

УДК 52-60

© 1994 г. В.И. Воротников

**ОБ УПРАВЛЕНИИ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
ПРИ ПОМЕХАХ. ИГРОВОЙ ПОДХОД**

Предлагается конструктивный метод синтеза управлений в задаче переориентации асимметричного твердого тела при игровой модели помех. Учитываются заданные "геометрические ограничения" на управления. В основе предлагаемого подхода – выбор такой структурной формы законов управления, которая позволяет свести решение исходной нелинейной задачи к решению вспомогательных линейных игровых задач. Получаемые таким путем нелинейные законы управления робастны (стабильны) и обеспечивают точное приведение тела в заданное состояние за конечное время, рассчитываемое в рамках предложенной схемы решения, исходя из требования быстродействия. Дается методика оценки минимального гарантированного времени переориентации. Приводятся результаты компьютерного моделирования.

Рассматривается возможность распространения указанного подхода на случай переориентации с одновременным гашением угловой скорости тела.

С позиций общих задач теории управления предлагаемый подход примыкает к бурно развиваемым в последние годы методам декомпозиции, частичной стабилизации и точной линеаризации нелинейных управляемых систем.

Задачам управления угловым движением твердого тела к настоящему времени посвящено много работ (см., например, [1–13], где дана библиография). Такие задачи представляют интерес в связи с исследованиями разноплановых проблем, возникающих, например, в динамике летательных (космических) аппаратов, робототехнике, биомеханике. В строгой нелинейной постановке нахождение оптимальных решений в этих задачах затруднено и часто их разбивают на два этапа: гашение вращений и переориентация в пространстве. На первом этапе исследование проводится на основе динамических уравнений Эйлера, и знания углового положения тела при этом не требуется. На втором этапе начальное и конечное состояния являются состояниями покоя. Изменения ориентации можно достичь несколькими путями [1–13]: 1) посредством трех последовательных разворотов вокруг связанных осей; 2) в классе плоских поворотов вокруг оси Эйлера (экстенсивный разворот), при котором вектор угловой скорости тела сохраняет неизменное положение в пространстве; 3) несколькими плоскими поворотами; 4) одним пространственным разворотом без дополнительных ограничений на характер результирующего движения. Вопрос о целесообразности использования той или иной схемы с целью оптимального управления решается отдельно в каждом конкретном случае. В расчет берутся, как правило, заданные требования к быстродействию и расходу топлива, а также к надежности и технологичности.

Отметим, что наиболее полное отражение в литературе получили вопросы оптимального управления экстенсивным разворотом. Этот способ особенно эффективен в случаях, когда эллипсоид инерции тела близок к сфере или управление осуществляется малыми по величине управляющими моментами [7]. Менее изучены вопросы оптимальной переориентации твердого тела одним пространственным разворотом [11,13].

Реальные условия функционирования объектов требуют учета постоянно действующих помех и возмущений. Процесс управления особенно усложняется, если известна лишь минимальная информация о помехах – только границы их изменения. Здесь речь идет об

управлении в условиях неопределенности. Однако, как показывается в публикуемой статье, для этапа переориентации тела и в этом случае можно предложить хотя и не строгий, но вполне приемлемый с точки зрения приложений конструктивный метод решения при ограничениях на управления.

В основе предлагаемого подхода – выбор такой структурной формы законов управления, которая позволяет осуществить сведение исходной нелинейной задачи к вспомогательным линейным задачам управления. При этом аддитивно входящие в вспомогательные линейные управляемые системы "вспомогательные помехи" (образующиеся при соответствующей трансформации помех в исходной системе) трактуются как управления игрока-противника. В результате вспомогательные линейные управляемые системы приобретают смысл конфликтно-управляемых. Параметры выбранной структурной формы исходных законов управления определяются как управляющие стратегии игрока-союзника в соответствующих линейных игровых задачах. В итоге таким путем получают робастные (стабильные) нелинейные законы управления (в форме синтеза), обеспечивающие гарантированный результат в решении исходной нелинейной задачи управления. А именно гарантируется точное приведение твердого тела (одним пространственным разворотом) в заданное состояние за конечное время при любых допустимых реализациях помех. Дается конструктивная методика оценки времени переориентации, учитывающая заданные ограничения на управления.

Предлагаемая схема решения такова, что время переориентации не превышает минимального гарантированного времени управления в соответствующей вспомогательной линейной игровой задаче. В этом смысле получаемые законы управления переориентацией (при наиболее полном использовании возможностей предложенной для них структурной формы) могут быть названы субоптимальными по быстрдействию из заданного класса.

Обсуждается возможность распространения указанного подхода на случай задачи переориентации с одновременным гашением угловой скорости тела.

### 1. Постановка задачи. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера

$$A_1 \dot{x}_1 = (A_2 - A_3)x_2 x_3 + u_1 + v_1 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.1)$$

(записано одно из трех уравнений, остальные получаются циклической перестановкой индексов  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ). Уравнения (1.1) описывают угловое движение твердого тела относительно центра масс под действием управляющих моментов  $u_i$ , а также моментов  $v_i$ , характеризующих внешние силы и неконтролируемые возмущения. Здесь и везде далее (там, где не оговорено противное)  $i = 1, 2, 3$ . В уравнениях (1.1)  $x_i$  – проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции;  $A_i$  – главные центральные моменты инерции тела. Обозначим  $x, u, v$  – векторы, состоящие соответственно из компонент  $x_i, u_i, v_i$ .

Уравнения (1.1) будем рассматривать в совокупности с определяющими ориентацию твердого тела кинематическими уравнениями в переменных Родрига–Гамильтона [3]

$$2\dot{\lambda}_0 = -(x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3), \quad 2\dot{\lambda}_i = x_1 \lambda_0 + x_3 \lambda_2 - x_2 \lambda_3 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.2)$$

Переменные  $\lambda_i, \lambda_0$ , входящие в кватернион  $\lambda$ , удовлетворяют также соотношению

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (1.3)$$

Система (1.1) – (1.3) в ряде случаев моделирует угловое движение космического аппарата (КА). При этом вектор  $\lambda$  определяет направление (ориентацию) КА на некоторые физические ориентиры. Управляющие моменты  $u_i$  реализуются посредством специальных двигателей и (или) роторов (маховиков, гироскопов).

Возможности силовых установок, создающих управляющие моменты, ограничены. Допустим, на величины управляющих моментов наложены "геометрические ограничения"

$$|u_i| \leq \alpha_i = \text{const} > 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $\alpha_i$  – заданные числа, характеризующие максимально возможные величины (уровни) управлений  $u_i$ .

Относительно действующих на тело помех  $v_i$  могут делаться различные предположения. Так, если реализации помех являются случайными процессами (например, белым шумом), то возможен стохастический (вероятностный) подход к решению. Применительно к некоторым задачам управления угловым движением твердого тела (например, КА) такой подход рассмотрен, например, в [14–17].

Однако во многих случаях о помехах известна лишь минимальная информация – только границы их изменения. При этом какие-либо вероятностные характеристики реализаций помех в указанных границах не известны. В таком случае накладываются лишь ограничения вида

$$|v_i(t)| \leq \beta_i = \text{const} > 0. \quad (1.5)$$

Числа  $\beta_i$  характеризуют максимально возможные величины (уровни) помех, которые могут реализовываться в виде любых кусочно-непрерывных функций времени  $v_i(t)$  в рамках ограничений (1.5). В отличие от стохастического подхода, в круг дифференциальных игр [18–21] включаются задачи о таком способе управления, который гарантирует желаемый результат даже при самом неблагоприятном ("наихудшем") действии помех. Именно этот подход применительно к задачам управления угловым движением твердого тела рассматривается в публикуемой статье.

Конкретизируем рассматриваемые задачи управления. Пусть задан класс  $K = \{u: u = u(x, \lambda), (x, \lambda) \in D\}$  кусочно-непрерывных (в допустимой области  $D$  изменения  $x, \lambda$ ) функций, удовлетворяющих заданным ограничениям (1.4). Также задан класс  $K_1 = \{v = v(t)\}$  помех, удовлетворяющих ограничениям (1.5), кусочно-непрерывных на любом конечном промежутке  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Задача 1** (переориентации). Найти законы управления  $u \in K$  при любых допустимых реализациях помех  $v \in K_1$ , переводящие тело за конечное время из начального состояния  $\lambda(t_0) = \lambda^0$  в заданное  $\lambda(t_1) = \lambda^1, (\lambda^0, \lambda^1) \in D$ . Оба состояния являются состояниями покоя  $x(t_0) = x^0 = x(t_1) = x^1 = 0$ . Момент времени  $t_1 > t_0$  не фиксируется.

**Задача 2** (переориентации с гашением угловой скорости). Найти управление  $u \in K$ , решающее задачу 1 в случае  $x^0 \neq 0$ .

**2. Предлагаемый подход к решению.** Строгое решение задач 1, 2, особенно при дополнительном требовании о минимальности гарантированного времени переориентации, представляет значительные трудности в силу существенной нелинейности системы (1.1) – (1.3). Это касается и конструктивной оценки минимального гарантированного времени переориентации. В такой ситуации естественно желание найти простые, хотя и не оптимальные в смысле быстродействия, законы управления, позволяющие получить приемлемый по времени переориентации результат. Именно в указанном ключе поиска нацеленных на быстродействие законов управления и рассматривается далее решение поставленных задач 1, 2.

Для реализации этой цели структурную форму (конструкцию) искомых игровых стратегий  $u_i$  будем считать заданной. За основу возьмем конструкции решающих задачи управления угловым движением твердого тела законов управления типа предложенных [22, 23] для идеального случая отсутствия помех ( $v_i \equiv 0$ ). В их рамках исходная нелинейная задача сводится к решению нескольких однотипных задач управления для линейных вспомогательных систем. Это системы простейшего вида:  $\lambda_j^* = u_j^*$  в случае трехосной и  $s_j^* = u_j^* (j = 1, 3), x_2^* = u_2^*(s_j^* - \text{переменные Пуассона, согласование индексов дано в соответствии с [22]})$  – в случае одноосной переориентации.

Выбор вспомогательных управлений  $u_i^*$  не является однозначным и определяется теми или иными требованиями к оптимальности искомых законов управления  $u_i$  в

исходной нелинейной задаче. Поэтому  $u_i^*$  – изменяемые (в соответствии с указанными требованиями) параметры в неизменной структуре  $u_i$ . В случае помех  $v_i$  параметрами  $u_i^*$  в неизменной структуре искомых управлений  $u_i$  будем распоряжаться, исходя из решения соответствующих игровых задач на минимакс времени для вспомогательных линейных конфликтно-управляемых систем. Это системы вида  $\lambda_i = u_i^* + v_i^*$  при трехосной или соответствующего вида при одноосной переориентации. Здесь  $u_i^*$  – "вспомогательные помехи", образующиеся в вспомогательных линейных системах при переходе от исходной "возмущенной" нелинейной системы.

В рамках предлагаемого подхода возможен не только синтез управлений, но и конструктивная оценка минимального гарантированного времени переориентации. Ее нахождение предполагает характерный для игровых методов расчет на "наихудшие" помехи  $v_i^*$ . Кроме того, используются завышенные неравенства как при оценках самих  $v_i^*$ , так и (возможно) при проверке ограничений (1.4) на  $u_i^*$ . И хотя при этом оценка времени переориентации является не только "осторожной", но и несколько завышенной в итоге можно рассчитывать на приемлемый гарантированный результат в решении сложной нелинейной задачи.

Предлагаемый метод представляет один из возможных подходов к декомпозиции нелинейных управляемых систем.

По идее этот метод примыкает к работам [24–26], отличаясь используемыми в процессе синтеза управлений нелинейными преобразованиями переменных типа введенных [22, 23] для решения задачи управления угловым движением твердого тела при отсутствии помех. Подобные методы преобразования переменных, в частности, тесно связаны с все более часто используемыми в последние годы методиками исследования задач стабилизации динамических систем по отношению к части переменных (частичной стабилизации) [13, 27–32]. Такая связь обусловлена вспомогательной функцией задачи стабилизации по некоторой части переменных в процессе решения рассматриваемой задачи переориентации тела. С позиций общего анализа задач устойчивости и стабилизации по части переменных (рассматриваемых соответственно на конечном или на бесконечном интервале времени) это отмечено в [13, 32]. Помимо указанных задач подобный подход также примыкает к развивающимся в последние годы методам точной линеаризации нелинейных управляемых систем [33–36] и векторных функций Ляпунова применительно к задачам типа нелокальной управляемости [37, 38].

