

УДК 532.526

© 1994 г. В.Ю. Ляпидевский

БЛОКИРОВКА ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СМЕШИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

На основе разработанной автором модели течения двухслойной мелкой воды при учете перемешивания между слоями [1] исследуются стационарные режимы обтекания тела при его буксировке по дну канала в тонком однородном слое первоначально покоящейся двухслойной жидкости. Показано, что при сверхкритическом режиме буксировки перед телом формируется локальная докритическая зона, длина которой зависит от высоты тела.

При обтекании неровностей дна сверхкритическим потоком стратифицированной жидкости линейные волны от препятствия не могут распространяться вверх по потоку, и явление блокировки, т.е. торможение частиц жидкости в определенной достаточно узкой области течения, связано с существенно нелинейными особенностями распространения длинных волн. Теоретически и экспериментально исследована [2–5] структура длинных плоских волн в двухслойной жидкости, генерируемых при буксировке тела. Распространение нелинейной волны вверх по потоку перестраивает течение. Возникающий сдвиг скорости между слоями в свою очередь является источником генерации коротких волн и перемешивания на границе раздела однородных слоев. Совместное действие нелинейных эффектов и перемешивания может приводить к стационарной картине обтекания, при которой перед телом формируется конечная область частично заблокированной жидкости. Полученное в работе стационарное непрерывное решение задачи о блокировке потока при сверхкритическом обтекании тела отражает эти особенности течения смешивающихся жидкостей и существенно расширяет область применимости построенной математической модели.

1. Пусть канал с горизонтальным дном заполнен покоящейся двухслойной жидкостью глубины H , причем глубина h_0 нижнего более тяжелого слоя мала по сравнению с H . Задача состоит в том, чтобы описать структуру волн в окрестности удобообтекаемого тела высотой δ_{\max} , буксируемого вдоль дна с постоянной скоростью D .

В приближении Буссинеска ($(\rho^- - \rho^+)/\rho^+ \ll 1$) плоскопараллельное течение характеризуется двумя безразмерными параметрами $\delta = \delta_{\max}/h_0$ и $Fr = D/\sqrt{bh_0}$, где $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+$ – плавучесть нижнего слоя, а ρ^+ и ρ^- – плотности верхнего и нижнего слоев, g – ускорение силы тяжести.

Для несмешивающихся жидкостей при $h_0/H \ll 1$ уравнения движения совпадают с уравнениями однослойной мелкой воды с "модифицированным" ускорением силы тяжести $g' = b$. В этом случае была представлена [2] (Fr, δ) – диаграмма волн, генерируемых при внезапном движении тела. Для сверхкритического режима буксировки ($Fr > 1$) при $\delta < \delta_1(Fr) = Fr^2/2 + 1 - 3Fr^{2/3}/2$ над телом возможен стационарный полностью сверхкритический режим обтекания, а впереди и позади тела возмущения потока нет. С другой стороны, при $\delta > \delta_2(Fr)$ может сформироваться внутренний гидравлический прыжок, распространяющийся со скоростью $D_1 \geq D$. При этом непрерывное стационарное относительно тела течение переводит докритический поток ($|u_1 - D| < \sqrt{bh_1}$) перед телом в сверхкритический ($|u_2 - D| > \sqrt{bh_2}$) за ним. Здесь h_i, u_i – глубины и скорости потока впереди ($i = 1$) и позади ($i = 2$) обтекаемого тела. Монотонная зависимость $\delta =$

$= \delta_2(\text{Fr})$ находится из условия $D_1 = D$ и для $\text{Fr} > 1$ выполнено соотношение $\delta_2(\text{Fr}) < \delta_1(\text{Fr})$ [1]. Таким образом, при сверхкритическом обтекании при $\delta_2(\text{Fr}) < \delta < \delta_1(\text{Fr})$ возможная конфигурация течения неединственна. Экспериментально указанная неединственность течения обнаружена в гораздо более узкой области [4].

