, m)$, что при любых управлениях игроков $P_i (i = 1, \ldots, n)$ найдется $s \in \{1, \ldots, m\}$, при котором выполнены неравенства $x_i(t) \neq y_s(t)$ для всех $i \in N_n$, $t \in [0, +\infty)$. При этом в момент t значения управлений убегающих формируются на основе информации о реализовавшемся состоянии

$$z(t) = (x_1(t), \ldots,\ x_n(t), y_1(t), \ldots,\ y_m(t))$$

а значения управлений преследователей – на основе любой мыслимой информации.

Если в игре (2.1) возможно убегание из любого начального состояния z^0, удовлетворяющего неравенствам (2.2), то говорят, что в игре (2.1) разрешима глобальная задача убегания.

3. Пусть G – некоторое непустое подмножество пространства R^k. По начальному состоянию $z^0 = (x(0), y(0)) = (x_1^0, \ldots x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ определим следующие множества индексов:

$$I(x(0), G) = \left\{ i \in \{1, \ldots, n\}: x_i^0 \in G \right\} \tag{3.1}$$

$$J(y(0), G) = \left\{ j \in \{1, \ldots, m\}: y_j^0 \in G \right\} \tag{3.2}$$

$$J_0(y(0), \partial G) = \left\{ j \in \{1, \ldots, m\}: y_j^0 \in \partial G \right\} \tag{3.3}$$

причем, если существуют

$$j_l \in J_0(y(0), \partial G), \quad l = 1, \ldots, s, s > 1, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_s \tag{3.4}$$

такие, что $y_{j_1}^0 = y_{j_2}^0 = \ldots = y_{j_s}^0$, то полагаем $j_l \notin J_0(y(0), \partial G), \ l = 2, \ldots, s$.

Пусть $G \in \mathrm{co}\,\Omega(R^k)$. Введем отображение $P(G, \cdot): R^k \setminus \mathrm{int}\, G \to \Omega(R^k)$ по формуле

$$P(G, y) = \partial S \cap [\mathrm{con}(y - G)]^*, \quad y \in R^k \setminus \mathrm{int}\, G \tag{3.5}$$

Здесь $[\mathrm{con}(y - G)]^*$ – конус, сопряженный к конусу con $(y - G)$. Обозначим $\psi_j(t, r_j)$ решение системы (1.2), соответствующее начальному условию $\psi_j(0) = r_j, r_j \in \in P(G, y_j^0), \ j \in J_0(y(0), \partial G)$.

Теорема 1. Если существует такое множество $G \in \mathrm{co}\,\Omega(R^k)$, что $|J_0(y(0), \partial G)| > > |I(x(0), R^k \setminus G)|$, и для любого $j \in J_0(y(0), \partial G)$ при некотором $r_j \in P_j(G, y_j^0)$ опорная функция $c(V, \psi)$ дифференцируема в точке $\psi_j(t, r_j)$ при почти всех $t \in [0, +\infty)$, то в игре (2.1) из начального состояния z^0 возможно убегание.

Доказательство. Для любого $j \in J_0(y(0), \partial G)$ выберем вектор $r_j \in P(G, y_j^0)$, такой, что при почти всех $t \in [0, +\infty)$ опорная функция $c(V, \psi)$ дифференцируема в точке $\psi(t, r_j)$.

В качестве управления игрока $E_j (j \in J_0(y(0), \partial G))$ возьмем измеримую функцию $\upsilon_j(t) \in V, \ t \geqslant 0$, удовлетворяющую условию

$$(\upsilon_j(t), \ \psi_j(t, r_j)) = c(V, \psi_j(t, r_j)) \tag{3.6}$$

Управление $\upsilon_j(t), \ j \in J_0(y(0), \partial G)$ определяется из равенства (3.6) единственным образом, поскольку функция $c(V, \psi)$ дифференцируема в точке $\psi_j(t, r_j)$ почти при всех $t \geqslant 0$. Единственность управления $\upsilon_j(t)$ здесь понимается в том смысле, что две измеримые функции, заданные на некотором отрезке времени, равны, если их значения совпадают почти всюду на этом отрезке. Управления убегающих $E_j (j \in N_m \setminus J_0(y(0), \partial G))$ произвольны.