Далее предлагаемый подход рассматривается более подробно.

**3. Структура игровых стратегий.** Структурную форму исходных игровых стратегий в соответствии с намеченной выше схемой, определим исходя из решения задач 1,2 при отсутствии помех ( $v_i \equiv 0$ ).

Для этого рассмотрим законы управления  $u_i$  типа [13, 22, 23]

$$u_i = \frac{1}{\lambda_0} f_i^{(0)}(x, \lambda, u^*) \quad (3.1)$$

где  $u^*$  – вектор вспомогательных управлений  $u_i^*$ . При определенном выборе форм  $f_i^{(0)}$  из замкнутой нелинейной системы (1.1)–(1.3), (3.1) можно выделить линейную вспомогательную управляемую систему

$$\lambda_i = u_i^* \quad (3.2)$$

Система (3.2) состоит из трех линейных независимых подсистем простейшего вида. Вспомогательные управления  $u_i^*$  в (3.2) выбираются в зависимости от целей управления в исходных нелинейных задачах 1,2.

Конструкция (3.1) – только одна из возможных конструкций

$$u_i = \frac{1}{\lambda_j} f_i^{(j)}(x, \lambda, u^*), \quad j = (0, 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

позволяющих при определенном выборе форм  $f_i^{(j)}$ , из замкнутых систем (1.1) – (1.3), (3.3) выделить линейные вспомогательные управляемые системы типа (3.2). Набор индексов  $i$  в системе типа (3.2) при этом будет зависеть от индекса при переменной  $\lambda$  в знаменателе выражения (3.3). Так индексу  $j = 0$  соответствует  $i = 1, 2, 3$ , индексу  $j = 1 \rightarrow i = 0, 2, 3$  и т.д.

Наряду с отдельными конструкциями (3.3) возможны также и "составные" конструкции, предполагающие последовательное использование отдельных конструкций вида (3.3). Подобный "арсенал" средств на базе конструкций (3.3) в принципе позволяет [13, 23] решать задачи управления угловым движением твердого тела при любых краевых условиях. При выборе же тех или иных оптимальных решений необходима не только соответствующая оптимизация отдельных конструкций (3.3) и (при необходимости) правил их комбинирования, но и, возможно, предварительное уменьшение величины (или гашение) угловой скорости тела. Строгий (с математической точки зрения) выбор оптимальных решений, как и при использовании других подходов, здесь затруднен. Однако в итерационном режиме, широко используемом в современной прикладной теории автоматического управления [39], на базе предложенных конструкций в реальном масштабе времени может быть построено приемлемое с точки зрения практики решение. В частности, на основе решения соответствующих линейных задач оптимального быстрогодействия для систем типа (3.2) может быть осуществлен синтез субоптимальных по быстродействию законов управления (см. [13]).

Смысл (и определенное достоинство) подобного подхода в том, что решение исходных задач 1,2 управления для существенно нелинейной системы (1.1) – (1.3) можно проводить на базе решения соответствующих задач управления для линейных систем простейшего типа (3.2). Это позволяет без потери качества управления за счет упрощения исходной нелинейной задачи провести ее линеаризацию.

Действительно, переменные  $\lambda_i$  вспомогательной линейной системы (3.2) в точности определяют поведение этих же переменных исходной нелинейной системы (1.1) – (1.3), (3.1). Оставшиеся переменные  $x_i, \lambda_0$  системы (1.1)–(1.3), (3.1) связаны с ними соотношениями

$$x_1 = \frac{2}{\lambda_0} [(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\lambda_1 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)\lambda_2 + (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)\lambda_3] \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (3.4)$$

В результате приведение переменных  $\lambda_i, \lambda_i$  вспомогательной линейной системы (3.2) в конечное положение  $\lambda_i = \lambda_i^1, \lambda_i = 0$  будет означать перевод твердого тела в требуемое в задачах 1, 2 конечное состояние  $x^1 = 0, \lambda = \lambda^1$ .

Другими словами, при использовании предложенного подхода сначала осуществляется стабилизация заданного состояния  $x^1 = 0, \lambda = \lambda^1$  исходной нелинейной системы (1.1) – (1.3), (3.1) по одной части переменных – по переменным  $\lambda_i$ . Данная задача частичной стабилизации решается как задача стабилизации по всем переменным состояния  $\lambda_i = \lambda_i^1, \lambda_i = 0$  вспомогательной линейной системы (3.2). При этом проведенная частичная стабилизация указанного состояния  $x^1 = 0, \lambda = \lambda^1$  исходной нелинейной системы фактически будет означать стабилизацию этого состояния и по отношению к оставшейся части переменных – по переменным  $x_i, \lambda_0$ .

Без ущерба для общности далее считаем  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ . Также ограничиваемся рамками только одной конструкции законов управления – конструкции (3.1).

Решение вспомогательных линейных задач управления усложняется рядом факторов. Во-первых, необходимо соблюдение исходных ограничений (1.4) на управления  $u_i$ . Это приводит к соответствующим ограничениям

$$|u_i^*| \leq \alpha_i^* = \text{const} > 0 \quad (3.5)$$

на вспомогательные управления  $u_i^*$  в (3.2). Процедуру назначения чисел  $\alpha_i^*$  можно конструктивно осуществить, например, итерационным подбором чисел  $\alpha_i^*$  с последующей проверкой неравенств (1.4) вдоль траекторий соответствующей замкнутой системы. Для этого необходимо знать явный вид указанных траекторий или их приемлемые оценки. В рамках предлагаемых конструкций законов управления, когда исходные нелинейные задачи 1,2 сводятся к простым линейным задачам управления, такая возможность полностью обеспечивается.

Отметим, что в принципе форма записи ограничений на вспомогательные управления  $u_i^*$  не обязательно должна иметь такой же вид, как форма записи (1.4) ограничений на исходные управления  $u_i$ .

Так, вместо ограничений (3.5) возможны ограничения вида  $\|u^*\| \leq \alpha^* (\|u^*\| - \text{евклидова норма вектора } u^* \text{ в } R^3)$  и наоборот. Форма записи ограничений (1.4) напрямую связана с возможностью реализации получаемых законов  $u_i$  в том или ином классе двигателей. Например, ограничения (1.4) соответствуют трем парам "фиксированных" двигателей, а ограничения  $\|u\| \leq \alpha$  – "верньерному" двигателю [40]. Выбор же формы записи ограничений для  $u_i^*$  определяется только чисто математической стороной дела – поиском наиболее приемлемых законов управления  $u \in K$  в рамках предлагаемой схемы решения. С точки зрения наиболее полного использования возможностей предложенной структурной схемы законов управления  $u_i$  этот вопрос требует отдельного изучения.

Необходим также и учет ограничений на фазовые переменные  $\lambda_i$  при решении соответствующих задач управления для линейной системы (3.2). К этому обязывает требование  $|\lambda_0| \geq \varepsilon = \text{const} > 0, t \in [t_0, t_1]$  работоспособности конструкции законов управления (3.1). (Значение  $\varepsilon$  уточняется в соответствии с заданными ограничениями (1.4) на управления.) Естественно, необходимо учитывать и условие (1.3). В результате приходим к необходимости выполнения ограничения (здесь и везде далее суммирование по  $i$  от 1 до 3)

$$\Sigma(\lambda_i^2) \leq 1 - \varepsilon^2, t \in [t_0, t_1] \quad (3.6)$$

на переменные  $\lambda_i$  в системе (3.2).

Решение на базе конструкции (3.1) задачи оптимальной по быстродействию переро- ориентации тела ( $x^0 = x^1 = 0, t_1 \rightarrow \min$ ) предполагает для вспомогательной линейной системы (3.2) решение соответствующей задачи оптимального быстродействия (при ограничениях (3.5), согласующихся с (1.4)). В этом случае условие (3.6), будучи выполненным при  $t = t_0$  и  $t = t_1$  (в случае  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$  только при  $t = t_0$ ), будет обязательно выполняться и при всех  $t \in [t_0, t_1]$ .

Действительно, проанализируем соответствующие оптимальные траектории системы (3.2) с учетом соотношений  $\lambda_i(t_0) = \lambda_i(t_1) = 0$ , вытекающих из (1.2) на основании  $x^0 = x^1 = 0$ . Указанные траектории таковы, что  $\lambda(t) \in [\lambda^0, \lambda^1]$  при  $t \in [t_0, t_1]$ . Поэтому, учитывая выполнимость (3.6) при  $t = t_0$  и  $t = t_1$  (в случае  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$  только при  $t = t_0$ ), заключаем, что условие (3.6) выполняется и для  $t \in [t_0, t_1]$ .

При исследовании задач переориентации с учетом помех проверка выполнимости (3.6) требует анализа всех возможных траекторий соответствующих "возмущенных" линейных систем. Такой анализ дается в разд. 4.

Используя конструкцию (3.1) в случае действия помех  $v_i$ , получаем вместо (3.2) "возмущенную" линейную систему

$$\ddot{\lambda}_i = u_i^* + v_i^* \quad (3.7)$$

Допустимые ограничения на "вспомогательные помехи"  $v_i^*$  определяются заданными ограничениями (1.5) на  $v_i$ . А именно имеем равенства  $v_1^* = \frac{1}{2}(\lambda_0 v_1 A_1^{-1} + \lambda_2 v_3 A_3^{-1} - \lambda_3 v_2 A_2^{-1})$  (1 2 3), на основании которых в силу (1.5) получаем оценки

$$|v_i^*(t)| \leq \beta_i^* \quad (3.8)$$

$$\beta_1^* = \frac{1}{2} [\max |\lambda_0| \beta_1 A_1^{-1} + \max |\lambda_2| \beta_3 A_3^{-1} + \max |\lambda_3| \beta_2 A_2^{-1}] \quad (1 \ 2 \ 3)$$

В (3.8) максимум вычисляется при  $t \in [t_0, t_1]$ . В случае  $\lambda_i^0 > 0$ ,  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$  имеем  $|\lambda_0| \leq 1$ ,  $|\lambda_i| \leq \lambda_i^0$ . Оценки (3.8) получены с использованием усиливающих неравенств, следовательно, уровни  $\beta_i^*$  "вспомогательных помех"  $v_i^*$  несколько завышены в сравнении с реальными.

**4. Вспомогательные игровые задачи управления.** "Возмущенную" линейную систему (3.7) далее будем рассматривать как конфликтно-управляемую. В результате в случае действия помех  $v_i$  конструкцию (3.1) можно рассматривать как общую структурную форму законов управления в задачах 1, 2. Параметры этой формы – вспомогательные законы управления  $u_i^*$  – определяются в результате решения соответствующих линейных игровых задач управления.

Следуя принятому выше (без ущерба для общности) предположению  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ , решим (в соответствии с целью управления в задачах 1,2) для системы (3.6) задачу о приведении в начало координат  $\lambda_i = \dot{\lambda}_i = 0$  за кратчайшее время при любых допустимых возмущениях  $v_i^*$ . Эту задачу трактуем как дифференциальную игру. В ней один из игроков (управляющая сторона) распоряжается вспомогательными управлениями  $u_i^*$  и стремится уменьшить время  $\tau_i$  приведения в требуемое положение  $\lambda_i = \dot{\lambda}_i = 0$ . В распоряжении второго игрока (противника), стремящегося увеличить  $\tau_i$ , – "вспомогательные возмущения"  $v_i^*$ . При этом допустимые уровни управлений  $u_i^*$  (значения  $\alpha_i^*$  в (3.5)) должны быть таковы, чтобы в итоге не нарушились не только исходные ограничения (1.4) на управления  $u_i$ , но и требование (3.6). Исходя из постановок решаемых задач 1, 2, проверку выполнимости неравенств (1.4) и (3.6) следует проводить при всех допустимых реализациях  $v_i^*$ . Это представляет определенную трудность при использовании предложенного подхода. Указанный вопрос рассматривается в разд. 5. Пока считаем, что уровни  $\alpha_i$  исходных управлений  $u_i$  достаточно высоки, так что уровни  $u_i^*$  выше уровней  $v_i^*$ . Значения  $\alpha_i^*$  считаем некоторыми допустимыми, так что  $\alpha_i^* > \beta_i^*$ .

