УДК 532.546

© 1994 г. Д.Г. Полонский, А.А. Шапиро

УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТАЛЬНОГО СКАЧКА ПРИ МНОГОФАЗНОМ МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ВЫТЕСНЕНИИ

Анализируется устойчивость относительно многомерных возмущений фронтальных скачков многофазных многокомпонентных течений сжимаемых жидкостей и газов в пористой среде. Выводится система дисперсионных уравнений устойчивости произвольного фронта неизотермического вытеснения для любого числа фаз и компонентов. Получен критерий устойчивости относительно возмущений, уходящих с разрыва, которые ранее не учитывались. В качестве примера рассматривается задача об устойчивости скачка концентрации и водонасыщенности при вытеснении нефти раствором активной примеси.

Ранее исследовалась устойчивость вытеснения разновязких несмешивающихся жидкостей в ячейке Хеле-Шоу [1, 2] и в пористой среде [3, 4], а также устойчивость фронта в задаче Баклея–Леверетта [5, 6]. Рассматривались более сложные фильтрационные процессы с межфазным массообменом и фазовыми переходами [7]. Однако при этом учитывались только контактные возмущения, движущиеся со скоростью скачка. Обзор других направлений в исследовании устойчивости фронтального вытеснения дан в [8].

1. Исходная система уравнений. Общая система уравнений, описывающая в крупномасштабном приближении процесс многофазной многокомпонентной фильтрации, может быть записана в виде:

$$\partial\rho_i/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j}_i = 0 \quad (i = 1, 2..., k) \tag{1.1}$$

$$\partial\rho_{k+1}/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j}_{k+1} = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{j}_i = -K_i(\rho_1,..., \rho_{k+1}, p)\,\nabla p \quad (i = 1, 2..., k) \tag{1.3}$$

Здесь ρ_i ($i = 1, 2..., k$) – обобщенные количества фаз (компонентов), $\mathbf{j}_i$ – их потоки, K_i – обобщенная проводимость пористой среды, отвечающая i-му потоку, p – давление (капиллярным скачком давления между фазами пренебрегаем). Например, в модели Баклея–Леверетта [5] $\rho_1 = s$ – насыщенность водной фазы, $\rho_2 = 1-s$, $K_i = Kf_i(s)/\mu_i$ ($i = 1, 2$), где K – проницаемость пористой среды, f_i, μ_i – функции относительных фазовых проницаемостей и динамические вязкости фаз. В общем случае допускается зависимость величин K_i от давления. В качестве одной из величин ρ_i может быть выбрана температура. При этом учитывается только ее конвективный перенос, а эффектами теплопроводности пренебрегают (крупномасштабное приближение [5]).

Приведенная система замкнута, если между функциями ρ_i, ρ_{k+1}, p существует дополнительная связь, имеющая смысл уравнения состояния

$$\rho_{k+1} = \varphi(\rho_1, ..., \rho_k, p) \tag{1.4}$$

Система (1.1)–(1.4) допускает разрывные решения. На разрыве должны выполняться условие непрерывности давления

$$[p] = 0 \tag{1.5}$$

и условия Гюгонио (законы сохранения для величин ρ_i) [9]

$$[\rho_i]\, V_n = [j_{in}] \qquad (i = 1, 2..., k + 1) \tag{1.6}$$

Здесь V_n – нормальная составляющая скорости фронта вытеснения, j_{in} (i = = 1, 2..., k + 1) – нормальные составляющие потоков.

Преобразуем исходную систему таким образом, чтобы выделить "гиперболическую" часть – уравнения переноса величин ρ_i в "эллиптическом" или "параболическом" поле давлений. ("Эллиптический" ("параболический") случаи отвечают условиям несжимаемости (сжимаемости) эффективного потока **j**, вводимого ниже.) Подставим уравнение (1.4) в (1.2). После преобразований находим

$$\varphi_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \varphi_p \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{k+1} = 0 \;\; (i=1,\ 2...,k); \;\; \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_i},\ \varphi_p = \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу.

Подставляя в последнее уравнение производные $\partial\rho_i/\partial t$, выраженные из (1.1), приводим его к виду

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \mathbf{j}_n \nabla \varphi_n + \varphi_p \partial p/\partial t = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{k+1} - \varphi_n \mathbf{j}_n \quad (n = 1, 2..., k) \tag{1.7}$$

Поток **j** выражается из уравнений (1.3)

$$\mathbf{j} = -K\nabla p, \qquad K = K_{k+1} - \varphi_n K_n$$

В дальнейшем предполагаем, что надлежащим выбором потоков j_i можно добиться, чтобы величина K нигде не обращалась в нуль. Более сильное предположение $K > 0$ отвечает физическим представлениям о сопротивлении пористой среды многокомпонентному потоку. В этом случае потоки $\mathbf{j}_i$ выражаются через **j**

$$\mathbf{j}_i = f_i \mathbf{j}, f_i\, (\rho_1,..., \rho_k, p) = K_i/K, \qquad j_i = f_i j, \qquad f_i(\rho_1,..., \rho_k, p) = K_i/K \tag{1.8}$$