На основании лемм 1, 2 заключаем, что преследователь $P_i (i \in I(x(0), G))$ не может поймать ни одного убегающего $E_j (j \in J_0(y(0), \partial G))$, а преследователь $P_i (i \in I(x(0), R^k \setminus G))$ может поймать не более одного убегающего $E_j (j \in J_0(y(0), \partial G))$ на полубесконечном интервале времени. Так как $|J_0(y(0), \partial G)| > |I(x(0), \ R^k \setminus G)|$, то теорема доказана.

Заметим, что из дифференцируемости опорной функции $c(V, \psi)$ в точке

$\psi_0 \in R^k, \|\psi_0\| \neq 0$ следует строгая выпуклость множества V в направлении ψ_0, и, наоборот.

Следствие 1. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт и существует номер $j \in N_m$, такой, что $y_j^0 \notin \operatorname{int} \operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$.

Тогда из начального состояния z^0 разрешима задача убегания.

Данное следствие обобщает на линейные системы известный в случае простого движения результат [9, 10].

Следствие 2. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт, $n = k + 1$ и $m = 2$.

Тогда разрешима глобальная задача убегания.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что $y_1^0 \neq y_2^0$. Обозначим H гиперплоскость, проходящую через точки $x_i^0, i = 1, \ldots, k-2, y_1^0, y_2^0$. Если такая гиперплоскость не единственна, то выберем любую из них. Ясно, что одному из открытых полупространств, определяемых гиперплоскостью H, либо точки $x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0$ не принадлежат, либо принадлежит только одна из них. Следовательно, существует такой выпуклый компакт G, что $y_1^0, y_2^0 \in \partial G$ и $|I(x(0),\ R^k \setminus G)| \leqslant 1$.

Из этого утверждения вытекает, в частности, что на плоскости в игре трех преследователей и двух убегающих в случае простого движения разрешима глобальная задача убегания [3].

Следствие 3. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт, $n = 2k - 1$ и $m = k$.

Тогда разрешима глобальная задача убегания.

Следствие 4. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт, $n = 2k$ и $m = k$, начальное состояние $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_{2k}^0, y_1^0, \ldots, y_k^0)$, такое, что $y_s^0 \neq y_q^0$ для любых $s, q \in N_k, s \neq q$, и начальные положения каких-либо $k + 1$ игроков лежат в одной гиперплоскости.

Тогда из начального состояния z^0 разрешима задача убегания.

Теорема 2. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт с гладкой границей. Если существуют множества $G_1, G_2 \in \operatorname{co}\Omega(R^k)$ такие, что $x_i^0 \in G_1 \cup G_2$ для любого $i \in N_n$ и

$$|I(x(0),\ G_1 \setminus G_2)| < |J(y(0), R^k \setminus (G_1 \cup G_2))| + |J_0(y(0), \partial G_2)|$$

Тогда из начального состояния z^0 разрешима задача убегания.

Доказательство. Поскольку множество $X(\delta; G_2, V)$ при сколь угодно малом $\delta > 0$ – выпуклый компакт с гладкой границей, то можем считать, что множество G_2 имеет гладкую границу. В этом случае множество $P(G_2, y_j^0)$ при любом $j \in J_0(y(0), \partial G_2)$ состоит из единственной точки r_j. Определим управление $\upsilon_j(t)$, $t \geqslant 0$, для любого $j \in J_0(y(0), \partial G_2)$ из условия (3.6), взяв в качестве $\psi_j(t, r_j)$ решение системы (1.2), соответствующее начальному условию $\psi_j(0) = r_j$. Управления убегающих $E_j (j \in N_m \setminus [J(y(0), R^k \setminus (G_1 \cup G_2)) \cup J_0(y(0), \partial G_2)])$ зададим произвольным образом.

Доказательство теоремы проведем по индукции относительно числа убегающих, начальные положения которых принадлежат множеству $R^k \setminus (G_1 \cup G_2)$. Обозначим $l = |J(y(0), R^k \setminus (G_1 \cup G_2))|$.