Указанная дифференциальная игра для каждой из подсистем системы (3.7) представляет собой линейную дифференциальную игру односторонних объектов при ограничениях  $|u_i^*| \leq \alpha_i^*$ ,  $|v_i^*| \leq \beta_i^* = \rho_i \alpha_i^*$ ,  $0 < \rho_i < 1$ . Ее решение сводится [19, 24] к решению задачи оптимального быстрогодействия для системы

$$\ddot{\lambda}_i = (1 - \rho_i) u_i^*, \quad |u_i^*| \leq \alpha_i^* \quad (4.1)$$

Краевые условия те же, что и для системы (3.7). Система (4.1) получается из (3.7) при "вспомогательных возмущениях"  $v_i^* = -\rho_i u_i^*$ . Это "наихудшие"  $v_i^*$ , являющиеся оптимальными управлениями "противника". Решение задачи оптимального быстрого действия для систем типа (4.1) имеет вид [24, 41]

$$u_i^*(\lambda_i, \lambda_i) = \begin{cases} \alpha_i^* \operatorname{sign} \psi_i^p(\lambda_i, \lambda_i), & \psi_i^p \neq 0 \\ \alpha_i^* \operatorname{sign} \lambda_i = -\alpha_i^* \operatorname{sign} \lambda_i, & \psi_i^p = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\psi_i^p(\lambda_i, \lambda_i) = -\lambda_i - [2\alpha_i^*(1-\rho_i)]^{-1} \lambda_i |\lambda_i|$$

Здесь  $\psi_i^p$  — функции переключений.

В случае задачи 1 оптимальные траектории системы (4.1) начинаются и заканчиваются на осях  $\lambda_i = 0$  (фиг. 1, где для определенности  $\lambda_i^0 > 0$ ).

Время  $\tau_i = \tau_i(\lambda_i, \lambda_i)$ , необходимое для попадания в начало координат  $\lambda_i = \lambda_i = 0$  по оптимальным траекториям системы (4.1), определяется равенствами [24, 41]

$$\tau_i = [\alpha_i^*(1-\rho_i)]^{-1} \{ [\frac{1}{2} \lambda_i^2 - \alpha_i^*(1-\rho_i) \lambda_i \operatorname{sign} \psi_i^p]^{1/2} - \lambda_i \operatorname{sign} \psi_i^p \}$$

При этом величина  $\tau = \max(\tau_i)$  определяет минимальное гарантированное время в рассматриваемой игровой задаче для линейной системы (3.7). В случае задачи 1 в силу  $\lambda_i = 0$  имеем

$$\tau = \max(\tau_i), \quad \tau_i = 2 \left\{ \left| \lambda_i^0 \left[ \alpha_i^*(1-\rho_i) \right]^{-1} \right| \right\}^{1/2} \quad (4.3)$$

Отметим, что если  $v_i^*$  отличаются от "наихудших", то, хотя фазовые траектории системы (3.7) отличаются от оптимальных, время приведения этой системы в начало координат не будет превышать  $\tau$ .

С позиций выполнимости ключевых при решении задач 1, 2 условий (1.4), (3.6) остановимся на характеристике фазовых траекторий системы (3.7), (4.2) при  $v_i^* \neq -\rho_i u_i^*$ . Начнем рассмотрение со случая  $v_i^* \equiv 0$ . В этом случае движение будет сначала происходить по дуге параболы, являющейся траекторией системы  $\lambda_i = u_i^*$  при  $u_i^*$  вида (4.2). Далее, попав на кривую переключений  $\psi_i^p = 0$ , движение будет происходить вдоль этой кривой в скользящем режиме до достижения требуемого конечного значения  $\lambda_i = \lambda_i = 0$ . При этом  $u_i^*$  принимает значения  $\pm \alpha_i^*$  с бесконечно частыми сменами знака, так что "в среднем" имеем  $u_i^* = \pm(1-\rho_i)\alpha_i^*$  на соответствующих ветвях кривых переключений.

В общем случае движение будет происходить сначала (до достижения кривой переключений) между дуг парабол соответственно систем  $\lambda_i = (1-\rho_i)u_i^*$  и  $\lambda_i = (1+\rho_i)u_i^*$  при  $u_i^*$  вида (4.2). (В случае системы  $\lambda_i = (1+\rho_i)u_i^*$  "вспомогательные помехи"  $v_i^*$  выполняют роль дополнительных вспомогательных управлений и имеют вид  $v_i^* = \rho_i u_i^*$ .) Затем, попав на кривую переключений  $\psi_i^p = 0$ , движение будет также происходить вдоль этой кривой в скользящем режиме до достижения требуемого конечного значения  $\lambda_i = \lambda_i = 0$ . Данный процесс движения (для случая задачи 1, т.е. при  $\lambda_i(t_0) = \lambda_i(t_1) = 0$ ) показан сплошной линией на фиг. 2, где для определенности  $\lambda_i^0 > 0$ . Выражения  $\psi_i^p(\psi_i^*) = 0$  получаются из  $\psi_i^p = 0$  соответственно при  $\rho_i = 0$  и заменой выражений  $(1-\rho_i)$  на  $(1+\rho_i)$ .

5. Проверка выполнимости заданных ограничений (1.4). Для предложенной конструкции законов управления  $u_i$  вида (3.1) не только их моменты переключения, но и сами величины  $u_i$  явно зависят от  $x, \lambda$ . Это усложняет проверку выполнимости заданных ограничений (1.4). Действительно, поскольку значения переменных  $x, \lambda$  зависят от  $v_i^*$ , то числа  $\alpha_i^*$  (уровни вспомогательных управлений  $u_i^*$ ) необходимо согласовывать с требованиями  $|u_i(x, \lambda, u^*)| \leq \alpha_i$  не только при "наихудших"  $v_i^* = -\rho_i u_i^*$ , но и при любых допустимых реализациях  $v_i^*$ .

Таким образом, "наихудшие" реализации  $v_i^*$  в рамках предлагаемого подхода требуется фактически находить дважды. При фиксированных значениях  $\alpha_i^*$  "наихудшими" являются реализации  $v_i^* = -\rho_i u_i^*$ . Это дает

возможность при фиксированных значениях  $\alpha_i^*$  определить минимальное гарантированное время переориентации  $\tau$  в задачах 1, 2 как время оптимального быстрогодействия в системе (4.1). Для согласования  $\alpha_i^*$  с ограничениями (1.4) на  $u_i$  необходимо выделить другие "наихудшие" реализации  $v_i^*$ , — те, при которых достигаются  $\max |u_i|$ .

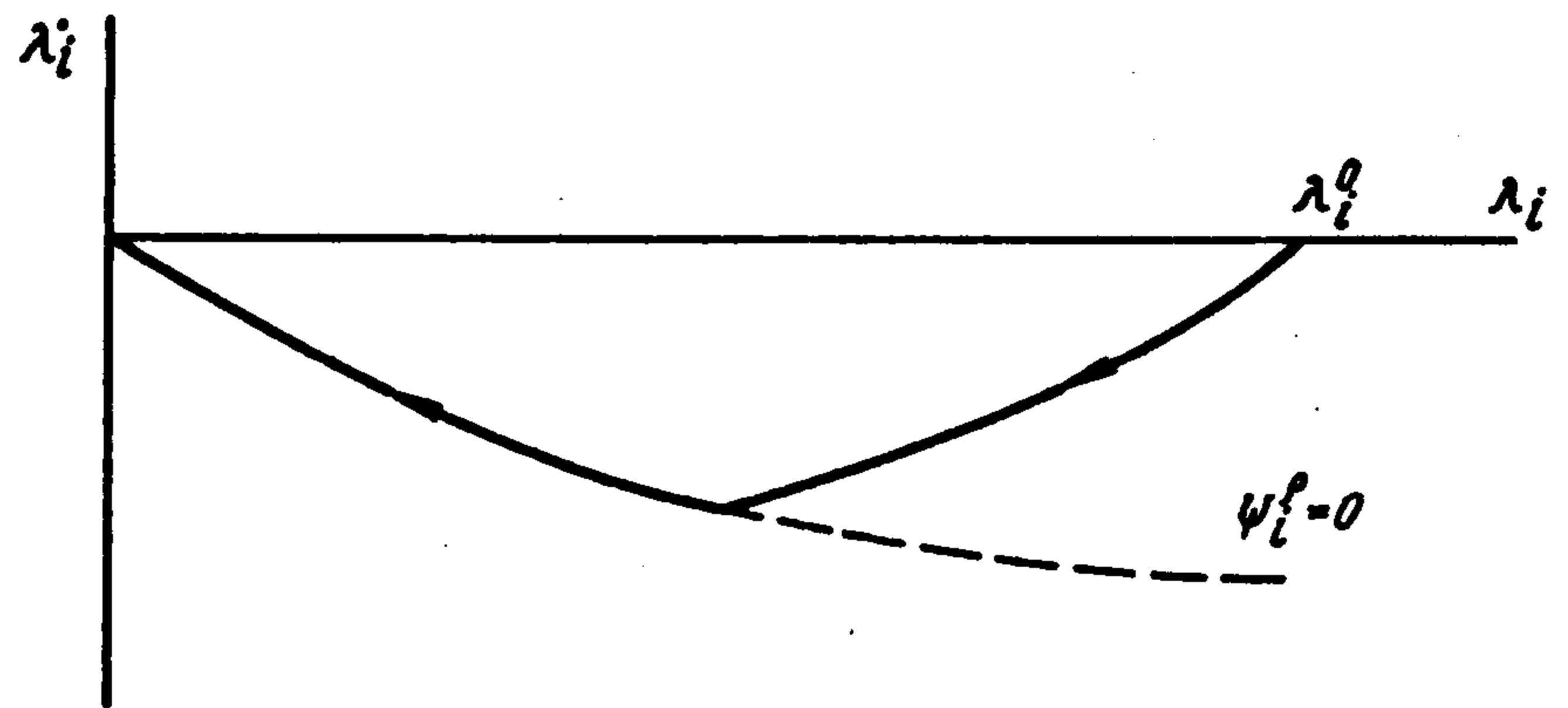
Однако проверку выполнимости ограничений (1.4) можно также конструктивно осуществить, оценивая  $|u_i|$  на множестве  $S$  возможных состояний линейной системы (3.7), (4.2). Для этого уточним конструкцию законов управления (3.1). Продифференцируем обе части каждого из уравнений второй группы системы (1.2), подставляя вместо  $x_i$  их выражения из (1.1) и заменяя  $\lambda_i^*$  на  $u_i^*$ . Решая полученные равенства относительно  $u_i$ , после преобразований имеем выражения

$$u_1 = 2A_1 \left\{ \lambda_0^{-1} \lambda_1 \left[ \left( \sum \lambda_i u_i^* \right) + \frac{1}{4} \sum x_i^2 \right] + \lambda_0 u_1^* + \lambda_3 u_2^* - \lambda_2 u_3^* \right\} + (A_3 - A_2) x_2 x_3 \quad (123) \quad (5.1)$$

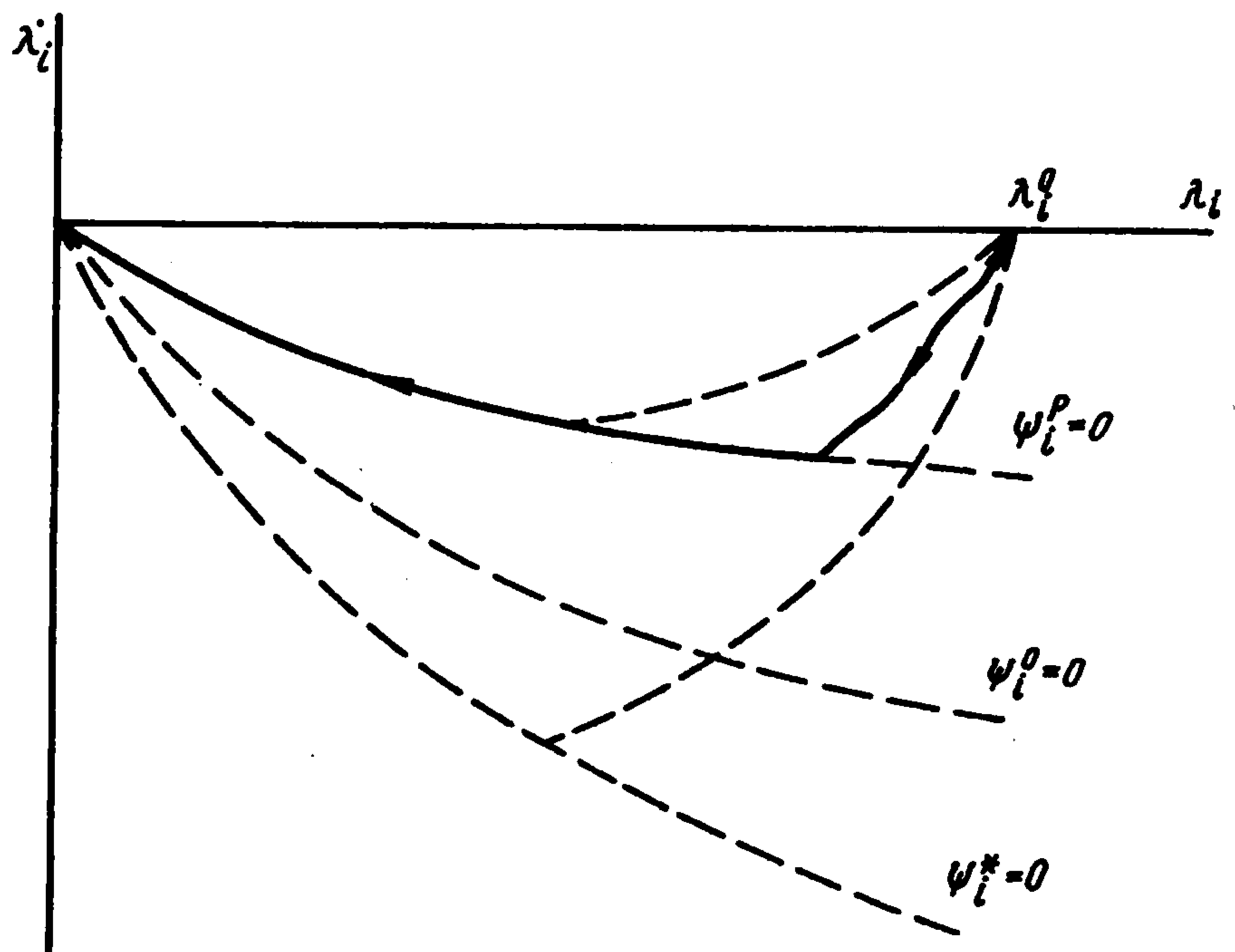
При проверке ограничений (1.4) можно, в частности, использовать такое утверждение.