После подстановки уравнений (1.7), (1.8) в (1.1) получаем преобразованную систему в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + A_{ij}(\mathbf{j}\nabla\rho_j) - f_i \varphi_p \frac{\partial p}{\partial t} - f_i B(\mathbf{j}\nabla p) = 0 \;\; (i=1,\ 2...,\ k)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \mathbf{j}(b_j \nabla \rho_j) + \varphi_p \frac{\partial p}{\partial t} + B(\mathbf{j}\nabla p) = 0, \;\; \mathbf{j} = -K\nabla p \tag{1.9}$$

$$b_j = f_n \frac{\partial \rho_n}{\partial \rho_j},\ B = f_n \frac{\partial \rho_n}{\partial p},\ A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} - f_i b_j;\ (i,\ j=1,\ 2...,\ k)$$

Характер переноса величин ρ_j определяется матрицей $\mathbf{A} = [A_{ij}]$. "Гиперболичность" переноса означает, что матрица **A** имеет k действительных и различных собственных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k$. Предполагается, что это условие выполнено по крайней мере в окрестности исследуемой точки разрыва.

Заметим, что при переходе через разрыв порядок расположения собственных чисел может изменяться. Поэтому одни и те же собственные числа (как функции гидродинамических переменных) могут до и после разрыва иметь разные номера.

Более общий случай нестрогой гиперболичности, когда собственные числа могут совпадать, рассматривается аналогично.

2. Уравнения в окрестности фронта вытеснения. Пусть 0 – произвольная точка фронта. Рассмотрим ее движение в некоторый (без ограничения общности – нулевой) момент времени. Ось $0x$ направим по нормали к фронту. Предположим, что его скорость в рассматриваемый момент времени равна V, давление в точке 0 равно p_f.

Произведем замену переменных по формулам

$$x - Vt = \varepsilon x', \quad y = \varepsilon y', \quad z = \varepsilon z', \quad p - p_f = \varepsilon p' \tag{2.1}$$

Выберем параметр ε достаточно малым, что соответствует переходу в окрестность точки 0. Пренебрегая членами порядка ε и опуская штрихи в обозначениях, приводим систему (1.9) к виду

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + A_{ij}\mathbf{j}\nabla\rho_j - V\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = 0 \quad (i = 1,\ 2\ldots,\ k),\ \operatorname{div}\mathbf{j} + b_i(\mathbf{j}\nabla\rho_i) = 0, \quad \mathbf{j} = -K\nabla p \tag{2.2}$$

В низшем приближении по ε коэффициенты A_{ij}, b_j, K не зависят от p и определяются при давлении, равном p_f.

Опишем нулевое приближение в окрестности фронта. Будем рассматривать фронтальный разрыв: $\mathbf{j}_x = (j, 0{,}0)$. При этом в окрестности точки 0 (при достаточно малых ε) плотности и потоки в уравнениях (2.2) можно считать постоянными: $\rho_i = \rho_i^0 = \rho_i^{\pm}$, $j_x = j_x^0 = j_x^{\pm}$ (индексы минус и плюс относятся к величинам до и после разрыва соответственно). Тогда поле давлений описывается линейной зависимостью

$$\partial p^0 / \partial x = j_x^0 / K^0 = \kappa^0 = \kappa^{\pm}; \quad \partial p^0 / \partial y = \partial p^0 / \partial z = 0 \tag{2.3}$$

Условия Гюгонио на разрыве принимают вид

$$[\rho_i^0]V = [f_i^0 j_x^0] \ (i = 1,\ 2\ldots,\ k), \quad [\rho_{k+1}^0]V = [j_x^0] + [\varphi_i^0 f_i^0 j_x^0], \quad [p^0] = 0 \tag{2.4}$$

Кроме соотношений (2.4) на разрыве должны выполняться дополнительные условия устойчивости относительно одномерных возмущений – условия Лакса [9]. Для одномерной устойчивости необходимо, чтобы на разрыв приходила $k + 1$ гиперболическая характеристика системы. Соответствующая система неравенств может быть записана в виде

$$j_x^+\lambda_1^+ < \ldots < j_x^+\lambda_l^+ < V < j_x^-\lambda_l^- < \ldots < j_x^-\lambda_k^- \tag{2.5}$$

для некоторого l, $1 < l < k$.