Рассмотрим случай $l = 1$. Для любого $i \in I(x(0), \partial G_2)$ определим траекторию $\bar{x}_i(t), t \geqslant 0$, которая исходит из точки x_i^0 и соответствует управлению $\bar{u}_i(t)$, выбираемому из равенства

$$(\bar{u}_i(t),\ \psi_i(t, \bar{r}_i)) = c(V, \psi_i(t, \bar{r}_i))$$

где $\psi_i(t,\bar r_i)$ – решение системы (1.2) при $\psi_i(0)=\bar r_i$, $\bar r_i \in P(G_2,x_i^0)$. Так как V – строго выпуклое множество и G_2 – компакт с гладкой границей, то траектории $y_j(t)$, $j\in J_0(y(0),\partial G_2)$, $\bar x_i(t), i\in I(x(0),\partial G_2), t\geqslant 0$ определяются единственным образом.

Управление $\upsilon_j(t), t\in[0,t(r_j))$, $j\in J(y(0),R^k\setminus(G_1\cup G_2))$ определим из условия (3.6), в котором $\psi_j(t,r_j)$ – решение системы (1.2), соответствующее начальному условию $\psi_j(0)=r_j, r_j\in P<(G_1,y_1^0)$, причем, вектор r_j такой, что справедливы соотношения

$$y_j(t(r_j),r_j)\neq \bar x_i(t(r_j)),\ \ \forall i\in I(x(0),\partial G_2) \tag{3.7}$$

$$y_j(t(r_j),r_j)\neq y_s(t(r_j)),\ \ \forall s\in J_0(y(0),\partial G_2) \tag{3.8}$$

Здесь $y_j(t,r_j)$ – соответствующая траектория игрока $E_j(j\in J(y(0), R^k\setminus(G_1\cup G_2)))$, $t(r_j)$ – первый момент времени, когда $y_j(t,r_j)\in X(t;G_2,V)$. Если $y_j(t,r_j)\notin X(t;G_2,V)$ при любом $t\geqslant 0$, то в силу лемм 1,2 игрок $E_j(j\in J(y(0),R^k\setminus(G_1\cup G_2)))$ при так выбранном управлении избежит поимки. Поэтому считаем, что $t(r_j)<+\infty$.

Покажем, что вектор $r_j\in P(G_1,y_j^0), j\in J(y(0),R^k\setminus(G_1\cup G_2))$, при котором выполнены неравенства (3.7), (3.8). Действительно, так как V – компакт с гладкой границей, то

$$y_j(t,r_j^1)\neq y_j(t,r_j^2) \text{ при } t>0 \tag{3.9}$$

если $r_j^1,r_j^2\in P(G_1,y_j^0)$, $r_j^1\neq r_j^2$.

Заметим, что если при некотором $r_j^1\in P(G_1,y_j^0)$, $j\in J(y(0),R^k\setminus(G_1\cup G_2))$, выполнено равенство

$$y_j\left(t(r_j^1),r_j^1\right)=\bar x_s\left(t(r_j^1)\right) \tag{3.10}$$

для некоторого $s\in I(x(0),\partial G_2)$, то при любом другом векторе $r_j^2\in P(G_1,y_j^0), r_j^1\neq r_j^2$ (предполагаем, что $t(r_j^2)<+\infty$) справедливо соотношение

$$y_j\left(t(r_j^2),\ r_j^2\right)\neq \bar x_s\left(t(r_j^2)\right) \tag{3.11}$$

Докажем это. Предположим противное:

$$y_j\left(t(r_j^2),r_j^2\right)=\bar x_s\left(t(r_j^2)\right) \tag{3.12}$$

Из соотношений (3.9), (3.10), (3.12) следует, что $t\left(r_j^1\right)\neq t\left(r_j^2\right)$. Не ограничивая общности, можем считать, что $t\left(r_j^1\right)<t\left(r_j^2\right)$.

Поскольку

$$\bar x_s\left(t\left(r_j^1\right)\right)\in\partial X\left(t\left(r_j^1\right);\ y_j^0,V\right)$$

$$\bar x_s\left(t\left(r_j^2\right)\right)\in\partial X\left(t\left(r_j^2\right);\ y_j^0,V\right)$$

и выполнено равенство (3.10), то в силу лемм 1–3 $\bar x_s(t(r_j^2))=y_j(t(r_j^2),r_j^1)$, что противоречит (3.9). Тем самым неравенство (3.11) доказано.