*Лемма.* Пусть  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\lambda_i^0 > 0$ . Допустим, уровни  $\alpha_i^*$  вспомогательных управлений  $u_i^*$  в системе (3.7) при всех  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$  выбраны в соответствии с неравенствами

$$2A_i \left( G_i + \max_{\lambda_i \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+]} L_i \right) + F_i \leq \alpha_i \quad (5.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$L_1 = \lambda_0^{-1} \lambda_1 (\lambda_1 \alpha_1^* + \lambda_2 \alpha_2^*) + \lambda_0 \alpha_1^* + \lambda_3 \alpha_2^* + r_1 \alpha_3^* \quad (123)$$

$$r_1 = \max\left(\left|\lambda_0^{-1} \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2\right|, \left|\lambda_2 - \lambda_0^{-1} \lambda_1 \lambda_3\right|\right) \quad (123)$$

$$G_1 = (\lambda_0^-)^{-1} \lambda_1^+ \left\{ \left[ (\lambda_0^-)^{-1} \Sigma(\lambda_i^+ \lambda_i^-) \right]^2 + \Sigma(\lambda_i^-)^2 \right\} \quad (123)$$

$$F_1 = \begin{cases} 0, & \Gamma_1 = (A_3 - A_2)x_2x_3 \operatorname{sign}(\max u_i) < 0 \\ 2|A_3 - A_2|G_1, & \Gamma_1 > 0 \end{cases} \quad (123)$$

Здесь  $\lambda_i^{(+,-)}$  – соответственно верхние (нижние) оценки для переменных  $\lambda_i$ ;  $\lambda_i^-$  – нижние оценки для  $\lambda_i$  на множестве  $S$ ;  $\lambda_0^- = [1 - \Sigma(\lambda_i^+)^2]^{1/2}$ . Выражения для  $\lambda_i^{(+,-)}$ ,  $\lambda_i^-$  сведены в табл. 1, где  $T_i = 2(1 - \rho_i)^{-1} T_i^*$ ,  $T_i^* = \{[\alpha_i^*(1 + \rho_i)]^{-1} [\lambda_i^0(1 - \rho_i)]\}^{1/2}$ . (Отметим, что  $T_i^* \leq \tau/2$ ,  $T_i \leq \tau$  для всех  $i$ .)

Тогда заданные ограничения (1.4) для законов управления  $u_i$  вида (3.1), (4.2) будут выполняться при любых допустимых реализациях помех  $v_i$  ("вспомогательных помех"  $v_i^*$ ).

Доказательство леммы основано на оценке выражений (5.1). При этом используется соотношение  $\Sigma x_i^2 = 4\{[(\lambda_0^-)^{-1} \Sigma(\lambda_i \lambda_i^-)]^2 + \Sigma \lambda_i^2\}$ , справедливость которого проверяется непосредственными вычислениями по формулам (3.4). Заметим, что условия  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\lambda_i^0 > 0$  не ограничивают общность процедуры получения оценок типа (5.2). При прочих краевых условиях оценки данного типа получаются по той же схеме.

Компьютерное моделирование показало достаточную приемлемость оценок типа (5.2) для нахождения  $\max |u_i|$  с целью определения гарантированного времени переориентации. С другой стороны, с этой же целью желательно развитие эффективной вычислительной процедуры решения соответствующей задачи нелинейного программирования для нахождения  $\max |u_i|$  на множестве  $S$  возможных состояний линейной системы класса (3.7), (4.2). Это позволит получать более точную оценку гарантированного времени переориентации.

Анализируя структуру законов управления (5.1), также отметим, что значения  $\max |u_i|$  на множестве  $S$  достаточно близки к значениям  $\max |u_i|$  на множестве  $S^*$  тех возможных состояний линейной системы (3.7), (4.2), которые соответствуют различным комбинациям "реберных"  $v_i^* = \pm \rho_i u_i^*$  и "промежуточных"  $v_i^* \equiv 0$  реализаций  $v_i^*$ . При этом точное вычисление  $\max |u_i|$  на множестве  $S^*$  не вызывает затруднений.

Таблица 1

$t$	$\lambda_i^+$	$\lambda_i^-$	$\lambda_i^-$
$[0, T_i^*]$	$\lambda_i^0 - \frac{1}{2}(1 - \rho_i)\alpha_i^* t^2$	$\lambda_i^0 - \frac{1}{2}(1 + \rho_i)\alpha_i^* t^2$	$-(1 + \rho_i)\alpha_i^* t$
$(T_i^*, \tau/2]$	"	$\frac{1}{2}(1 - \rho_i)\alpha_i^* (t - T_i^*)^2$	$-(1 + \rho_i)\alpha_i^* T_i^*$
$(\tau/2, T_i]$	$\frac{1}{2}(1 - \rho_i)\alpha_i^* (t - \tau)^2$	"	"
$(T_i, \tau]$	"	0	"

Действительно, структура выражений (5.1) такова, что рост значений  $\max |u_i|$  существенно определяется "несинхронностью" моментов переключений вспомогательных управлений  $u_i^*$ . Рассмотрение множества возможных состояний  $S^*$  системы (3.7), (4.2) учитывает (хотя и неполностью) указанный эффект "несинхронности" переключений  $u_i^*$ . По этой причине при последующем переходе к вычислению  $\max |u_i|$  уже на множестве  $S$ , где влияние "несинхронности" переключений  $u_i^*$  сказывается в полной мере, будет происходить лишь незначительное отклонение величин  $\max |u_i|$  от их значений на множестве  $S^*$ .

**6. Алгоритм решения задачи 1.** Из проведенных рассуждений следует, что решение задачи 1 переориентации твердого тела при помехах может быть получено в замкнутой форме на базе конструкций законов управления типа (3.1). Действительно, проведенный в разд. 4 анализ возможных траекторий системы (3.7), (4.2) показывает, что ограничения (3.6), будучи выполненными при  $t = t_0$  и  $t = t_1$  (в случае  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$  только при  $t = t_0$ ), будут выполненными и для всех возможных траекторий системы (3.7), (4.2) при  $t \in [t_0, t_1]$ . Соотношения типа (5.2) позволяют конструктивно оценить гарантированное время переориентации  $\tau$ .

Таким образом, алгоритм решения задачи 1 включает следующие этапы.

1°. Предварительный выбор конструкции законов управления  $u_i$  на базе структурных схем типа (3.1).

2°. Оценка "вспомогательных возмущений"  $v_i^*$ . Нахождение чисел  $\beta_i^*$  в (3.8) по значениям  $\beta_i, A_i$ .

3°. Оценка вспомогательных управлений  $u_i^*$ . Предварительный выбор чисел  $\alpha_i^*$ .

4°. Проверка выполнимости ограничений (1.4) на  $u_i$  вдоль траекторий линейных систем типа (3.7), (4.2) при любых допустимых реализациях "вспомогательных помех"  $v_i^*$ . При этом можно опираться на соотношения типа (5.2). Если оценки (1.4) не выполняются или есть "резерв" в их выполнении, необходимо продолжить поиск подходящих чисел  $\alpha_i^*$ . В противном случае гарантированное время переориентации определяется по формуле (4.3).

Эффективность (в смысле точности оценки числа  $\tau$  по заданным ограничениям (1.4)) решения задачи 1 определяют два фактора: 1) правильный выбор структурной схемы законов управления  $u_i$  на базе конструкций (3.3); 2) точность оценок при проверке заданных ограничений (1.4) для всех  $v_i^*$ . В этом плане соотношения (5.2) следует рассматривать лишь как возможные (допустимые), вполне приемлемые на предварительном этапе решения оценки. В каждом конкретном случае эти оценки могут уточняться. Не исключается и использование общих методов оптимизации для нахождения  $\max |u_i|$ .

Отметим также "обратный" вариант применения предложенной процедуры исследования задачи 1. В этом случае при заданных краевых условиях, уровнях помех  $v_i$  и значениях  $A_i$  назначается приемлемая величина  $\tau$  минимального гарантированного времени переориентации. Тогда, зная  $\tau$  и  $\beta_i^*$ , можно использовать зависимость (4.3) для выбора  $\alpha_i^*$ . Далее оцениваются значения  $\alpha_i$  в (1.4) при тех или иных или всех допустимых реализациях  $v_i^*$ . Указанный "обратный" подход можно использовать для оценки возможностей конструкций законов управления (3.3) при решении задачи 1.

Подытожим проведенные рассуждения в виде следующих теорем.

**Теорема 1.** Если уровни  $\alpha_i$  управлений  $u_i$  в системе (1.1) – (1.3) достаточно высоки, то при любых заданных уровнях  $\beta_i$  помех  $v_i$  решающие задачу 1 законы  $u_i$  могут быть синтезированы на базе соотношений типа (3.1). При этом обеспечивается гарантированный результат в задаче 1 – точное приведение твердого тела в заданное

состояние за конечное время  $\tau$  ( $t_1 \leq t_0 + \tau$ ) при любых допустимых реализациях помех  $v_i$ . Решение нелинейной задачи 1 сводится к решению игровых задач для линейных вспомогательных управляемых систем вида (3.7). Уровни  $\beta_i^*$  "вспомогательных помех"  $v_i^*$  зависят от значений  $\beta_i, A_i$  и определяются зависимостями (3.8). Уровни  $\alpha_i^*$  вспомогательных управлений  $u_i^*$  можно установить в соответствии с соотношениями типа (5.2). Величина  $\tau$  зависит от краевых условий, значений  $\alpha_i^*, \beta_i^*$  (зависящих в свою очередь от  $\alpha_i, \beta_i, A_i$ ) и определяется выражением (4.3).

**Теорема 1** определяет возможности решения задачи 1 на базе конструкции законов управления типа (3.1). При этом, если исходить из заданных ограничений на управления  $u_i$ , то условия теоремы 1 конкретизируются следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\lambda_i^0 > 0$ . Если при заданных уровнях  $\alpha_i$  управлений  $u_i$  уровни  $\beta_i$  помех  $v_i$  устанавливаются исходя из неравенств

$$\beta_1^* = \frac{1}{2}(\beta_1 A_1^{-1} + \lambda_2^0 \beta_3 A_3^{-1} + \lambda_3^0 \beta_2 A_2^{-1}) < \alpha_1^* \quad (1 \ 2 \ 3)$$

где  $\alpha_i^*$  удовлетворяет условиям типа (5.2), то задача 1 имеет решение. При этом гарантированное время переориентации  $\tau$  определяется по формуле (4.3).