3. Система уравнений для возмущений. Рассмотрим малое возмущение исходного фронта вытеснения. Ему отвечают малые отклонения давления, плотностей и потоков $\mathbf{j}^1$, ρ_i^1, p^1. Линеаризованная система уравнений относительно этих величин имеет вид

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + (j_x^0\mathbf{A}^0 - V\mathbf{I})\frac{\partial \rho^1}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}Q^1 + \frac{\partial}{\partial y}j_y^1 + \frac{\partial}{\partial z}j_z^1 = 0, \quad Q^1 = j_x^1 + b_j^0\rho_j^1 \tag{3.2}$$

$$Q^1 = -K^0\frac{\partial p^1}{\partial x} - D^0\rho^1, \quad j_y^1 = -K^0\frac{\partial p^1}{\partial y}, \quad j_z^1 = -K^0\frac{\partial p^1}{\partial z} \tag{3.3}$$

Отклонение разрыва от невозмущенного (нулевого) состояния обозначим $X^1(t, y, z)$. Условия на разрыве, при учете введенных в (1.9) коэффициентов, могут быть записаны в виде

$$[\rho^0]\partial X^1 / \partial t = [(j_x^0\mathbf{A}^0 - V\mathbf{I})\rho^1] + [f^0 Q^1] \tag{3.4}$$

$$[\rho_{k+1}^0]\partial X^1 / \partial t = [\Phi^{0T}(\mathbf{A} - V\mathbf{I})\rho^1] + [(\Phi^0 \cdot f^0)Q^1] + [Q^1] \tag{3.5}$$

$$[p^1] = -[\kappa^0]X^1 \tag{3.6}$$

В уравнениях (3.1)–(3.6) индексы 0, 1 относятся к нулевому и первому приближениям соответственно, $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$ – единичная матрица, ρ^0, ρ^1, f^0, Φ^0, D^0 – векторы, составленные из коэффициентов ρ_j^0, ρ_j^1, f_j^0, φ_j^0, D_j^0 ($j = 1, 2..., k$), причем последние коэффициенты определяются как

$$D_j^0 = \kappa_\partial^0 K^0 / \partial\rho_j - b_j^0 \tag{3.7}$$

Уравнения (3.1), (3.4) – векторные (системы из k уравнений), первое слагаемое в правой части (3.5) – свертка двух векторов с матрицей $\mathbf{A} - V\mathbf{I}$. Условие (3.6) есть следствие условия (1.5) непрерывности давления и "сноса" условий на разрыве на плоскость $x = 0$ [1].

Коэффициенты в системе (3.1)–(3.3) зависят от величин $\rho_j^\pm$, $j_x^\pm$, которые терпят разрыв при $x = 0$. Таким образом, (3.1)–(3.3) можно рассматривать как две системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, связанные между собой граничными условиями (3.4)–(3.6) при $x = 0$. Дополнительно требуется, чтобы возмущения стремились к нулю при $x \to -\infty$ в области перед разрывом и при $x \to +\infty$ в области за разрывом. Начальные условия для системы (3.1)–(3.3) остаются неопределенными.

Фронт вытеснения считается неустойчивым, если существуют решения поставленной задачи, неограниченно растущие при $t \to \infty$.

4. Вывод дисперсионных соотношений. Система (3.1) линейных гиперболических уравнений независима от уравнений (3.2), (3.3). Ее общее решение есть сумма стационарного решения, отвечающего "контактным" возмущениям, которые движутся со скоростью разрыва, и нестационарного решения для возмущений, скорость которых отличается от скорости разрыва. Первый тип возмущений будет рассмотрен в следующем разделе. Часть общего решения, отвечающая нестационарным возмущениям, имеет вид

$$\rho^1 = \sum_{\alpha=1,\ \lambda_\alpha^0 \neq V}^{k} d^\alpha \Psi^\alpha\left(t - \frac{x}{j_x^0 \lambda_\alpha^0 - V},\ y,\ z\right) \tag{4.1}$$

Здесь d^α – правые собственные вектора матрицы $\mathbf{A}^0$, λ_α^0 – ее собственные числа, Ψ^α – произвольные функции ($\alpha = 1, 2..., k$). Без ограничения общности выберем эти функции в виде

$$\Psi^\alpha = C^\alpha(y,\ z)\exp\left\{\omega\left(t - \frac{x}{j_x^0 \lambda_\alpha^0 - V}\right)\right\},\quad \omega = \mathrm{const} \tag{4.2}$$

что отвечает разложению произвольного решения ρ^1 в интеграл $\int e^{\omega t}\rho^*(\omega,\ x,\ y,\ z)d\omega$, которое возникает в результате применения метода разделения переменных (временной и пространственных) к системе (3.1). Неизвестные функции, входящие в уравнения (3.2)–(3.6), представляются в аналогичном виде

$$Q^1 = Q^*(x,\ y,\ z)e^{\omega t},\quad p^1 = p^*(x,\ y,\ z)e^{\omega t},\quad X^1 = X^*(y,\ z)e^{\omega t} \tag{4.3}$$

Допустим, что система (3.1)–(3.6) имеет решение, отвечающее неустойчивости разрыва. Тогда

$$\mathrm{Re}\,\omega > 0 \tag{4.4}$$

С другой стороны, величина ρ^1 должна стремиться к нулю при $x \to \pm\infty$. В силу условий Лакса (2.5) это приводит к отбрасыванию в сумме (4.1) слагаемых, отвечающих возмущениям, приходящим на разрыв.