Таким образом, убегающий $E_j(j\in J(y(0),R^k\setminus(G_1\cup G_2)))$, зная начальные положения игроков $P_i(i \in I(x(0),\partial G_2)), E_q(q \in J_0(y(0),\partial G_2))$ выбирает в качестве $\psi_j(0)$ такой вектор $r_j \in P(G_1, y_j^0)$, что для соответствующей траектории $y_j(t,r_j)$, $t \geqslant 0$, в момент $t = t(r_j)$ справедливы неравенства (3.7), (3.8).

Понятно, что каковы бы ни были управления игроков P_i ($i = 1, \ldots, n$) на отрезке $[0, t(r_j)]$, в момент $t = t(r_j)$ состояние $z(t(r_j))$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В качестве множества G, фигурирующего в формулировке теоремы 1, можно взять $X(t(r_j); G_2; V)$.

Пусть условия теоремы выполнены и при $l \leqslant r$ в игре (2.1) из начального состояния z^0 возможно убегание. Покажем, что теорема верна при $l = r + 1$. Зафиксируем некоторое множество $F \in \operatorname{co}\Omega(R^k)$, такое, что $0 \in \operatorname{int} F$. Можем считать, что

$$J(y(0),\ R^k \setminus (G_1 \cup G_2)) = N_{r+1}$$

$$y_s^0 \in \partial(G_1 + \varepsilon_s F),\ \varepsilon_s > 0,\ s = 1, \ldots, r+1$$

причем $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_{r+1} > \varepsilon_{r+2} = 0$. Действительно, если существует такой $q \in \{2, \ldots$ $\ldots, r + 1\}$, при котором $\varepsilon_{q-1} = \varepsilon_q, \varepsilon_q > \varepsilon_{q+1}$, то можно построить управления убегающих $E_j (j = 1, \ldots, r + 1)$ на полуинтервале $[0, \delta)$ ($\delta > 0$ – сколь угодно малое число) так, что

$$y_s(\delta) \in \partial(X(\delta; G_1, V) + \varepsilon_s \exp(\delta A)F),\ \ \forall s \in N_{r+1} \setminus \{q\}$$

$$y_q(\delta) \in \partial(X(\delta; G_1, V) + \varepsilon_q' \exp(\delta A)F),\ \ \varepsilon_{q-1} > \varepsilon_q' > \varepsilon_{q+1}$$

Управление $\upsilon_j(t) (j \in N_{r+1})$ определим из условия (3.6), в котором $\psi_j(t, r_j)$ – решение системы (1.2), соответствующее начальному условию $\psi_j(0) = r_j$, $r_j \in P(G_1 +$ $+\varepsilon_{j+1}F, y_j^0)$, причем вектор r_j такой, что выполнены неравенства (3.7), (3.8). Предполагаем, что для любого $j \in N_{r+1}$ существует момент $t = t(r_j) < +\infty$, в который впервые $y_j(t, r_j) \in X(t; G_2, V)$.

Пусть $t^* = \min\limits_{j \in N_{r+1}} t(r_j)$. Учитывая способ построения управлений убегающих, леммы 1, 2 и индукционное предположение, заключаем, что в игре (2.1) из начального состояния $z(t^*)$ возможно убегание. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт с гладкой границей, $n = 2k$, $m = k$, начальное состояние z^0 такое, что $y_s^0 \neq y_q^0$ для любых $s, q \in N_k, s \neq q$, и существуют попарно различные $i_1, \ldots, i_{k+1} \in N_{2k}$, для которых

$$y_j^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{k+1}}^0\right\},\ \ j = 1, \ldots, k$$

Тогда из начального состояния z^0 разрешима задача убегания.

Доказательство. Пусть $y_j^0 \notin \operatorname{int} \operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_{k+1}^0\}$, $j = 1, \ldots, k$. Рассмотрим можества $G_1 = \operatorname{co}\{x_{k+2}^0, \ldots, x_{2k}^0\}$, $G_2 = \operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_{k+1}^0\}$. Если для некоторого $j \in N_k$ $y_j^0 \in G_1$, то в силу следствия 4 из начального состояния z^0 возможно убегание. Если же $y_j^0 \notin G_1$ ($j =$ $= 1, \ldots, k$), то для начального состояния z^0 все условия теоремы 2 выполнены.