**Замечание.** Укажем на возможность оценки помех  $v_i$  без использования усиливающих неравенств типа (3.8). В этом случае значения  $\beta_i^*$  сначала устанавливаются произвольно, лишь бы при этом не нарушались неравенства  $\beta_i^* < \alpha_i^*$ . (Значения  $\alpha_i^*$  в свою очередь согласуются с заданными ограничениями (1.4) на  $u_i$  при любых допустимых реализациях  $v_i^*$  в рамках ограничений  $|v_i^*| \leq \beta_i^*$ .) Затем система уравнений  $\frac{1}{2}(\lambda_0 v_1 A_1^{-1} + \lambda_2 v_3 A_3^{-1} - \lambda_3 v_2 A_2^{-1}) = v_1^* \quad (1 \ 2 \ 3)$  решается относительно  $v_i$ . При этом имеют место соотношения

$$v_1 = \frac{2}{\lambda^0} \left[ (\lambda_0^2 + \lambda_1^2) v_1^* + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) v_2^* + (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) v_3^* \right] \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (6.1)$$

Используя зависимости (6.1), можно оценивать "истинные" значения помех  $v_i$ , соответствующие назначенным значениям  $\beta_i^*$ . Такие оценки  $v_i$  возможны для каждой конкретной реализации "вспомогательных помех"  $v_i^*$  в рамках ограничений  $|v_i^*| \leq \beta_i^*$ .

**7. Пример 1. Трехосная переориентация КА при учете помех.** Для КА с  $A_1 = 4 \times 10^4$ ,  $A_2 = 8 \times 10^4$ ,  $A_3 = 5 \times 10^4$  (кгм<sup>2</sup>) рассмотрим задачу 1 трехосной переориентации из начального положения  $x^0 = 0$ ,  $\lambda^0 = (0,7; 0,353, 0,434; 0,432)$  в заданное  $x^1 = 0$ ,  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ .

Допустимые границы изменения помех  $v_i$  определим неравенствами

$$\frac{1}{2} |\lambda_0 v_1 A_1^{-1} + \lambda_2 v_3 A_3^{-1} - \lambda_3 v_2 A_2^{-1}| \leq \beta_1^* = 10^{-3} (c^{-2}) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (7.1)$$

При этом, если использовать усиливающие неравенства типа (3.8), из (7.1) получаем соотношения

$$\frac{1}{2} (\beta_1 A_1^{-1} + \lambda_2^0 \beta_3 A_3^{-1} + \lambda_3^0 \beta_2 A_2^{-1}) = \beta_1^* = 10^{-3} (c^{-2}) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Решая полученную систему относительно  $\beta_i$ , имеем  $\beta_1 = 39,9$ ;  $\beta_2 = 92,9$ ;  $\beta_3 = 57,9$  (Нм). Однако реальные значения  $v_i$  в рамках ограничений (7.1), как будет показано, могут оказаться существенно выше.

Предположим, что, исходя из технических требований к маневренности КА, гарантированное время переориентации  $\tau$  при заданных допустимых границах изменения помех  $v_1$  не должно превышать  $\tau = 70$  (с). Оценим, какие ресурсы потребуются для этого при использовании конструкции законов управления  $u_i$  вида (3.1), (4.2).

Таблица 2

$t$	$u_i^*$	$\lambda_i$	$\lambda_i$
$[0, \tau/2]$	$-\alpha_i^*$	$-(1-\rho_i)\alpha_i^*t$	$\lambda_i^0 - \frac{1}{2}(1-\rho_i)\alpha_i^*t^2$
$(\tau/2, \tau]$	$\alpha_i^*$	$(1-\rho_i)\alpha_i^*(t-\tau)$	$\frac{1}{2}(1-\rho_i)\alpha_i^*(t-\tau)^2$

Таблица 3

$t$	$u_i^*$	$\lambda_i$	$\lambda_i$
$[0, T_i^{0*}]$	$-\alpha_i^*$	$-\alpha_i^*t$	$\lambda_i^0 - \frac{1}{2}\alpha_i^*t^2$
$(T_i^{0*}, T_i^0]$	$\alpha_i^*$	$(1-\rho_i)\alpha_i^*(t-T_i^{0*})$	$\frac{1}{2}(1-\rho_i)\alpha_i^*(t-T_i^{0*})^2$
$(T_i^0, \max T_i^0]$	0	0	0

Заданное значение  $\tau$  в силу (4.2), (4.3) предопределяет значения  $\alpha_i^*$  максимальных уровней вспомогательных управлений  $u_i^*$ . Будем исходить из равенств  $\tau = \tau_i$ , означающих "выравнивание" минимального гарантированного времени переориентации по каждой из переменных  $\lambda_i$ . В итоге получаем соотношения

$$2\{\lambda_i^0[\alpha_i^*(1-\rho_i)]^{-1}\}^{1/2} = \tau \quad (7.2)$$

Учитывая, что  $\alpha_i^*(1-\rho_i) = \alpha_i^* - \beta_i^*$ , где  $\beta_i^* = 10^{-3}$  в случае (7.1), из (7.2) находим

$$\alpha_1^* = 1,289 \times 10^{-3}, \quad \alpha_2^* = 1,354 \times 10^{-3}, \quad \alpha_3^* = 1,353 \times 10^{-3} (c^{-2}) \quad (7.3)$$

Оценим значения  $\alpha_i = \max |u_i|$  законов управления  $u_i$  вида (3.1), (4.2), (7.3).

1°. Рассмотрим сначала случай  $v_i^* = -\rho_i u_i^*$  "наихудших"  $v_i^*$ , максимально задерживающих приведение вспомогательной линейной системы (3.7) в требуемое положение  $\lambda_i = \lambda_i^0 = 0$ . В этом случае значения  $\alpha_i = \max |u_i|$  можно найти вдоль траекторий системы (4.1). Необходимые для вычислений выражения сведены в табл. 2.

Расчет показывает, что вдоль траекторий системы (4.1) имеем

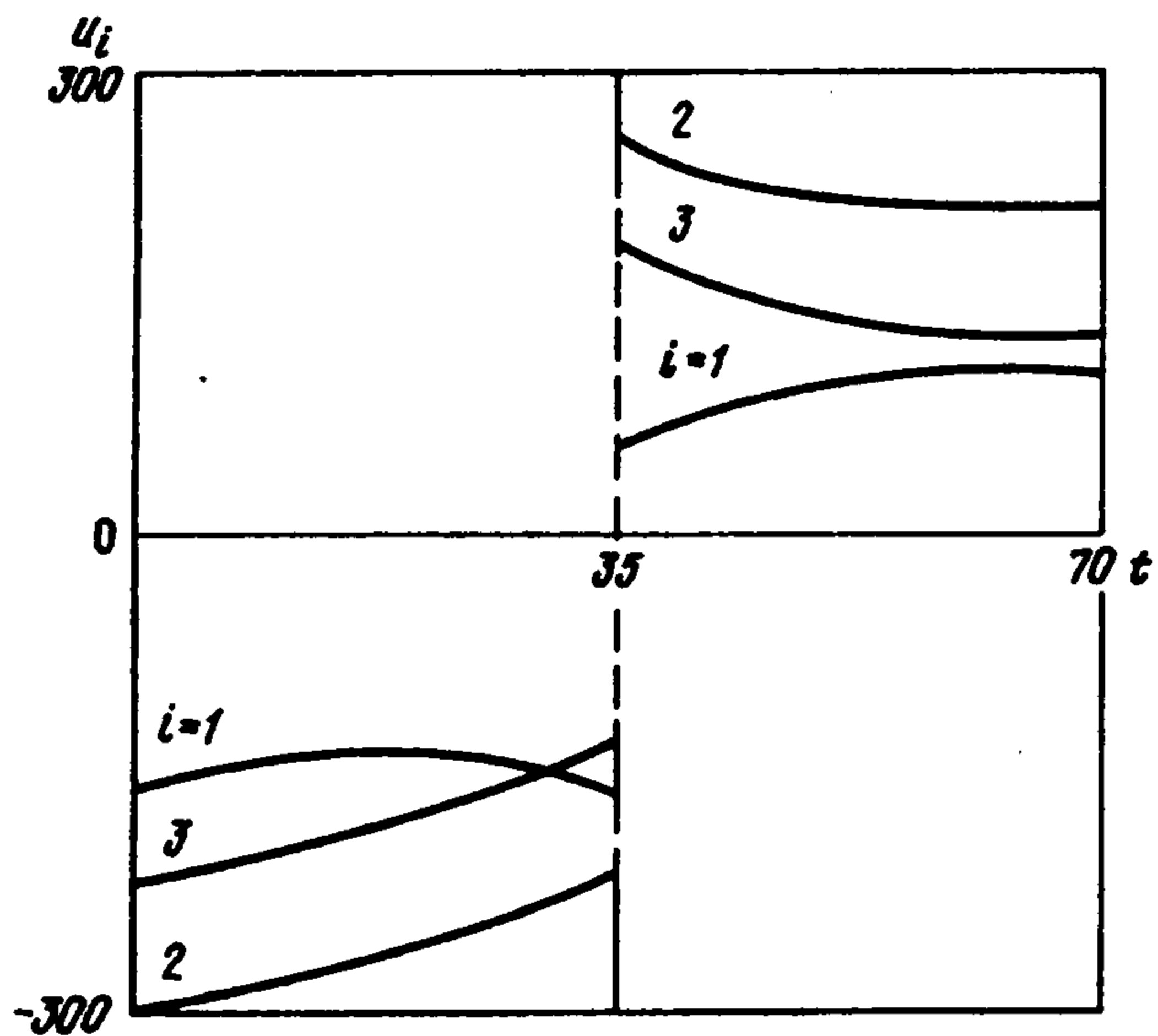
$$\alpha_1 = 137,8, \quad \alpha_2 = 300,6, \quad \alpha_3 = 203,2 \text{ (Нм)} \quad (7.4)$$

Более точно при "наихудших" помехах  $v_i^*$  законы  $u_i$  вида (3.1), (4.2), (7.3) являются кусочно-непрерывными функциями с разрывами при  $t = \tau/2$ , изменяющимися в пределах  $81,0 \leq |u_1| \leq 137,8$ ;  $209,7 \leq |u_2| \leq 300,6$ ;  $120,6 \leq |u_3| \leq 203,2$  (Нм). Законы изменения  $u_i$  показаны на фиг. 3.

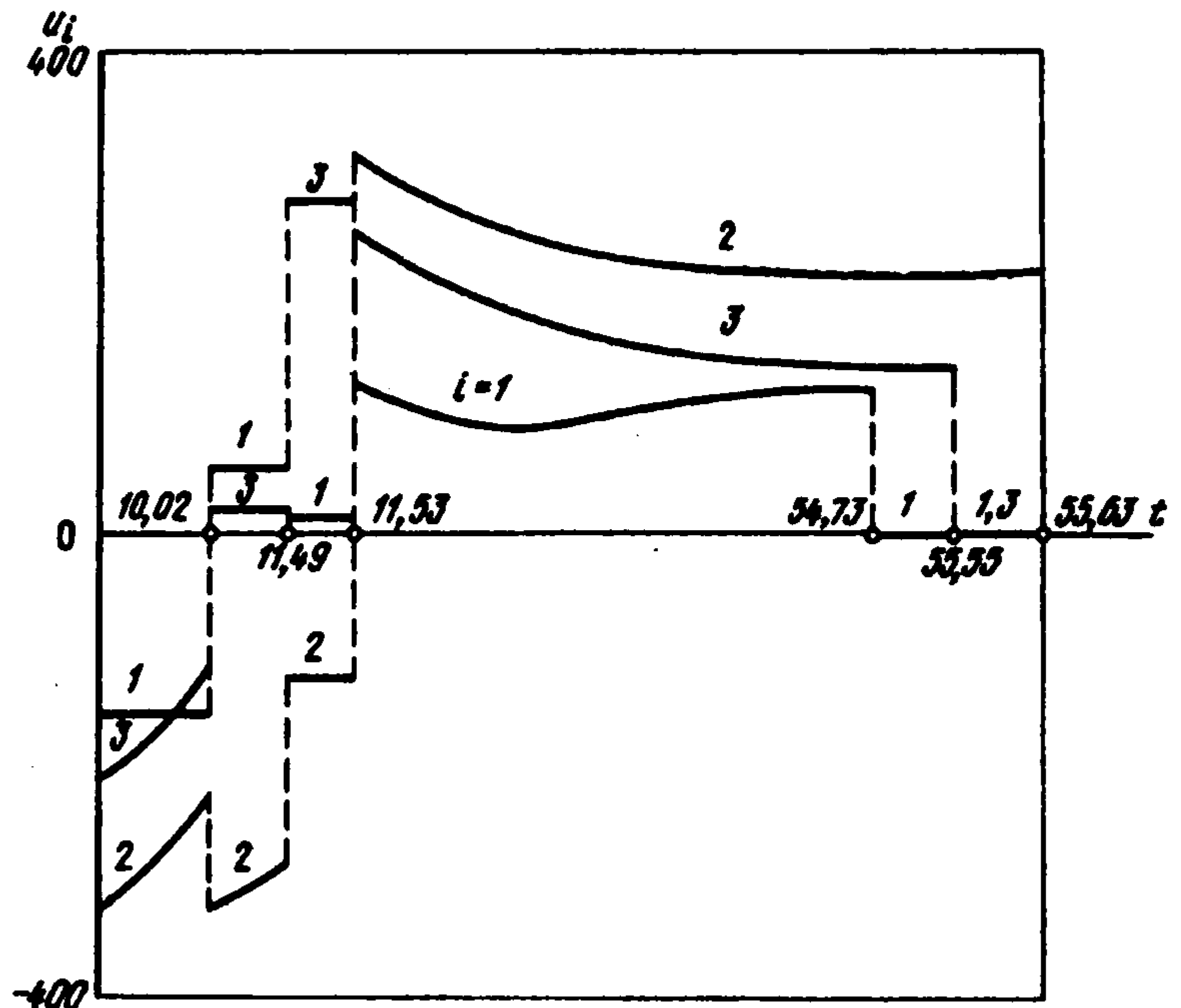
По формулам (6.1) можно найти и программу изменения помех  $v_i$ , соответствующих "наихудшим" реализациям  $v_i^*$ . В данном случае помехи  $v_i$  являются кусочно-непрерывными функциями с разрывами при  $t = \tau/2$ , изменяющимися в пределах  $80,0 \leq |v_1| \leq 105,2$ ;  $159,1 \leq |v_2| \leq 220,4$ ;  $100,0 \leq |v_3| \leq 153,3$ . Отметим, что при этом величины  $\gamma_i = |v_i| |u_i|^{-1}$ , характеризующие отношения уровней помех  $v_i$  к уровням управлений  $u_i$ , изменяются в пределах  $0,611 \leq \gamma_1 \leq 1,030$ ;  $0,688 \leq \gamma_2 \leq 0,944$ ,  $0,634 \leq \gamma_3 \leq 0,926$ , что "в среднем" существенно выше отношения "золотого сечения" ( $\gamma_i > 0,618...$ ).