Учитывая в выражении (4.1) только слагаемые, обращающиеся в нуль при $x \to \pm\infty$ (отвечающие уходящим с разрыва характеристикам), приводим его к виду

$$\rho^{*-} = \sum_{\alpha=1}^{l-1} C^{\alpha-} d^{\alpha-} \exp\left(-\frac{\omega x}{j_x^- \lambda_\alpha^- - V}\right) \quad (j_x^- \lambda_\alpha^- - V < 0)$$

$$\rho^{*+} = \sum_{\alpha=l+1}^{k} C^{\alpha+} d^{\alpha+} \exp\left(-\frac{\omega x}{j_x^+ \lambda_\alpha^+ - V}\right) \quad (j_x^+ \lambda_\alpha^+ - V > 0) \tag{4.5}$$

Здесь число l – то же, что и в условиях Лакса (2.5).

Для решения уравнений (3.2), (3.3) применим к ним преобразование Фурье по y, z и подставим два последние соотношения (3.3) в (3.2). Сохраняя за образами те же обозначения, что и за оригиналами, и используя (4.3), находим

$$\partial Q^* / \partial x + K^0 \gamma^2 p^* = 0, \quad \gamma^2 = \zeta^2 + \eta^2, \quad Q^* = -K^0 \partial p^* / \partial x - D^0 \rho^*$$

Здесь ζ, η – трансформанты Фурье для z, y соответственно.

Решая полученную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных Q^*, p^* и отбрасывая слагаемые, не стремящиеся к нулю при $x \to \pm\infty$, находим

$$Q^* = Q^\pm \exp(\mp\gamma x) + \sum_\pm G_\alpha \exp(\omega\beta_\alpha x), \quad p^* = \pm\frac{Q^\pm}{K^0\gamma}\exp(\mp\gamma x) - \sum_\pm \frac{\omega\beta_\alpha}{K^0\gamma^2} G_\alpha \exp(\omega\beta_\alpha x) \tag{4.6}$$

$$G_\alpha = \frac{C_\alpha (D^0 d^\alpha)}{\omega^2\beta_\alpha^2 - \gamma^2}, \quad \beta_\alpha = (j_x^0 \lambda_\alpha - V)^{-1} \quad (\alpha = 1, 2\ldots, k)$$

Индекс минус в выражениях $Q^\pm$, $\Sigma_\pm$ относится к величинам перед разрывом, индекс плюс – к величинам за ним. Знаки в уравнениях выбираются в соответствии с этими индексами. Суммирование Σ_+ производится по индексу α от $l+1$ до k, Σ_- – по α от 1 до l–1.

Подставляя решения (4.1)–(4.6) в условия на разрыве (3.4)–(3.6) при учете того, что в этих уравнениях следует положить $x = 0$, после алгебраических преобразований получаем систему уравнений

$$[\rho_i^0] = \sum_{\alpha=l+1}^{k} \frac{U_\alpha^+ d_\alpha^+}{\beta_\alpha^+} - \sum_{\alpha=1}^{l-1} \frac{U_\alpha^- d_\alpha^-}{\beta_\alpha^-} + f^{0+} j^+ - f^{0-} j^- \tag{4.7}$$

$$[\rho_{k+1}^0] = \sum_{\alpha=l+1}^{k} \frac{U_\alpha^+ (\Phi^{0+} d^{\alpha+})}{\beta_\alpha^+} - \sum_{\alpha=1}^{l-1} \frac{U_\alpha^- (\Phi^{0-} d^{\alpha-})}{\beta_\alpha^-} + (\Phi^+ f^{0+}) j^+ - (\Phi^- f^{0-}) j^- + j^+ - j^- \tag{4.8}$$

$$[\kappa^0] = \omega\left(\frac{j^+}{K^+\gamma} + \sum_{\alpha=l+1}^{k} U_\alpha^+ R_\alpha^+ + \frac{j^-}{K^-\gamma} - \sum_{\alpha=1}^{k} U_\alpha^- R_\alpha^-\right) \tag{4.9}$$

Здесь

$$U_\alpha^\pm = \frac{C_\alpha^\pm}{\omega X^*}, \quad R_\alpha^\pm = \frac{(D^{0\pm} d^{\alpha\pm})}{K^\pm \gamma^2 (\omega\beta_\alpha^\pm \pm \gamma)}, \quad j^\pm = \frac{1}{\omega X^*}\left(Q^\pm + \sum_\pm \frac{U_\alpha^\pm (D^0 d^{\alpha\pm})}{\omega^2 \beta_\alpha^{\pm 2} - \gamma^2}\right) \tag{4.10}$$

При выводе уравнений (4.7), (4.8) использовалось то, что векторы $d^{\alpha\pm}$ – собственные для матриц $\mathbf{A}^\pm$. Записи вида $(\Phi^{0+} d^{\alpha+})$, $(\Phi^{0-} d^{\alpha-})$, $(\Phi^+ f^{0+})$, $(\Phi^- f^{0-})$, $(D^{0+} d^{\alpha+})$, $(D^{0-} d^{\alpha-})$ подразумевают скалярные произведения входящих в них векторов.