Проблема неединственности стационарного течения тесно связана с проблемой выбора соотношений на внутренних гидравлических прыжках. Так, если закон сохранения полного импульса в нижнем слое, применяемый по аналогии с однослойной жидкостью, заменить на условие потенциальности течения, то "гистерезис" исчезает, но в двухслойной системе не сохраняется полный импульс. Хотя имеются различные подходы к выводу соотношений на скачках [6, 7], в рамках модели двухслойного течения эта проблема решена быть не может. Указанное противоречие снимается в более полной трехслойной модели [1], учитывающей такие явления, как перемешивание и генерация коротких волн на границах раздела однородных слоев.

Для смешивающихся жидкостей постановка задачи о блокировке потока и определяющие параметры остаются теми же, что и для случая несмешивающихся жидкостей, но структура волн, порожденных движением тела, существенно меняется. Из-за неоднородности уравнений решение не стремится более к автомодельному, что затрудняет описание асимптотики. С другой стороны, возрастает роль стационарных течений в окрестности тела, так как в отличие от несмешивающихся жидкостей отошедшая от тела волна для некоторой области параметров останавливается за счет перемешивания. Такие стационарные решения, описывающие эффект частичной блокировки потока при сверхкритическом обтекании, являются принципиально новыми и существенно расширяют область применимости уравнений двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела.

В приближении Буссинеска система уравнений плоскопараллельного течения тонкого однородного слоя тяжелой жидкости в затопленном пространстве с учетом перемешивания и мелкомасштабного движения имеет вид [1]5

$$(h + \eta/2)_t + (hu + \eta v/2)_x = 0$$

$$(bh + \bar{b}\eta)_t + (bhu + \bar{b}\eta v)_x = 0$$

$$u_t + (u^2/2 + bh + \bar{b}\eta)_x = 0$$

$$(hu + \eta v)_t + (hu^2 + \eta v^2 + bh^2/2 + \bar{b}\eta h + \bar{b}\eta^2/2)_x = 0 \quad (1.1)$$

$$(hu^2 + \eta(v^2 + q^2) + bh^2 + 2\bar{b}\eta h + \bar{b}\eta^2)_t +$$

$$+(hu^3 + \eta v(v^2 + q^2) + 2bh^2 u + 2\bar{b}(h + \eta)\eta v + 2\bar{b}\eta hu)_x = 0$$

$$\eta_t + (\eta v)_x = 2\sigma q \quad (\bar{b} = (\bar{\rho} - \rho^+)g/\rho^+)$$

Здесь h, η – глубины, а u, v – горизонтальные компоненты средней скорости в нижнем слое и прослойке, $\bar{\rho}$ – плотность в прослойке, q – скорость "больших вихрей", отвечающих за процесс вовлечения в прослойку жидкости из однородных слоев. Численное значение коэффициента $\sigma = 0,15$ определяется из анализа перемешивания в однородной жидкости и влияет только на соотношение вертикального и горизонтального масштабов, так как параметр σ может быть удален из системы (1.1) соответствующим растяжением независимых переменных. Система (1.1) получена добавлением к обычным уравнениям "мелкой воды" для нижнего слоя полных законов сохранения массы, импульса и энергии, из которых определяются соответствующие величины в прослойке между однородными слоями.

В силу (1.1) процесс вовлечения симметричен относительно центра прослойки и соотношение $\bar{b} = b/2$ справедливо до тех пор, пока $h > 0$. При $h \equiv 0$ система (1.1) описывает эволюцию турбулентного однородного слоя [8]. При этом скорость вовлечения в прослойку уменьшается вдвое, так как вовлечение в нижний слой отсутствует, и величина \bar{b} становится переменной.

Система (1.1) записана в виде законов сохранения, поэтому определяет как непрерывные, так и разрывные решения. Из условий на разрывах выводятся однозначно

соотношения на внутренних гидравлических прыжках. Было показано [1, 8], что рассматриваемая система обладает богатым набором решения типа бегущих волн. Среди них имеются непрерывные солитонобразные решения, разрывные решения типа "прыжок-волна" и "гладкий бор". Стационарные решения описывают основные особенности течения в задаче об истечении струи в покоящуюся жидкость другой плотности, формирования слоя смешения и перехода его в затопленную струю. В частности, без привлечения дополнительных гипотез в рамках модели может быть определен максимальный расход жидкости, вовлекаемой в слой смешения или затопленную струю.