2°. Рассмотрим далее случай  $v_i^* = 0$  отсутствия помех. Траектории системы (3.6), (4.2), (7.3) в этом случае описаны в разд. 4. Необходимые для оценки  $|u_i|$  выражения сведены в табл. 3. При этом

$$T_i^{0*} = \{[\alpha_i^*(2-\rho_i)]^{-1} [2\lambda_i^0(1-\rho_i)]\}^{1/2}, \quad T_i^0 = (1-\rho_i)^{-1} (2-\rho_i) T_i^{0*}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Теперь в отличие от предыдущего случая время  $T_i^0$  приведения по каждой из переменных  $\lambda_i$  будет различным. При этом  $T_i^0 < \tau$  и  $T_1^0 = 54,73$ ;  $T_2^0 = 55,63$ ;  $T_3^0 = 55,55$  (с). Кроме того, законы управления  $u_i$  (3.1), (4.2), (7.3) будут иметь пять моментов переключения:  $t = 10,02$ ;  $11,49$ ;  $11,53$ ;  $54,73$ ;  $55,55$  (с) и изменятся в пределах  $0 \leq |u_1| \leq 137,8$ ;  $119,2 \leq |u_2| \leq 307,7$ ;  $0 \leq |u_3| \leq 290,5$  (Нм). Законы изменения  $u_i$  показаны на фиг. 4, где для наглядности введен разный масштаб времени на участках между точками  $0$ ;  $10,02$ ;  $11,49$ ;  $11,53$ ;  $54,73$ ;  $55,55$ ;  $55,63$  на оси  $t$ . Таким образом, в случае  $v_i^* = 0$  отсутствия помех в отличие от (7.4) имеем

$$\alpha_1 = 137,8, \alpha_2 = 307,7; \alpha_3 = 290,5 \text{ (Нм)} \quad (7.5)$$

Для оценки работы конструкции (3.1), (4.2) в случае  $v_i^* = 0$  в (4.2) вместо кривых переключений  $\psi_i^p = 0$  возьмем кривые переключений  $\psi_i^0 = 0$ . В рамках указанной конструкции время переориентации  $T = 70$  (с) (равное этому же значению  $\tau$  в "возмущенной" задаче), достигается при  $\alpha_1 = 53,5$ ;  $\alpha_2 = 80,2$ ;  $\alpha_3 = 63,9$  (Нм). Однако подчеркнем, что при заданных уровнях (7.1) помех  $v_i$  конструкция (3.1), (4.2) с кривыми переключений  $\psi_i^0 = 0$  не может обеспечить переориентацию тела за конечное время. Действительно, в этом случае  $\alpha_1^* = 2,886 \times 10^{-4}$ ;  $\alpha_2^* = 3,544 \times 10^{-4}$ ;  $\alpha_3^* = 3,527 \times 10^{-4}$  (с<sup>-2</sup>) и значения  $\rho_i$  хотя бы для одного  $i$  будут превышать отношение "золотого сечения".

Это означает [24], что вспомогательные управления  $u_i^*$  вида (4.2) с кривыми переключений  $\psi_i^p = 0$  не могут перевести переменную  $\lambda_i$  с указанным индексом  $i$  в положение  $\lambda_i = \lambda_i^0 = 0$  за конечное время. В то же время законы управления (3.1), (4.2) с кривыми переключений  $\psi_i^p = 0$  в (4.2), как показано, обеспечивают требуемую переориентацию тела.

3°. Рассмотрим также случай  $v_i^* = \rho_i u_i^*$ , когда "вспомогательные помехи"  $v_i^*$  выполняют функцию дополнительных вспомогательных управлений  $u_i^*$ . Необходимые для вычислений выражения сведены в табл. 4. При этом

$$T_i^* = \{[\alpha_i^* (1 + \rho_i)]^{-1} [\lambda_i^0 (1 - \rho_i)]\}^{1/2}, \quad T_i = 2(1 - \rho_i)^{-1} T_i^*$$

Таблица 4

$t$	$u_i^*$	$\lambda_i$	$\lambda_i$
$[0, T_i^*]$	$-\alpha_i^*$	$-(1+\rho_i)\alpha_i^* t$	$\lambda_i^0 - \frac{1}{2}(1+\rho_i)\alpha_i^* t^2$
$[T_i^*, T_i]$	$\alpha_i^*$	$(1-\rho_i)\alpha_i^*(t-T_i)$	$\frac{1}{2}(1-\rho_i)\alpha_i^*(t-T_i)^2$
$[T_i, \max T_i]$	0	0	0

Как и в случае 2, время  $T_i$  приведения по каждой из переменных  $\lambda_i$  будет различным. При этом  $T_i < T_i^0 < \tau$  и  $T_1 = 52,49$ ;  $T_2 = 53,12$ ;  $T_3 = 53,05$  (с). Кроме того, законы управления (3.1), (4.2), (7.3) будут иметь пять моментов переключения:  $t = 5,88$ ;  $6,92$ ;  $6,94$ ;  $52,49$ ;  $53,05$  (с) и изменятся в пределах  $0 \leq |u_1| \leq 137,8$ ;  $82,5 \leq |u_2| \leq 338,2$ ;  $0 \leq |u_3| \leq 322,5$  (Нм). И так, в случае  $v_i^* = \rho_i u_i^*$ , в отличие от (7.4), (7.5) получаем

$$\alpha_1 = 137,8; \alpha_2 = 338,2; \alpha_3 = 322,5 \text{ (Нм)}. \quad (7.6)$$

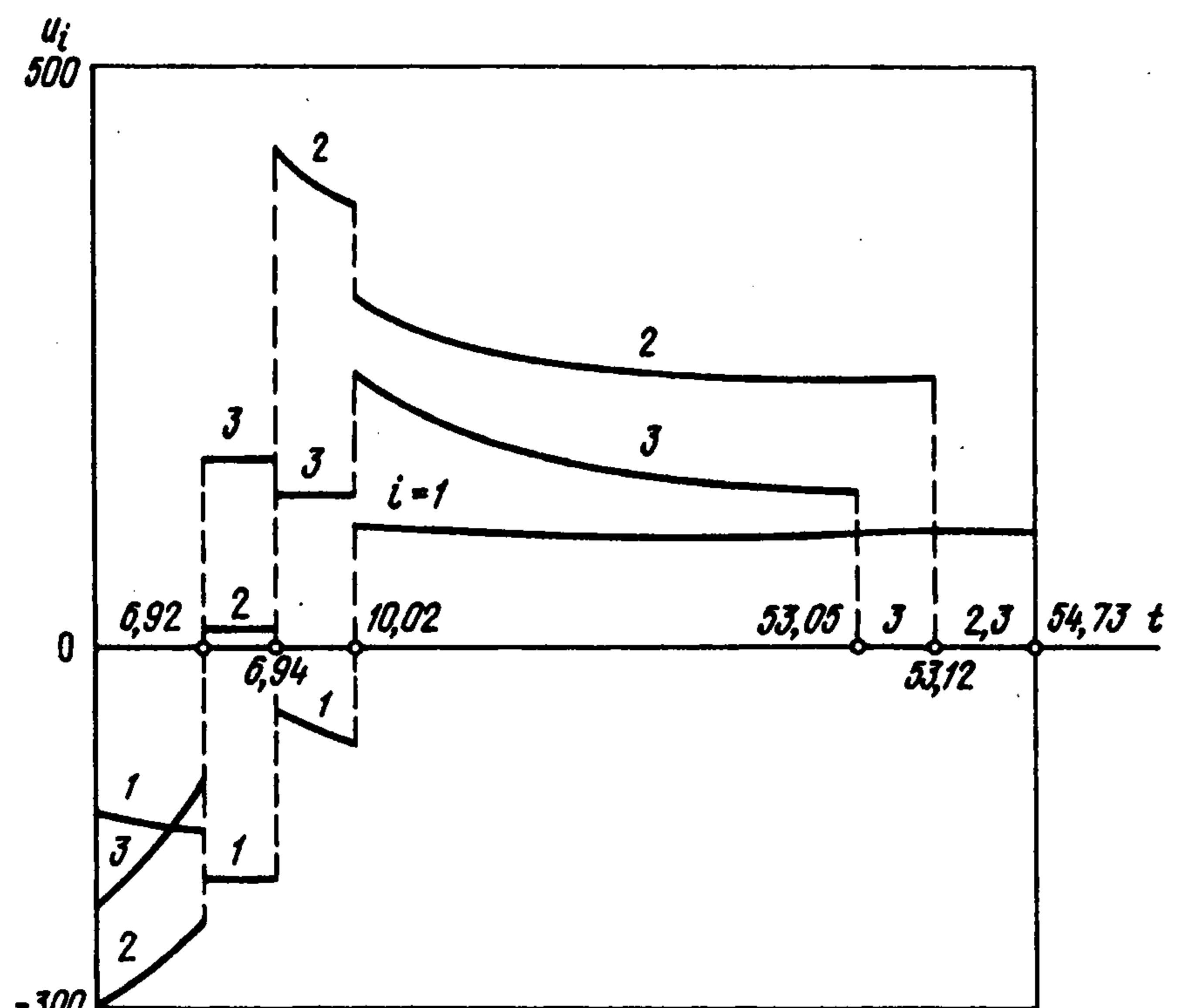
4°. Пусть теперь "вспомогательные помехи"  $v_i^*$  выполняют различные функции:  $v_2^*, v_3^*$  — функции дополнительных вспомогательных управлений  $u_2^*, u_3^*$ , а  $v_1^* \equiv 0$ . Необходимые для вычислений выражения получаются соответствующей комбинацией выражений из табл. 2, 4.

Время  $T_2 = 53,12$ ;  $T_3 = 53,05$  (с) приведения по переменным  $\lambda_2, \lambda_3$  в этом случае меньше времени  $T_1^0 = 54,73$  (с) приведения по переменной  $\lambda_1$ . Законы (3.1), (4.2), (7.3) будут иметь пять моментов переключения:  $t = 6,92$ ;  $6,94$ ;  $10,02$ ;  $53,05$ ;  $53,12$  (с) и изменятся в пределах  $76,6 \leq |u_1| \leq 191,3$ ;  $0 \leq |u_2| \leq 429,8$ ;  $0 \leq |u_3| \leq 234,8$  (Нм). Законы изменения  $u_i$  показаны на фиг. 5, где для наглядности введен разный масштаб времени на участках между точками  $0$ ;  $6,92$ ;  $6,94$ ;  $10,02$ ;  $53,05$ ;  $53,12$ ;  $54,73$  на оси  $t$ . Таким образом, в отличие от (7.4)–(7.6) в данном случае имеем  $\alpha_1 = 191,3$ ;  $\alpha_2 = 429,8$ ;  $\alpha_3 = 234,8$  (Нм).