Систему (4.7), (4.8) следует расматривать как $k + 1$ линейное уравнение относительно $k + 1$ неизвестных j^+, j^-, $U_\alpha^\pm$ $(\alpha = 1, 2..., k; \alpha \neq l)$. Решая эти уравнения и подставляя решения в (4.9), получаем алгебраическое уравнение относительно ω. Фронт неустойчив, если при некотором γ это уравнение имеет решение ω, такое, что Re $\omega > 0$.

Решение упрощается, если суммарный поток несжимаем и исходное уравнение (1.2) имеет вид $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$.

В этом случае уравнения (4.7) и (4.9) остаются без изменений, а (4.8) заменяется на условие

$$j^+ = j^- \tag{4.11}$$

5. Устойчивость относительно контактных возмущений. Пусть $d^{\upsilon+}$, $d^{\upsilon-}$ – векторы, удовлетворяющие уравнениям

$$(\mathbf{A}^+ - V\mathbf{I})d^{\upsilon+} = (\mathbf{A}^- - V\mathbf{I})d^{\upsilon-} = 0 \tag{5.1}$$

Если скорость разрыва V – собственное число матрицы $\mathbf{A}^+$ ($\mathbf{A}^-$), то $d^{\upsilon+}$ ($d^{\upsilon-}$) – соответствующий собственный вектор. В этом случае существует контактная характеристика, совпадающая с разрывом. В противном случае вектор $d^{\upsilon+}$ ($d^{\upsilon-}$) равен нулю.

Кроме решений вида (4.1), система уравнений (3.1)–(3.3) допускает решения, которые стационарны в системе отсчета, связанной с разрывом

$$\rho^{1\upsilon} = d^{\upsilon\pm}\Psi_1^\pm(x, y, z) + \Psi_2^\pm(y, z) \tag{5.2}$$

Как и выше, без ограничения общности полагаем

$$\Psi_1^\pm = C^\pm(y, z)\exp(\beta^\pm x) \tag{5.3}$$

Чтобы удовлетворить условиям при $x \to \infty$, следует положить $\beta^- > 0$, $\beta^+ < 0$, $\Psi_2^\pm = 0$.

Величины p^1 и Q^1 в этом случае имеют вид, аналогичный (4.6):

$$Q^{1\upsilon} = Q^\pm \exp(\mp\gamma x) + H^\pm \exp(\beta^\pm x), \quad p^{1\upsilon} = \mp\frac{1}{K^{0\pm}\gamma}Q^\pm \exp(\mp\gamma x) - H^\pm \exp(\beta^\pm x)$$

$$Q^\pm = Q^\pm(t, y, z), \quad H^\pm \frac{C^\pm(D^{0\pm}d^{\upsilon\pm})}{\beta^{\pm 2} - \gamma^2}$$

Подставляя эти уравнения в условия на разрыве (3.4)–(3.6), используя замену, аналогичную (4.10), и учитывая, что в силу (5.1), (5.2) $(\mathbf{A} - V\,\mathbf{I})\,\rho^* = 0$, получаем систему

$$[\rho_i^0]\frac{\partial X^1}{\partial t} = f^{0+}j^+ - f^{0-}j^- \tag{5.4}$$

$$[\rho_{k+1}^0]\frac{\partial X^1}{\partial t} = j^+ - j^- + (\varphi^{0+}f^{0+})j^+ - (f^{0-}\varphi^{0-})j^- \tag{5.5}$$

$$[\kappa^0]X^1 = \frac{j^+}{K^{0+}\gamma} + \frac{j^-}{K^{0-}\gamma} + \chi^+ - \chi^-, \quad \chi^\pm = \frac{(D^{0\pm}d^{\upsilon\pm})C^\pm}{K^{0\pm}\gamma^2(\beta^\pm \pm \gamma)} \tag{5.6}$$

Заметим, что система уравнений (5.4), (5.5) совпадает с системой условий на разрыве в нулевом приближении (2.4), с точностью до замены V на $\partial X^1/\partial t$ и $j_x^{0\pm}$ на $j^\pm$. Поэтому, в предположении о том, что ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} f_0^+ & f_0^- \\ 1 + (\Phi^{0+}f^{0+}) & 1 + (\Phi^{0-}f^{0-}) \end{bmatrix}$$

равен двум, эта система имеет единственное решение $j^{\pm} = j_x^{0\pm} V^{-1} \partial X^1 / \partial t$.