Использование в системе (1.1) одновременно законов сохранения импульса и энергии поставило проблему предельного перехода в рамках этой модели к двухслойному течению, так как в пределе при $\eta \equiv 0$ эти законы противоречат друг другу. В самом деле, для волны, распространяющейся со скоростью $D > \sqrt{bh_0}$ ($\eta_0 = 0$) в покоящейся жидкости, казалось бы не может существовать ни непрерывного профиля (течение относительно фронта волны сверхкритическое), ни разрывного (за волной в силу законов сохранения $\eta = 0$, и законы сохранения импульса и энергии одновременно выполняться не могут). Однако особенности поведения характеристик трехслойного течения и учет в уравнениях (1.1) процесса вовлечения позволяют разрешить этот парадокс. В следующем разделе будет показано, что при $Fr > 1$ перед телом формируется область блокированной жидкости конечной длины, в которой течение стационарное и докритическое относительно обтекаемого тела, причем при $\eta \rightarrow 0$ решение не содержит особенностей за счет того, что в прослойке часть жидкости разгоняется до скорости, близкой к скорости буксировки D .

2. Рассматриваются стационарные относительно тела решения системы (1.1) при $\eta_0 = 0$, $u_0 = 0$, $Fr > 1$ (фиг. 1). Как было отмечено выше, в прослойке $\bar{b} = b/2$ и законы сохранения (1.1) принимают вид