Замечание 1. Пусть в R^k заданы точки $x_i (i = 1, \ldots, n, n \geqslant k + 2)$, $y_j (j = 1, \ldots, m,$ $m \leqslant k)$ и для любых попарно различных $i_i, \ldots, i_{k+1} \in N_n$ найдется такой номер $j \in N_m$, что

$$y_j \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}}\right\}$$

Тогда

$$x_{i_{k+2}} \notin \mathrm{co}\left\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{k+1}}\right\}$$

для любых попарно различных $i_1,\ldots,i_{k+2} \in N_n$.

Замечание 2. Если в $R^k (k \geqslant 3)$ заданы точки $x_i (i=1,\ldots,k+2), y_1, y_2$, то существуют такие попарно различные $i_1,\ldots,i_{k+1} \in N_{k+2}$, что

$$y_j \notin \mathrm{int\,co}\left\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{k+1}}\right\},\ j=1,2 \tag{3.13}$$

Доказательство. Предположим противное: для любых попарно различных $i_1,\ldots,i_{k+1} \in N_{k+2}$ существует такой $j \in N_2$, что

$$y_j \in \mathrm{int\,co}\left\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{k+1}}\right\}$$

Не ограничивая общности, имеем

$$y_1 \in \mathrm{int\,co}\left\{x_1,\ldots,x_{k+1}\right\}$$

$$y_2 \in \mathrm{int\,co}\left\{x_1,\ldots,x_{k+2}\right\} \setminus \mathrm{co}\left\{x_1,\ldots,x_{k+1}\right\}$$

Симплекс $B = \mathrm{co}\{x_1,\ldots, x_{k+1}\}$ представим в виде пересечения $k + 1$ замкнутых полупространств $\overline{H}_i^+$. Так как $x_{k+2} \notin B$, то найдется хотя бы одно полупространство $\overline{H}_i^+$, которому точка x_{k+2} не принадлежит. Пусть

$$x_{k+2} \in \bigcup_{r=l}^{k+1} \overline{H}_r^+ \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{l} \overline{H}_r^+\right),\ l \geqslant 1$$

Если $l > 1$, то рассмотрим lk-мерных симплексов, каждый из которых есть выпуклая оболочка, натянутая на x_{k+2} и $(k - 1)$-мерную главную грань симплекса B, лежащую в гиперплоскости $H_r, r \in N_l$. Здесь H_r – гиперплоскость, ограничивающая полупространство $\overline{H}_r^+$. Ясно, что внутренности этих l симплексов взаимно не пересекаются и внутри множества $\mathrm{co}\{x_1,\ldots,x_{k+2}\}$ должны лежать начальные положения, по меньшей мере, $l + 1$ убегающих.

Пусть $l = 1$. Можем считать, что гиперплоскость H_1 проходит через точки $x_1,\ldots, x_k$ и $x_{k+1} \in \overline{H}_1^+$. Рассмотрим k-мерные симплексы

$$\begin{aligned}
A_1 &= \mathrm{co}\left\{x_2, x_3,\ldots,x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right\}\\
A_2 &= \mathrm{co}\left\{x_1, x_3,\ldots,x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right\}\\
&\vdots\\
A_k &= \mathrm{co}\left\{x_1, x_2,\ldots,x_{k-1}, x_{k+1}, x_{k+2}\right\}
\end{aligned}$$

Покажем, что внутренности любых двух из них не пересекаются. Например, возьмем симплексы A_1, A_2 и найдем гиперплоскость, разделяющую их. Для этого рассмотрим конус, представляющий собой объединение всевозможных лучей, исходящих из точки x_{k+1} и проходящих через точки множества $\mathrm{co}\{x_1^0,\ldots,x_k^0\}$. Он содержит внутри себя точку x_{k+2}^0. Поэтому гиперплоскость H, проходящая через точки $x_3^0, x_4^0,\ldots,x_{k+1}^0, x_{k+2}^0$ пересекает внутренность этого конуса и, следовательно, точки x_1^0, x_2^0 расположены по разные стороны от H. Понятно, что гиперплоскость H разделяет множества A_1 и A_2. Таким образом, внутри множества $\mathrm{co}\{x_1^0,\ldots,x_{k+2}^0\}$ находятся начальные положения, по крайней мере убегающих k. Пришли к противоречию.