5°. Анализ только случаев 2–4 показывает, что законы управления  $u_i$  вида (3.1), (4.2), (7.3) могут достаточно сильно изменяться при отклонении "вспомогательных помех"  $v_i^*$  от "наихудшей"  $v_i^* = -\rho_i u_i^*$  программы (случай 1°). Необходима оценка чисел  $\alpha_i$  при любых допустимых реализациях  $v_i^*$ . Компьютерное моделирование оценок типа (5.2), охватывающих сразу все допустимые  $v_i^*$ , дает следующие результаты:  $\alpha_1 = 318,8$ ;  $\alpha_2 = 514,5$ ;  $\alpha_3 = 415,9$  (Нм).

**Выводы.** 1°. При заданных краевых условиях и значениях  $A_i$ , а также уровнях помех  $v_i$ , определяемых в соответствии с (7.1), гарантированное время переориентации  $\tau = 70$  (с) достигается в рамках конструкции законов управления (3.1), (4.2), (7.3) при  $\max \alpha_i = 514,5$  (Нм). Однако это не только "осторожная", но и несколько завышенная оценка допустимых уровней  $u_i$ .

2°. При заданных уровнях помех  $v_i$  "невозмущенная" конструкция (3.1), (4.2) с кривыми переключений  $\psi_i^0 = 0$  в (4.2), в которой  $\alpha_i^*$  находятся из расчета



Фиг. 5

на время переориентации  $T = 70$  (с), не в состоянии решить задачу 1 за конечное время.

3°. "Невозмущенная" конструкция (3.1), (4.2) с кривыми переключений  $\psi_i^0 = 0$  в (4.2), в которой  $\alpha_i^*$  находятся из расчета на ограничения  $\max \alpha_i = 514,5$  (Нм) (а не на заданное время  $T$  переориентации), гарантирует время переориентации  $T = 27,64$  (с). Таким образом, "временная плата"  $\gamma = \tau - T$  за учет помех  $v_i$  при заданных уровнях  $u_i$  и  $v_i$  и "степени точности" используемых оценок равна  $\gamma = 42,36$  (с).

**8. Алгоритм решения задачи переориентации при отсутствии помех ( $v_i \equiv 0$ ).** В этом случае предложенный в разд. 6 алгоритм решения задачи 1 значительно упрощается. Он включает следующие этапы.

1°. Предварительный выбор конструкции законов управления  $u_i$  на базе структурных схем типа (3.1).

2°. Оценка вспомогательных управлений  $u_i^*$ . Предварительный выбор чисел  $\alpha_i^*$ .

3°. Проверка выполнимости ограничений (1.4) и  $u_i$  вдоль траекторий линейных систем типа (3.2) при  $u_i^*$  вида (4.2) с кривыми переключений  $\psi_i^0(\lambda_i, \lambda_i) = 0$ , получающимися из  $\psi_i^p = 0$  при  $\rho_i = 0$ . Если оценки (1.4) не выполняются или есть "резерв" в их выполнении, необходимо продолжить поиск подходящих чисел  $\alpha_i^*$ . В противном случае гарантированное время переориентации определяется по формуле (4.3) (при  $\rho_i = 0$ ).

Примеры расчетов по данной методике, их сравнение с результатами, полученными по другим широко используемым методикам, даны в [13,31]. Сравнение показывает достаточно высокую эффективность предложенного подхода.

Так, численным методом установлено [11], что для КА с  $A_1 = 4 \times 10^4$ ,  $A_2 = 8 \times 10^4$ ,  $A_3 = 5 \times 10^4$  (кгм<sup>2</sup>) на трехосную переориентацию из положения  $\kappa^0 = 0$ ,  $\rho_0 = \psi_0 = \pi/10$ ,  $\theta_0 = -\pi/4$  в  $\kappa^1 = 0$ ,  $\rho_1 = \psi_1 = \pi/6$ ,  $\theta_1 = \pi/4$  ( $\kappa$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  – углы Эйлера) пространственным разворотом при ограничениях  $|u_i| \leq 300$  (Нм) требуется 27,5 (с). (Для сравнения на плоский поворот требуется 38,5 (с).) Соответствующие оптимальные законы управления релейны и имеют одно (при плоском повороте) или до четырех переключений. Наряду с этим также показано [13, 31], что, используя законы управления  $u_i$  вида (3.1), переориентация достигается за 29 (с); при этом  $u_i$  кусочно-непрерывны и имеют один момент переключения  $t = 14,5$  (с). Сравнение показывает, что законы управления  $u_i$  вида (3.1) в данном случае являются субоптимальными по быстродействию.

**9. Оценка допустимого уровня помех в задаче 1.** Предположим, при отсутствии помех ( $v_i \equiv 0$ ) решение задачи переориентации твердого тела (при краевых условиях задачи 1) получено на базе конструкции законов управления  $u_i$  типа (3.1). При этом предполагается, что для линейной системы типа (3.2) решена задача оптимального быстродействия. Ограничения  $|u_i| \leq \alpha_i^*$  согласуются с заданными ограничениями (1.4). Для оценки работоспособности данной конструкции (3.1) в условиях помех  $v_i$  поставим следующую задачу.

**Задача 3.** Найти допустимые уровни  $\beta_i$  помех  $v_i$ , при которых соответствующая "невозмущенному" случаю конструкция (3.1) по-прежнему обеспечивает точную требуемую переориентацию твердого тела за конечное время и при любых допустимых реализациях помех  $v_i$ . Ограничения (1.4), отвечающие "невозмущенному" случаю, могут при этом нарушаться.

Поставленная задача 3 лишь частично характеризует способность соответствующей "невозмущенному" случаю конструкции (3.1) сохранять свое функциональное назначение. Действительно, при этом не гарантируется сохранение исходных

ограничений на управления  $u_i$ . В то же время при положительном решении задачи 3 гарантируется принадлежность фазовых траекторий системы (3.7) (при  $u_i^*$ , соответствующих "невозмущенному" случаю, и всех допустимых  $v_i^*$ ) ограниченной области ее фазовой плоскости. Это в принципе позволяет дать такое "упреждение" на коэффициенты  $\alpha_i^*$ , при котором сохраняется не только функциональное назначение соответствующей "невозмущенному" случаю конструкции (3.1), но и исходные ограничения (1.4). Естественно, величина гарантированного времени переориентации увеличивается.

Решение задачи 3 может быть конструктивно получено на базе результатов работы [24] применительно к вспомогательным линейным системам типа (3.7). Действительно [24], игнорировать наличие "вспомогательных возмущений"  $v_i^*$  при построении вспомогательных управлений  $u_i^*$  в системе вида (3.7) можно, лишь если отношения  $\rho_i$  максимальных уровней  $v_i^*$  и  $u_i^*$  не превышают отношения "золотого сечения"  $\rho_i < (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618\dots$ .

Опираясь на указанный результат и предложенную процедуру решения задачи переориентации твердого тела, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть допустимые уровни  $\beta_i$  помех  $v_i$  определяются из условий

$$2\beta_1^* = [\max|\lambda_0|\beta_1 A_1^{-1} + \max|\lambda_2|\beta_3 A_3^{-1} + \max|\lambda_3|\beta_2 A_2^{-1}] < (\sqrt{5} - 1)\alpha_1^* \quad (123)$$

( $\alpha^*$  – максимальные уровни вспомогательных управлений  $u_i^*$  в "невозмущенном" случае). Тогда задача 3 имеет решение и указанные уровни  $\beta_i$  являются допустимыми уровнями возмущений в этой задаче.

В связи с утверждением теоремы 3 отметим, что предложенный подход к задаче переориентации твердого тела, учитывающий влияние возмущений и основанный на их игровой модели, гарантирует решение задачи 3 при  $\beta_i^* < \alpha_i^*$ .

**10. Пример 2. Одноосная переориентация КА при учете помех.** Для КА с теми же, что и в примере 1, значениями  $A_i$  рассмотрим задачу одноосной переориентации жестко связанного с ним единичного вектора  $\mathbf{r}$  в направлении неподвижного в инерциальном пространстве единичного вектора  $\mathbf{s}$ . Для этого наряду с уравнениями Эйлера (1.1) рассмотрим кинематические уравнения Пуассона

$$s_1 = s_2 x_3 - s_3 x_2 \quad (123), \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \quad (10.1)$$

Здесь  $s_i$  – проекции вектора  $\mathbf{s}$  на главные центральные оси инерции КА. Для определенности положим  $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$ . В данном случае направление вектора  $\mathbf{r}$  совпадает с направлением одной из главных центральных осей инерции КА.

Рассмотрим переориентацию из начального положения  $x_i = 0, s_1 = 0,4, s_3 = 0,6$  в конечное  $x_i = 0, s_1 = s_3 = 0$ . Решим сначала "невозмущенную" задачу, предполагая  $v_i \equiv 0$  в уравнениях (1.1).

Используем законы управления [23]

$$u_j = \frac{A_j}{s_2} [\varphi_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \frac{s_j u_2}{A_2} \pm u_j^*] \quad (j = 1, 3), \quad u_2 = A_2 \varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (10.2)$$

Знак плюс перед последним слагаемым в выражениях для  $u_j (j = 1, 3)$  соответствует  $j = 1$ , а знак минус –  $j = 3$ . Формы  $\varphi_j$  таковы, что из замкнутой системы (1.1), (10.1), (10.2) выделяется линейная система

$$\ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{s}_1 = u_3^*, \quad \ddot{s}_3 = u_1^* \quad (10.3)$$

(Отметим, что согласование индексов у  $u_j$  и  $u_j^*$  в (10.2) приводит, однако, к их рассогласованию у  $s_j$  и  $u_j^*$  в (10.3).) Для линейных подсистем  $s_1^{\ddot{}} = u_3^*$ ,  $s_3^{\ddot{}} = u_1^*$  решим задачу оптимального по быстродействию приведения в начало координат  $s_j = s_j^* = 0$  ( $j = 1, 3$ ). При этом ограничения  $|u_j^*| \leq \alpha_j^*$  ( $j = 1, 3$ ) принимаются при учете заданных ограничений  $|u_i| \leq \alpha_i$ .

Было установлено [13], что при  $\max \alpha_i \leq 170$  (Нм) время переориентации  $T = 28,3$  (с). При этом  $\alpha_1^* = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_3^* = 2 \times 10^{-3}$  (с<sup>-2</sup>). Однако лишь управление  $u_1$  достигает предельного значения, в то время как  $|u_2| \leq 14$ ,  $|u_3| \leq 140$  (Нм). Законы управления  $u_i$  – кусочно-непрерывные функции с разрывами при  $t = T/2$ .

Рассмотрим эту же задачу переориентации, но с учетом возможного действия неконтролируемых "шумов" при реализации законов управления (10.2). Предположим, что "шумы" возникают при обработке вспомогательных релейных управлений  $u_j^*$  ( $j = 1, 3$ ). При учете структуры управлений (10.2) это приводит к условию  $v_2 = 0$ .

При переходе от (1.1), (10.1), (10.2) к (10.3), при учете помех  $v_1, v_3$  получаем "возмущенную" систему  $s_j^{\ddot{}} = u_j^* + v_j^*$  ( $j = 1, 3$ ). Здесь  $v_1^* = s_2 v_3 A_3^{-1}$ ,  $v_3^* = -s_2 v_1 A_1^{-1}$ . На основании теоремы 3 заключаем, что если уровни  $\beta_i$  помех  $v_j$  ( $j = 1, 3$ ) удовлетворяют неравенствам

$$|\beta_3 A_3^{-1}| < 0,618 \alpha_1^*, \quad |\beta_1 A_1^{-1}| < 0,618 \alpha_3^* \quad (10.4)$$

то законы управления (10.2) гарантируют точную переориентацию КА за конечное время и при самом неблагоприятном действии "шумов" в каналах управления  $u_j$  ( $j = 1, 3$ ). Подставляя в (10.4) найденные при решении "невозмущенной" задачи значения  $\alpha_i^*$ , получаем оценки допустимых уровней "шумов":  $\beta_1 < 92,7$ ;  $\beta_3 < 49,4$  (Нм).