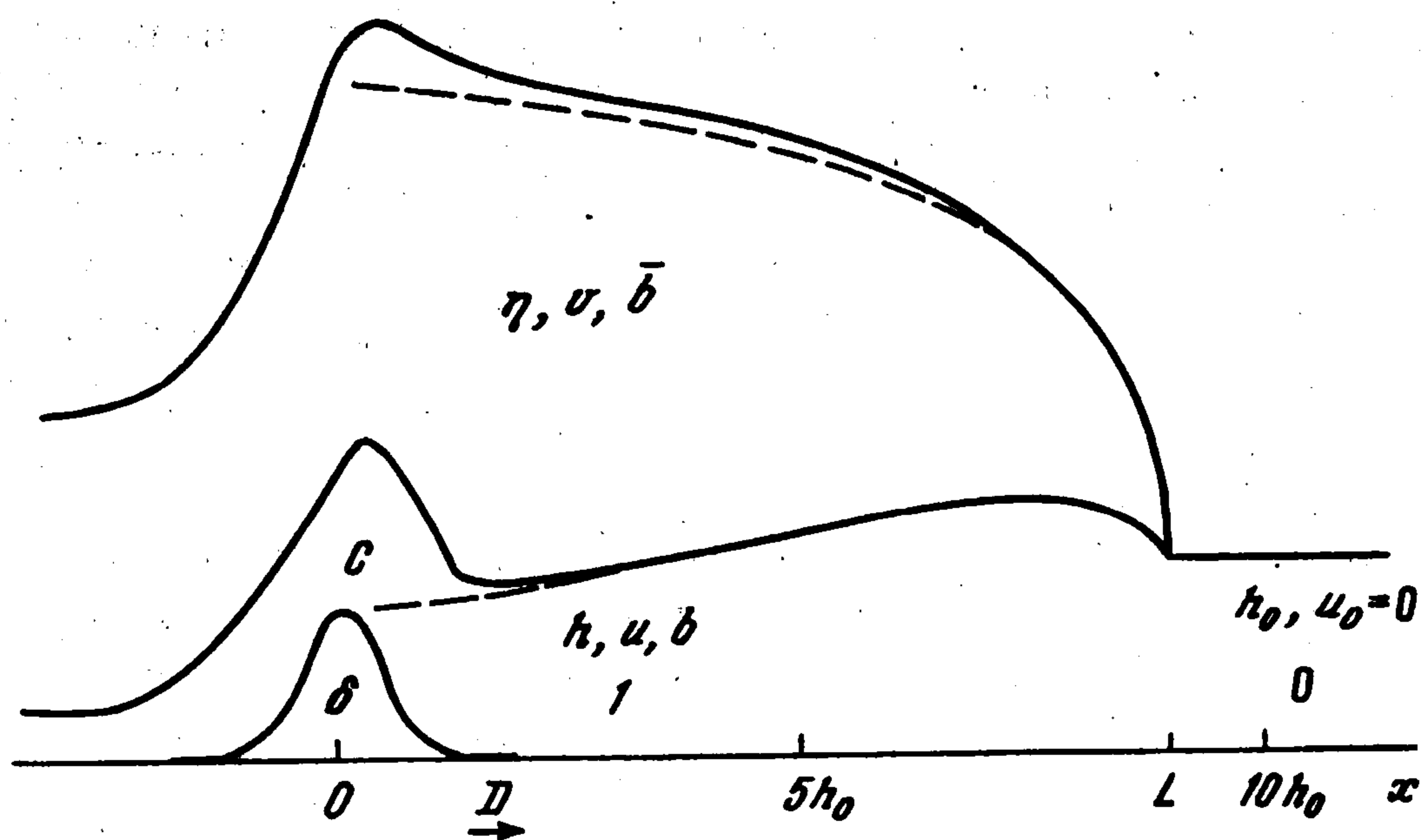
$$\begin{aligned} hu + \eta v / 2 - D(h + \eta / 2) &= -Dh_0 \\ u^2 / 2 + b\eta / 2 + bh - Du &= bh_0 = J^- \\ hu^2 + \eta v^2 - D(hu + \eta v) + b(h^2 + h\eta + \eta^2 / 2) / 2 &= bh_0^2 / 2 \\ \eta(v - D)(v^2 + q^2) + h(u - D)u^2 + b\eta hu + b(h + \eta)\eta v + 2bh^2u - \\ - bD(\eta^2 / 2 + h\eta + h^2) &= -bDh_0^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В силу (2.1) все искомые величины могут быть выражены как функции одной переменной, например u . Зависимость $Q = \eta(D - v)$ от u изображена на фиг. 2 при $Fr = 2$. Вдоль ветви B при $u \rightarrow 0$ имеем $\eta \rightarrow 0$, $h \rightarrow h_0$, $Q \rightarrow 0$. Для функции $v = v(u)$ предел $v(0) = D$ может быть найден дифференцированием первых трех уравнений (2.1) и предельным переходом при $u \rightarrow 0$ в полученных соотношениях. Далее, для того чтобы убедиться, что предел $q^2(0) = D^2$ существует, необходимо раскрыть особенность в уравнении энергии, дважды продифференцировав соотношения (2.1). Состояния на ветви A не рассматриваются, так как функция $q^2(u)$ на этой ветви отрицательна.

На ветви B физический смысл имеют только точки, в которых $q^2(u) > 0$ (сплошная линия на фиг. 2). Таким образом, стационарное решение может принимать значения Q лишь в интервале $(0, Q_0)$. Зависимость искомых величин от переменной $\xi = x - Dt$ находится из уравнения

$$dQ(u) / d\xi = 2\sigma q(u) \quad (2.2)$$

решение которого при учете (2.1) может быть получено в квадратурах. Из (2.2) вытекает, в частности, зависимость длины стационарной блокированной зоны L от количества жидкости Q , вовлекаемой в прослойку.



Фиг. 1

Движение препятствия полностью определяет стационарное течение вверх по потоку в случае, когда за его гребнем течение сверхкритическое и малые возмущения потока не достигают участка 0–1 (фиг. 1). Это возможно, если над гребнем (состояние с) течение критическое, а на участке 0–1 – докритическое.