Подставляя это решение в (5.6), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial X^1}{\partial t} + \lambda X^1 = C, \ \lambda = \frac{-V[\kappa^0]\gamma}{j_x^{0+} / K^{0+} + j_x^{0-} / K^{0-}} = \frac{V\gamma(\kappa^- - \kappa^+)}{\kappa^- + \kappa^+}, \ C = \frac{V\gamma(\chi^- - \chi^+)}{\kappa^- + \kappa^+} \tag{5.7}$$

Величина λ постоянна, величина C зависит от y и z. Уравнение (5.7) имеет решение

$$X^1 - C = (X^1(0) - C) \exp(-\lambda t) \tag{5.8}$$

ограниченное при $t \to \infty$, если $\lambda > 0$.

Отметим, что уравнение (5.7) сохраняет силу (с нулевой постоянной C), если контактные характеристики отсутствуют. В этом случае условие $\lambda > 0$ есть критерий устойчивости разрыва относительно возмущений давления и потока без возмущения плотностей. В отсутствие контактных характеристик величина C равна нулю, и возмущения разрыва затухают на бесконечности. В противном случае они стремятся к постоянным значениям, отличным от нуля.

В часто встречающемся частном случае, когда величины j_x^{0-}, j_x^{0+} и V имеют один знак, условие устойчивости относительно контактных возмущений имеет обычный вид $[\kappa^0] < 0$ [5, 7] – движение устойчиво, если градиент давления в вытесняемой жидкости меньше, чем в вытесняющей. При помощи выражений (2.3) для κ^0 записываем это условие в виде

$$j_x^{0+} / K^{0+} < j_x^{0-} / K^{0-} \tag{5.9}$$

Если поток несжимаем и положителен, то последнее условие принимает вид

$$K^{0-} < K^{0+} \tag{5.10}$$

т.е. фронт вытеснения устойчив, если подвижность вытесняющей фазы меньше подвижности вытесняемой.

Рассмотрим в качестве примера течения, описываемые двумя уравненями вида (1.1), (1.2) ($k = 1$). К ним относятся, например, двухфазное течение несмешивающихся жидкостей (в частном случае несжимаемых фаз это течение Баклея–Леверетта) и двухфазное двухкомпонентное течение в пористой среде [5, 9]. В силу условий Лакса характеристики, уходящие с разрывов таких течений, отсутствуют. Поэтому устойчивость разрывов определяется условием $\lambda > 0$. Для одномерных (плоскопараллельных или плоскорадиальных) течений справедливы предположения, приводящие к условию (5.10). При этом под величинами K^{0+}, K^{0-} следует понимать суммарные подвижности фаз перед и за разрывом.

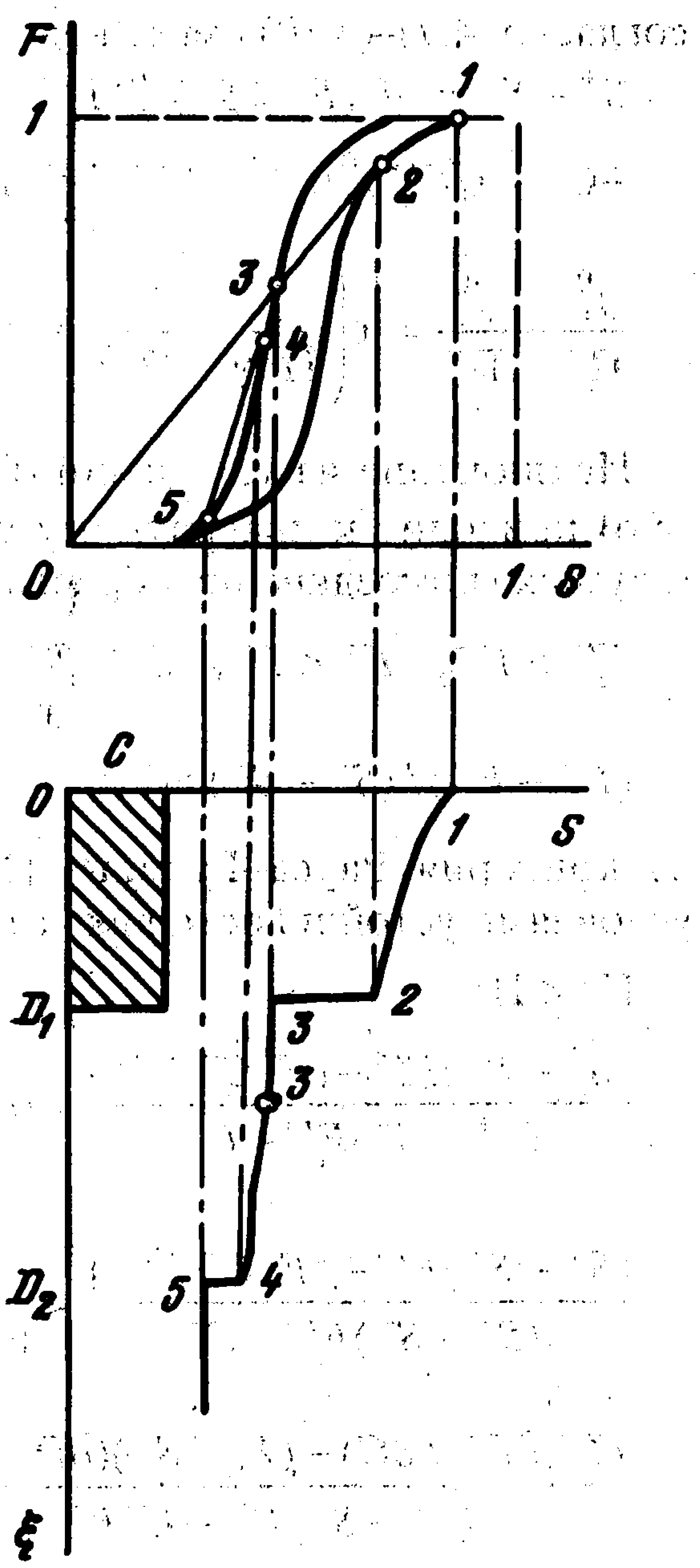
Таким образом, для проверки устойчивости разрыва относительно контактных возмущений необходимо проверить условие $\lambda > 0$. Условие устойчивости относительно возмущений, уходящих с разрыва, состоит в положительности величины ω, определяемой из системы (4.7)–(4.9). Возмущения, приходящие на разрыв, на его устойчивость не влияют.