Итак, каковы бы ни были точки $x_i (i=1,\ldots,k+2)$, y_1^0, y_2^0 пространства $R^k (k \geqslant 3)$ всегда существуют такие попарно различные $i_1,\ldots,i_{k+1} \in N_{k+2}$, что выполнено условие (3.13).

4. При помощи приведенных выше условий разрешимости локальной задачи убегания изучим глобальную задачу убегания в нескольких конкретных примерах.

Теорема 3. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт с гладкой границей, $n = k + 2$ и $m = 2$.

Тогда разрешима задача убегания.

Доказательство. Пусть $z^0 = (x_1^0, \dots, x_{k+2}^0, y_1^0, y_2^0)$ – некоторое произвольно выбранное начальное состояние. Не нарушая общности, можем считать, что $y_1^0 \neq y_2^0$. Предположим, что $k = 2$ и

$$y_j^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_1^0, \dots, x_4^0\right\}, \quad j = 1,2$$

Если найдутся такие попарно различные $i_1, i_2, i_3 \in N_4$, что

$$y_j^0 \notin \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, x_{i_3}^0\right\}, \quad j = 1,2$$

то в силу следствия 5 задача убегания разрешима. Отсюда, в частности, имеем, что если начальные положения каких-либо трех игроков лежат на одной прямой, то из начального состояния возможно убегание. Это утверждение следует также из следствия 4.

Пусть для любых попарно различных $i_1, i_2, i_3 \in N_4$ найдется $j \in N_2$ такой, что $y_j^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, x_{i_3}^0\}$. Если

$$y_1^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\{y_2^0, x_{i_1}^0, x_{i_2}^0\}, \quad i_1, i_2 \in N_4 \tag{4.1}$$

то, нетрудно видеть, что

$$y_2^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\{y_1^0, x_{i_3}^0, x_{i_4}^0\}, \quad i_3, i_4 \in N_4 \setminus \left\{i_1, i_2\right\} \tag{4.2}$$

Итак, множество N_4 разбивается на два непересекающихся множества $I_1 = \{i_1, i_2\}$, $I_2 = \{i_3, i_4\}$, для которых выполнены (4.1), (4.2).

В начальный момент выберем два множества $F_1, F_2 \in \operatorname{co} \Omega(R^k)$, такие, что

$$x_{i_l}^0, x_{i_{l+1}}^0 \in \operatorname{int} F_j, \quad l = 2j - 1, \quad y_j^0 \in \partial F_j, \quad j = 1,2 \tag{4.3}$$

и существуют векторы $r_j \in P(F_j, y_j^0) (j = 1,2)$, для которых

$$y_1(t, r_1) \neq y_2(t, r_2) \text{ при } t \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Здесь $y_j(t, r_j)$ – траектория игрока E_j, соответствующая управлению $\upsilon_j(t)$, выбираемому из равенства (3.6), в котором $\psi_j(t, r_j)$ – решение системы (1.2), соответствующее начальному условию $\psi_j(0) = r_j$. Зафиксируем векторы $r_j \in P(F_j, y_j^0)$ удовлетворяющие неравенству (4.4).

Обозначим $t(r_j)$ – момент времени, в который впервые $y_j(t, r_j) \in X(t; F_l, V)$, $l \in N_2 \setminus \{j\} (j = 1,2)$. Если для некоторого $q \in N_2 y_q(t, r_q) \notin X(t, F_l, V)$, $l \in N_2 \setminus \{q\}$, при всех $t \geqslant 0$, то убегающий E_q может избежать поимки. Поэтому считаем, что $t(r_j) < +\infty (j = 1,2)$. Не уменьшая общности, $t(r_1) \leqslant t(r_2)$.

До момента $t' \in (0, t(r_1))$, в который впервые три игрока лежат на одной прямой, управление $\upsilon_j(t) (j = 1,2)$ находим из равенства (3.6). Такой момент t' существует, поскольку

$$y_j(t(r_1), r_j) \in \partial X(t(r_1);\ F_2, V), \quad j = 1,2$$

$$x_{i_3}(t(r_1)),\ x_{i_4}(t(r_1)) \in \operatorname{int} X(t(r_1);\ F_2, V)$$

при любых управлениях $u_{i_3}(t), u_{i_4}(t)$ на отрезке $[0, t(r_1)]$ и следовательно,

$$y_2(t(r_1), r_2) \notin \operatorname{co}\left\{y_1(t(r_1), r_1),\ x_{i_3}(t(r_1)),\ x_{i_4}(t(r_1))\right\}$$

В момент t' из состояния $z(t') = (x_1(t'), \ldots, x_4(t'), y_1(t'), y_2(t'))$ в силу следствия 4 разрешима задача убегания.