Было отмечено [1], что характеристики системы (1.1) состоят из характеристик двухслойной мелкой воды [9] и кратной характеристики $dx/dt = v$. Поэтому условие критичности состояния с определяется обращением в нуль при $\lambda = D$, $u = u_c$, $v = v_c$, $h = h_c$, $\eta = \eta_c$ характеристического определителя $\Delta(\lambda)$:

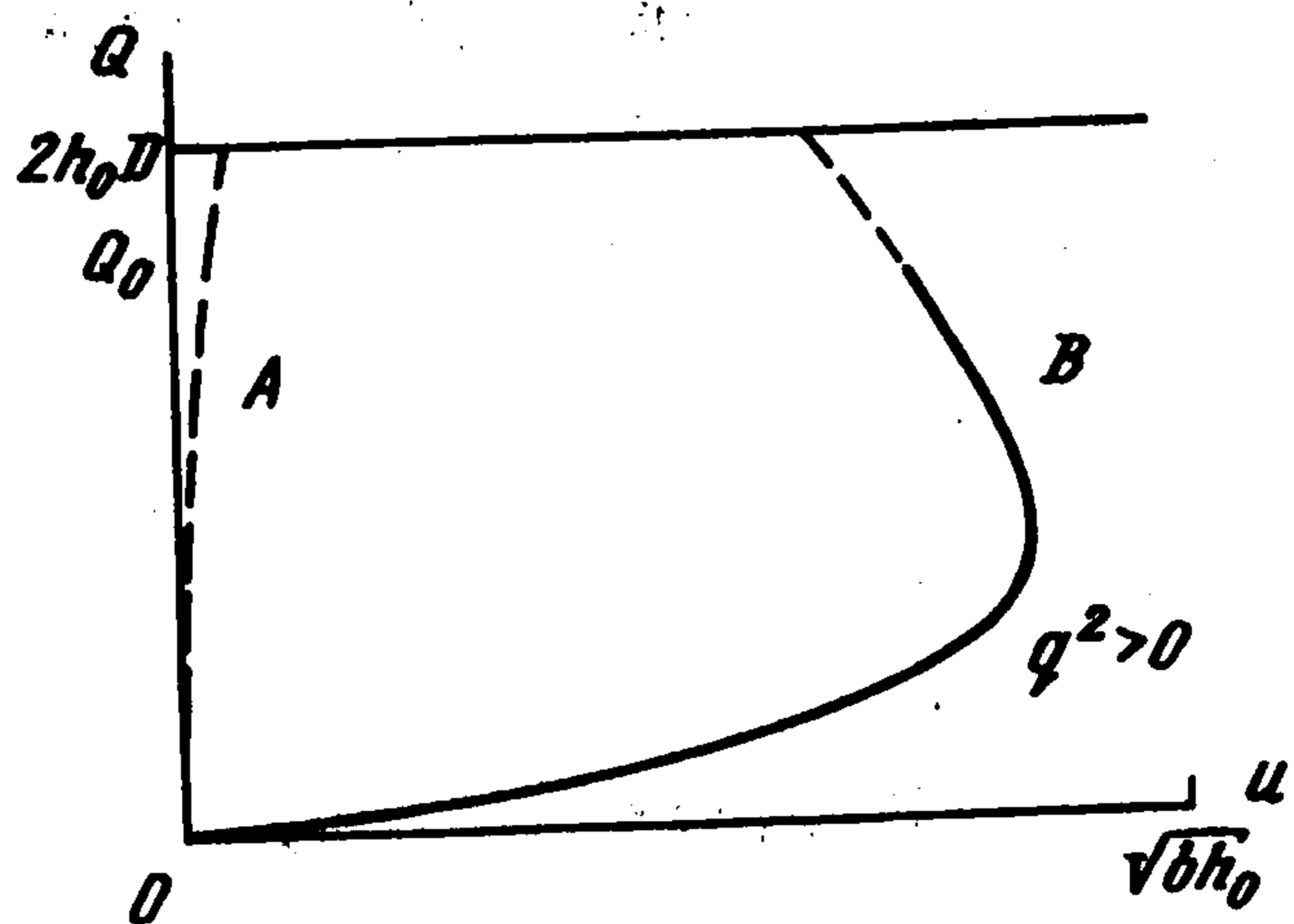
$$\Delta(\lambda) = \left(\frac{(u-\lambda)^2}{bh} - 1 \right) \left(\frac{(v-\lambda)^2}{b\eta/2} - 1 \right) - \frac{1}{2} = 0 \quad (2.3)$$