6. Устойчивость вытеснения раствором активной примеси. Применим развитый выше формализм для нахождения критерия устойчивости разрыва, связанного со скачком концентрации, в автомодельной задаче вытеснения нефти раствором активной примеси. Система уравнений, описывающих такой процесс, имеет вид [5, 10]

$$m\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{j}) = 0, \ m\frac{\partial CS}{\partial t} + \operatorname{div}(CF\mathbf{j}) = 0 \tag{6.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \ \mathbf{j} = -\Pi\nabla p, \ \Pi = \frac{f_0(S, C)}{\mu_0(C)} + \frac{f_w(S, C)}{\mu_w(C)} \tag{6.2}$$

Здесь S – насыщенность водной фазы, C – массовая концентрация примеси, $F = F(S, C)$ – функция Баклея–Леверетта, П – суммарная подвижность фаз, f_0, f_w – функции фазовых проницаемостей, μ_0, μ_w – динамические вязкости нефти и воды, соответственно. Предполагается, что примесь переносится лишь водным потоком и не сорбируется скелетом породы. Более общий случай сорбируемой и растворимой в нефти примеси рассматривается аналогично.



Рассмотрим одномерные решения системы (6.1), (6.2). В этом случае система допускает упрощение. Из первого уравнения (6.2) следует, что поток j зависит только от времени. Вводя новую переменную $\tau = m^{-1}\int \mathrm{j}\, dt$, приводим уравнения (6.1) к виду

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial CF}{\partial x} = 0 \qquad (6.3)$$

Граничные условия, отвечающие вытеснению нефти раствором активной примеси, имеют вид

$$\tau = 0 : S = S^+, C = 0; \; x = 0 : F = 1, S = S^-, C = C^-$$

Система (6.3) с приведенными граничными условиями допускает автомодельное решение, зависящее от одной переменной $\xi = x/\tau$. Это решение строится графоаналитическим методом с использованием плоскости (S, F) (фигура) [5, 8].

Построенное решение, отвечающее случаю высокой начальной водонасыщенности S^+, содержит два скачка. Оно состоит из простой S-волны (участок 1–2), скачка концентрации D_1 (участок 2–3), вырожденной волны (участок 3–3), затем вновь простой S-волны (участок 3–4), скачка водонасыщенности D_2, и вновь вырожденной волны (участок 4–5). В результате подстановки $\xi = x/\tau$ в первое уравнение (6.3) приходим к выражению $\xi = dF\,(S, C)/dS$, означающему, что в плоскости (S, F) автомодельная переменная ξ совпадает с угловым коэффициентом касательной к кривой $F\,(S, C(S))$ [5].

Скачок водонасыщенности D_2 устроен так же, как и в задаче Баклея–Леверетта [5]. Поскольку эта задача описывается двумя уравнениями вида (1.1), (1.2), то единственным условием устойчивости этого скачка служит соотношение подвижностей (5.10). В отличие от скачка D_2 для выяснения вопроса об устойчивости скачка концентрации D_1 необходимо исследовать его устойчивость относительно неконтактных возмущений.