Если $k > 2$, то разрешимость глобальной задачи убегания в игре (2.1) при $n = k + 2$, $m = 2$ следует из замечания 2. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт с гладкой границей, $n = 2k$ и $m = k$.

Тогда разрешима глобальная задача убегания.

Доказательство. При $k = 2$ данное утверждение уже доказано. Пусть $k \geqslant 3$ и $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_{2k}^0, y_1^0, \ldots, y_k^0)$ – некоторое начальное состояние. Если найдутся такие попарно различные $i_1, \ldots, i_{k+1} \in N_{2k}$, что

$$y_j^0 \notin \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{k+1}}^0\right\},\ j = 1, \ldots, k \tag{4.5}$$

то в силу следствия 5 задача убегания разрешима. Предположим, что для любых попарно различных $i_1, \ldots, i_{k+1} \in N_{2k}$ найдется такой $j \in N_k$, что

$$y_j^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{k+1}}^0\right\}$$

Из замечания 1 следует, что

$$x_{i_{k+2}}^0 \notin \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{k+1}}^0\right\}$$

для любых попарно различных $i_1, \ldots, i_{k+2} \in N_{2k}$. Тогда при любом $l \in N_k$

$$x_{k+l}^0 \notin \operatorname{co}\left\{x_1^0, \ldots, x_{k+l-1}^0\right\}$$

и найдется номер $j_l \in N_k$, такой, что

$$y_{j_l}^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_1^0, \ldots, x_{k+l}^0\right\} \setminus \operatorname{co}\left\{x_1^0, \ldots, x_{k+l-1}^0\right\}$$

Поскольку в игре участвуют k убегающих, то множеству $\operatorname{int} \operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_{k+l}^0\}$ принадлежат начальные положения ровно l убегающих. При этом для любых попарно различных $i_1, \ldots, i_{k+1} \in N_{k+l}$ найдется $j \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, при котором

$$y_j^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{k+1}}^0\right\}$$

Однако уже при $l = 2$ в силу замечания 2 найдутся такие попарно различные $i_1, \ldots, i_{k+1} \in N_{k+2}$, что $y_{j_l}^0 \notin \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{k+1}}^0\right\}$, $l = 1, 2$. Пришли к противоречию.

Следовательно, при любом начальном состоянии z^0 найдутся такие попарно различные $i_1, \ldots, i_{k+1} \in N_{2k}$, что выполнено условие (4.5). Теорема доказана.

Была получена [2] оценка сверху минимального количества убегающих, при котором в игре с n преследователями для простого движения разрешима глобальная задача убегания. В случае игры (2.1) при некоторых достаточно слабых предположениях относительно областей значений управлений игроков эта оценка также имеет место. Обозначим $[a]$ целую часть числа a.

Теорема 5. Пусть в игре (2.1) V – строго выпуклый компакт с гладкой границей. Если $n \geqslant 2$, $m \geqslant (p + 1)2^{p+1} + 2$, $p = [\log_2(n - 1)]$.

Тогда разрешима глобальная задача убегания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Петров Н.Н., Петров Н.Н.* О дифференциальной игре "казаки-разбойники" // Диф. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
3. *Григоренко Н.Л.* Задача преследования в дифференциальных играх многих лиц // Мат. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 36–45.
4. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63, 78.
5. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* О задаче взаимодействия групп управляемых объектов // Задачи последовательного управления и конструкции расширений. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. С. 60–69.
6. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 385 с.
7. *Благодатских В.И.* Теория дифференциальных включений. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1979. 89 с.
8. *Благодатских В.И.* Линейная теория оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1978, 94 с.
9. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
10. *Чикрий А.А., Прокопович П.В.* О задаче простого преследования группой одного убегающего // Кибернетика и системный анализ. 1992. № 3. С. 131–137.

Поступила в редакцию
15.IV.1993

Киев