**11. О решении задачи 2.** Отметим особенности решения задачи 2. Пусть для определенности  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\lambda_i^0 > 0$ ,  $\dot{\lambda}_i^0 > 0$ . Общность рассуждений при этом не теряется.

*Учет ограничений типа (3.6).* В задаче 2 условие  $x^0 = 0$  не предполагается. Это обстоятельство требует, вообще говоря, учета ограничений (3.6), выполнявшихся в случае  $x^0 = 0$  автоматически. Ограничения (3.6) будут выполняться только при достаточной "крутизне" участков парабол, соответствующих оптимальным траекториям системы  $\lambda_i^{\ddot{}} = (1 + \rho_i) u_i^*$ ,  $|u_i^*| \leq \alpha_i^*$ . Эти участки парабол ограничивают возможные (при допустимых реализациях  $v_i^*$ ) траектории системы (3.7), (4.2) до их попадания на кривые переключений  $\psi_i^p = 0$ . Такой выбор достаточно "крутых" участков парабол накладывает определенные ограничения на уровни  $\alpha_i^*$  вспомогательных управлений  $u_i^*$ . Подобные ограничения могут войти в противоречие с исходными ограничениями (1.4) на  $u_i$ .

Определим уровни  $\alpha_i^*$  вспомогательных управлений  $u_i^*$ , гарантирующие выполнение условий (3.6). Для этого отметим, что представляющие интерес участки парабол системы  $\lambda_i^{\ddot{}} = (1 + \rho_i) u_i^*$  имеют вид  $\lambda_i = \lambda_i^0 - [2\alpha_i^*(1 + \rho_i)]^{-1} [\dot{\lambda}_i^2 - (\dot{\lambda}_i^0)^2]$ . Следовательно, значения  $\lambda_i^*$  точек пересечения этих траекторий с осями  $\lambda_i = 0$  определяются таким образом:

$$\lambda_i^* = \lambda_i^0 + [2\alpha_i^*(1 + \rho_i)]^{-1} (\dot{\lambda}_i^0)^2 \quad (11.1)$$

Из соотношений (11.1), учитывая неравенства  $|\lambda_i(t)| \leq \lambda_i^*$  и уравнения (1.2),

закключаем, что искомый диапазон значений  $\alpha_i^*$ , гарантирующих выполнение неравенств (3.6), определяется из условий

$$\Sigma\{\lambda_i^0 + [2\alpha_i^*(1 + \rho_i)]^{-1}(f_i^0)^2\}^2 \leq 1, \quad (11.2)$$

$$2f_1^0 = x_1^0\lambda_0^0 + x_3^0\lambda_2^0 - x_2^0\lambda_3^0 \quad (12.3)$$

Выполнения условий (11.2) при значениях  $\alpha_i^*$ , не противоречащих исходным ограничениям (1.4), всегда можно добиться за счет предварительного снижения величины угловой скорости тела. Задача снижения угловой скорости тела решается на базе лишь уравнений Эйлера (1.1). В данной статье она не рассматривается. С другой стороны, если уровни  $\alpha_i$  исходных управлений  $u_i$  достаточно высоки, то выполнения условий (11.2) всегда можно добиться за счет выбора соответствующих значений  $\alpha_i^*$  без нарушения (1.4).

*Неоднозначность зависимости максимальных уровней  $\alpha_i^*$  вспомогательных управлений  $u_i^*$  от величины  $\tau$ .* Действительно, уже в "невозмущенном" случае ( $v_i \equiv v_i^* \equiv 0$ ) при решении задачи 2 исходные ограничения (1.4) на управления  $u_i$  вида (3.1) могут быть удовлетворены при двух различных наборах значений  $\alpha_i^*$ . Этим двум наборам  $\alpha_i^*$  соответствуют два набора траекторий системы (3.2), приводящих в положение  $\lambda_i = \lambda_i^* = 0$ . В указанных случаях как бы "взаимно уравновешиваются" тенденции к увеличению (уменьшению) величин  $\alpha_i$  в (1.4) за счет уменьшения (увеличения) величины  $\lambda_0$  в знаменателе выражения (3.1). Указанная неоднозначность не является препятствием в решении. Достаточно выбрать тот набор  $\alpha_i^*$ , которому соответствует меньшее значение времени управления. Однако требуется учет данного обстоятельства в процессе решения, в том числе и в "возмущенном" случае.

**Теорема 4.** Если уровни  $\alpha_i$  управлений  $u_i$  в системе (1.1) – (1.3) достаточно высоки, причем уровни  $\alpha_i^*$  вспомогательных управлений  $u_i^*$  выбираются в соответствии с (11.2), то при любом заданном уровне помех  $v_i$  законы  $u_i$  в задаче 2 могут быть сформированы на базе соотношений типа (3.1). При этом обеспечивается точное решение задачи 2 при любых допустимых реализациях помех  $v_i$ . Решение нелинейной задачи 2 сводится к решению игровых задач для линейных вспомогательных управляемых систем вида (3.7).

Конкретизация условий теоремы 4 применительно к оценке гарантированного времени переориентации может быть проведена (с учетом отмеченных особенностей) так же, как в разд. 6.

Предложенный подход к решению задач 1,2 может быть модифицирован при учете других трактовок дифференциальной игры для вспомогательных линейных систем типа (3.7).

**12. Пример 3. Трехосная переориентация КА при учете помех (при одновременном гашении угловой скорости).** Для КА с теми же, что и в примерах 1, 2, значениями  $A_i$  рассмотрим задачу трехосной переориентации при краевых условиях:  $x^0 = (0, 0, 101; 0, 0, 111; 0, 0, 176)$ ,  $\lambda^0 = (0, 7; 0, 353; 0, 434; 0, 432)$  и  $x^1 = 0$ ,  $\lambda^1 = (1, 0, 0, 0)$ . Отметим, что заданному начальному значению  $x^0$  угловой скорости КА соответствуют достаточно большие начальные значения компонент  $K_i = A_i x_i^0$  вектора  $K$  кинетического момента КА:  $K_1 = 404$ ,  $K_2 = 888$ ,  $K_3 = 880$  (кгм<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>). Уровни  $\beta_i$  помех  $v_i$ , как и в примере 1, выбираем в соответствии с неравенствами (7.1), используя при этом соотношения (3.8).

Для решения применим законы управления вида (3.1). Ограничимся анализом случая "наихудших" вспомогательных помех  $v_i^*$ , максимально задерживающих приведение системы

$t$	$u_i^*$	$\lambda_i$	$\lambda_i$
$[0, T_i^{**}]$	$-\alpha_i^*$	$\dot{\lambda}_i^0 - (1 - \rho_i)\alpha_i^* t$	$\lambda_i^0 + \lambda_i^0 t - \frac{1}{2}(1 - \rho_i)\alpha_i^* t^2$
$[T_i^{**}, T]$	$\alpha_i^*$	$(1 - \rho_i)\alpha_i^* (t - T)$	$\frac{1}{2}(1 - \rho_i)\alpha_i^* (t - T)^2$

(3.7) в требуемое с позиций решения поставленной задачи положение  $\lambda_i = \dot{\lambda}_i = 0$ . Необходимые для вычислений выражения сведены в табл. 5, где

$$T_i^{**} = \{[\alpha_i^*(1 - \rho_i)]^{-1} \{ \dot{\lambda}_i^0 + [\frac{1}{2}(\dot{\lambda}_i^0)^2 + \alpha_i^* \lambda_i^0 (1 - \rho_i)] \} \}^{1/2}$$

$$\alpha_i^* = \beta_i^* + \varepsilon_i + (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2)^{1/2}, \quad \varepsilon_i = (2T^2)^{-1} (2T\dot{\lambda}_i^0 + 4\lambda_i^0), \quad \delta_i = T^{-1}\dot{\lambda}_i^0 \quad (12.1)$$

Данные выражения составлены при учете имеющих место при заданных краевых условиях неравенств  $\lambda_i^0 > 0$ ,  $\dot{\lambda}_i^0 > 0$  и основаны на предположении  $T = T_i$ , где  $T_i$  — время переориентации по каждой из переменных  $\lambda_i$ . В частности, выражения для  $\alpha_i^*$  получены в результате решения уравнений

$$T\alpha_i^*(1 - \rho_i) = \dot{\lambda}_i^0 + 2[\frac{1}{2}(\dot{\lambda}_i^0)^2 + \alpha_i^* \lambda_i^0 (1 - \rho_i)]^{1/2}$$

при учете равенств  $\alpha_i^*(1 - \rho_i) = \alpha_i^* - \beta_i^*$ . При этом в процессе решения корни  $\alpha_i^* = \beta_i^* + \varepsilon_i - (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2)^{1/2}$  указанного уравнения исключаются, ибо в данном случае  $\alpha_i^* - \beta_i^* > 0$ .

Расчет показывает, что, например, при  $|u_i| \leq 300$  (Нм) в рамках конструкции законов управления (3.1), (4.2) переориентация невозможна ни при каком  $T$ . Это вполне согласуется с отмеченной в разд. 11 особенностью 1. В то же время уже при  $\max \alpha_i = 300,9$  (Нм) для случая  $v_i^* = -\rho_i u_i^*$  "наихудших"  $v_i^*$  переориентация возможна. В данном случае  $T = 120$  (с). Функции  $u_i$  кусочно-непрерывны и имеют три момента переключения  $t = 68,61; 72,99; 73,11$  (с). Подчеркнем, что как уменьшение, так и увеличение  $T$  приводит к увеличению  $\alpha_i$  — медленному для относительно большого промежутка времени. Так, при  $\max \alpha_i = 302,15$  (Нм) переориентация достигается при  $T = 108$  и  $T = 130$  (с). Данное обстоятельство также вполне согласуется с отмеченной в разд. 11 второй особенностью.

Автор благодарит Ю.А. Архангельского, В.В. Румянцева, Ф.Л. Черноусько и участников руководимых ими семинаров за обсуждение результатов статьи, а также С.В. Абрамова за помощь при расчетах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Б.Н., Боднер В.А., Алексеев К.Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 6. С. 1235–1238.
2. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вест. МГУ. Математика и механика. 1970. № 2. С. 83–96.
3. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
5. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
6. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра в гравитационном поле. М.: Наука, 1975. 308 с.

7. Шкляр В.Н., Малышенко А.М. К задаче оптимального пространственного разворота космического аппарата относительно центра масс // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 4. С. 473—480.
8. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. 222 с.
9. Зубов В.И., Ермолин В.С., Сергеев С.Л., Смирнов Е.Я. Управление вращательным движением твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 200 с.
10. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 380 с.
11. Гуляев В.П., Кошкин В.Л., Савилова И.В. Оптимальное по быстродействию управление трехосной ориентацией твердого тела при ограниченных параметрах управления // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 11—15.
12. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
13. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 287 с.
14. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974. 232 с.
15. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978, 351 с.
16. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
17. Тертычный В.Ю. Стохастическая стабилизация управляемого вращательного движения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 9—14.
18. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
19. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
20. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
21. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
22. Воротников В.И. О стабилизации перманентных вращений тяжелого твердого тела, закрепленного в неподвижной точке // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 16—18.
23. Воротников В.И. Об управлении угловым движением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 38—43.
24. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883—893.
25. Черноусько Ф.Л. Декомпозиции и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64—82.
26. Черноусько Ф.Л. Синтез управления нелинейной динамической системой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179—191.
27. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440—456.
28. Воротников В.И. Об устойчивости и стабилизации движения относительно части переменных // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 914—923.
29. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
30. Воротников В.И. Об оптимальной стабилизации движения относительно части переменных // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 726—736.
31. Воротников В.И. Об оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 3. С. 22—34.
32. Воротников В.И. Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 3—62.
33. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems // Prepr. IFAC Congress, Helsinki, 1978. V. 2. P. 1115—1120.

34. *Jakubczyk B., Respondek W.* On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math. 1980. V. 28. № 9–10. P. 517–522.
35. *Hunt L.R., Su R., Meyer G.* Global Transformations of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1983. V. AC-28. № 1. P. 24–31.
36. *Dwyer T.A.W.* III. Exact nonlinear control of large angle rotational maneuvers // IEEE Trans. Autom. Contr. 1984. V. AC-29. № 9. P. 769–774.
37. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.
38. *Васильев С.Н.* К управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях и постоянно действующих возмущениях // Изв. РАН. Техн. Кибернетика. 1993. № 1. С. 77–82.
39. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
40. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение. 1968. 764 с.
41. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию  
16.VI.1993