Система (6.1), (6.2) является частным случаем системы уравнений (1.9), в которой следует положить

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} F'_s & F'_c \\ 0 & F/S \end{bmatrix}, \quad B = 0, \quad \varphi_p = b_j = 0$$

Связь систем (6.1), (6.2) и (1.9) позволяет определить линейные уравнения в первом приближении для возмущений движения фронта разрыва (3.1)–(3.3), где

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} S \\ C \end{pmatrix}, \quad Q^1 = -\Pi^0 \frac{\partial p}{\partial X} - D_s^0 S - D_c^0 C, \quad D_s^0 = \frac{j_x^0}{\Pi^0}\frac{\partial \Pi^0}{\partial S}, \quad D_c^0 = \frac{j_x^0}{\Pi^0}\frac{\partial \Pi^0}{\partial C}$$

Система линейных алгебраических уравнений для скачка D_1 в Фурье-образах по y, z

согласно (4.7)–(4.10) имеет вид

$$S^+ - S^- = -U(F^+ / S^+) j_x^0 (F_s'^+ - F_s'^-) + (F^+ - F^-) j \tag{6.4}$$

$$-C^- = U F_c'^+ j_x^0 (F_s'^+ - F_s'^-) - C^- F^- j \tag{6.5}$$

$$\frac{j_x^0}{\Pi^+} - \frac{j_x^0}{\Pi^-} = \omega\left(\frac{j}{\Pi^+\gamma} - \frac{j}{\Pi^-\gamma} + U\left(D_c^0 F_c'^+ - D_s^0 \frac{F^+}{S^+}\right)\left(\Pi^+\gamma^2\left(\frac{\omega}{j_x^0 (F_s'^+ - F_s'^-)} + \gamma\right)\right)^{-1}\right) \tag{6.6}$$

Исключение из уравнений (6.4), (6.5) констант U, j и последующая подстановка в (6.6) приводит к квадратному уравнению относительно декремента возмущений ω. Опуская громоздкие преобразования, при учете условий на скачке [5]

$$F_s'^+ > F_s'^-, \quad F^+ < F^-, \quad S^+ < S^-, \quad F_c' < 0, \quad F_s' > 0$$

$$(F^+ - F^-) / (S^+ - S^-) > 1$$

из критерия Рауса–Гурвица [11] получаем, что необходимыми и достаточными условиями устойчивости для всех волновых чисел γ являются неравенства

$$\Pi^- < \Pi^+ \tag{6.7}$$

$$\frac{(S^+ - S^-) F_c'^+ - (F^+ C^- / S^+)}{(S^+ - S^-) F_c'^+ - C^-} > 0 \tag{6.8}$$

$$\frac{(S^+ - S^-) F_c'^+ - (F^+ C^- / S^+)}{(S^+ - S^-) F_c'^+ - C^-} < \frac{F^+}{(F_s'^+ - F_s'^-) S^+} \tag{6.9}$$

$$\frac{F_c'^+ (\partial \Pi^+ / \partial C) - (F^+ / S^+)(\partial \Pi^+ / \partial S)}{(S^+ - S^-) F'^+ - C^- F^-} > 0 \tag{6.10}$$

Для того чтобы скачок был неустойчив, достаточно нарушения хотя бы одного из этих неравенств. Таким образом, для устойчивости скачка концентрации необходимо, кроме обычного соотношения подвижностей (6.7), выполнение дополнительных условий (6.8)–(6.10). Эти условия нетривиальны и независимы от (6.7). В качестве примера рассмотрим условие (6.9). Предположим, что концентрация $C = C^-$ мала. Тогда слева в этом условии стоит величина, близкая к единице. Так как соотношение производных функций Баклея–Леверетта до и после скачка практически произвольно (известно только, что $F_s'^+ > F_s'^-$), то справа в неравенстве (6.9) может оказаться величина, как большая, так и существенно меньшая единицы.

Точно так же условия (6.8) и (6.10) могут оказаться выполненными либо нарушенными, даже если соотношение подвижностей (6.14) отвечает устойчивости скачка.

Авторы благодарят П.Г. Бедриковецкого, О.Ю. Динариева и А.Т. Ильичева за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1950. V. 201. N 1065. P. 192–196.
2. *Saffman P.G., Taylor G.* The penetration of a liquid into a porous medium or Hele-Show cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. N 1242. P. 312–329.
3. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
4. *Пилатовский В.П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.

5. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
6. *Бернадинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
7. *Зазовский А.Ф.* Об устойчивости фронтального вытеснения жидкостей в пористой среде при наличии межфазного массообмена и фазовых переходов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 98–103.
8. *Басниев К.С., Бедриковецкий П.Г.* Многофазное вытеснение смешивающихся жидкостей из пористых сред // Итоги науки и техники. Сер. комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 3. С. 81–162.
9. *Гельфанд И.М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи мат. наук, 1959. Т. 14. Вып. 2. С. 87–158.
10. *Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И., Степанова Г.С., Терзи В.П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
11. *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.1993