При относительно небольшой длине буксируемого тела можно пренебречь процессом вовлечения непосредственно над ним. Тогда замыкающие соотношения, связывающие состояние с над гребнем и состояния 1 непосредственно перед телом, имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_c(D - v_c) &= \eta_1(D - v_1) = Q_1 \\ h_c(D - u_c) &= h_1(D - u_1) = Dh_0 - Q_1/2 \\ u_c^2/2 - Du_c + b\eta_c/2 + bh_c + b\delta &= J^- \\ v_c^2/2 - Dv_c + b(\eta_c + h_c + \delta)/2 &= v_1^2/2 - Dv_1 + b(\eta_1 + h_1)/2 = J_1^+ \\ q_c^2 &= q_1^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

На плоскости (u, Q) зависимость $Q(u)$, представленная кривой A на фиг. 2, соответствует сверхкритическому течению ($\lambda_{\max} < D$), а кривой B – докритическому течению ($\Delta(D) < 0$). Здесь λ_{\max} – наибольший корень уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

Таким образом, для любого значения Q_1 из интервала $(0, Q_0)$ перед телом может быть построена стационарная докритическая блокированная зона конечной длины, в которой величина Q меняется от 0 до Q_1 . Далее из соотношений (2.3) и (2.4) однозначно находится зависимость $\delta = \delta(Q_1)$. Естественно, $\delta \rightarrow 0$ при $Q_1 \rightarrow 0$ и на плоскости (Fr, δ) при $Fr > 1$ возникает целая область, примыкающая к оси абсцисс и соответствующая стационарным режимам обтекания. При достаточно большой скорости буксировки ($Fr > 2,1$) и высоте тела δ прослойка достигает дна ($h_1 = 0$ при $Q_1 = 2Dh_0$). Анализ бегущих волн для полностью перемешанного нижнего слоя проведен в [8].



Фиг. 2

Полученное стационарное решение задачи о блокировке течения двухслойной смешивающейся жидкости при сверхкритическом обтекании тела обладает рядом интересных свойств. Оно дает пример самосогласованного непрерывного решения задачи о местной зоне докритического течения, не имеющего особенностей, но в то же время обладающего тонкой внутренней структурой. В частности, длина зоны запираания потока весьма чувствительна к высоте тела и скорости буксировки. Поэтому построенное стационарное течение может служить хорошим тестом при нестационарных расчетах.

На фиг. 1 сплошной линией представлено численное решение нестационарной задачи о движении препятствия с постоянной скоростью ($Fr = 2$) при больших временах и штриховой линией соответствующее стационарное решение. Расхождение между ними наблюдается только в окрестности тела, что связано с учетом конечности длины тела в нестационарном расчете. Расчеты показывают, что для параметров буксировки, соответствующих стационарному режиму обтекания, этот режим при больших временах достигается, однако нестационарный участок разгона тела существенно влияет на промежуточную картину течения, и явление "гистерезиса", т.е. зависимость картины обтекания от способа разгона тела наблюдалась также и в численном эксперименте на временах, характерных для экспериментов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпидевский В.Ю. Модель двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела // Лабораторное моделирование динамических процессов в океане. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1991. С. 87–97.
2. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. II. Experiments with two-fluid system // *Tellus*. 1954. V. 6. N 2. P. 97–115.
3. Long R.R. Blocking effects in flow over obstacles // *Tellus*. 1970. V. 22. N 5. P. 471–480.
4. Baines P.G. A unified description of two-layer flow over topography // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 127–167.
5. Baines P.G. A general method for determining upstream effects in stratified flow of finite depth over long two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 188. P. 1–22.
6. Yih C.S., Guba C.R. Hydraulic jump in a fluid system of two layers // *Tellus*. 1955. V. 7. N 3. P. 358–366.
7. Chu V.H., Baddour R.E. Turbulent gravity-stratified shear flows // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 138. P. 353–378.
8. Ляпидевский В.Ю. Динамика однородного турбулентного слоя в стратифицированной жидкости // *ПМТФ*. 1989. № 2. С. 73–76.
9. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.VII.1993