УДК 531.38

© 1994 г. А.П. Маркеев

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СОУДАРЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Решается задача об орбитальной устойчивости поступательно-вращательного движения твердого тела, имеющего форму кругового диска, над неподвижной горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Плоскость считается абсолютно гладкой, диск – тонким, однородным, а соударение диска с плоскостью – абсолютно упругим. В невозмущенном движении плоскость диска вертикальна, диск вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной или горизонтальной оси, а его центр тяжести в результате соударений совершает периодические колебания вдоль фиксированной вертикали.

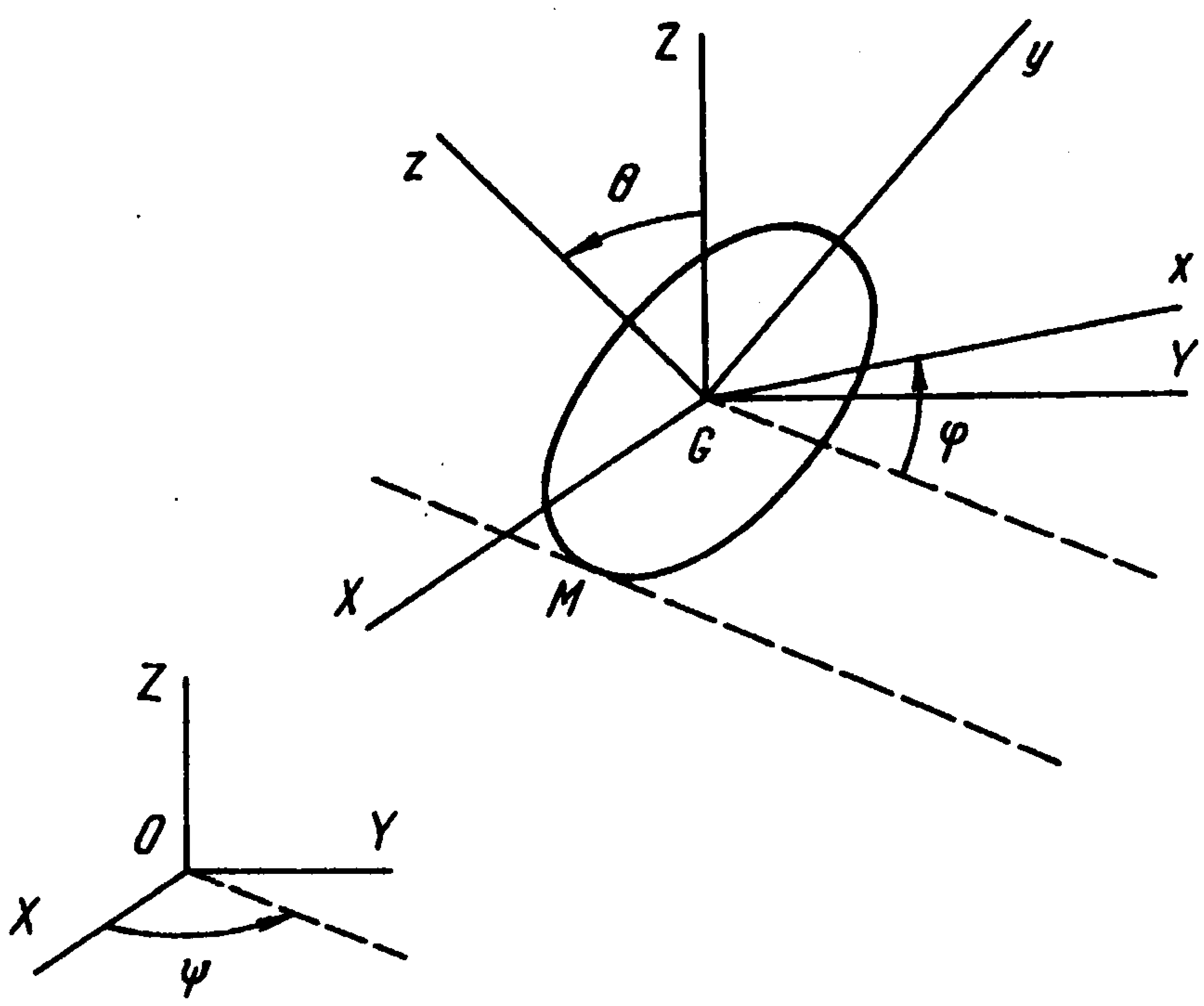
В первых исследованиях [1, 2] динамики тяжелого твердого тела с произвольным центральным эллипсоидом инерции при наличии соударений с абсолютно гладкой плоскостью использовались уравнения свободного движения тела на конечных промежутках времени между ударами и "припасовывание" граничных условий [3] на концах этих промежутков. Граничные условия получались из общей теории удара без трения [4]. В предположении о том, что плоскость неподвижна, а удар абсолютно упругий, была исследована [1] устойчивость в первом приближении вращения тела вокруг главной центральной оси инерции, обнаружена своеобразная "квантованность" областей устойчивости и неустойчивости по высоте подскока тела над плоскостью. Эти результаты были перенесены [2] на случай, когда удар не является упругим, а плоскость совершает заданные синусоидальные вибрации вдоль вертикального направления.

Для исследования движения систем с идеальной неудерживающей связью была предложена [5] негладкая замена переменных, исключающая неудерживающую связь и позволяющая получить уравнения движения в форме уравнений Рауса, справедливые на произвольном временном интервале. Это дало возможность решить ряд задач динамики виброударных систем при помощи метода усреднения [6, 7].

Сочетание негладкой замены переменных из [5] со специальным выбором обобщенных координат, осуществляемым при помощи "редуцирующей" замены переменных, позволило [8] записать уравнения движения системы с идеальной неудерживающей связью в форме уравнений Гамильтона. Такой подход нашел затем применение при исследовании задач об устойчивости движения тела при наличии его соударений с плоскостью и в качественном анализе его динамики методами Пуанкаре и КАМ-теории [9–13].

В данной статье при исследовании устойчивости движения диска с неудерживающей связью предлагается способ, отличный от использованного ранее [5, 8]. Совсем не применяется негладкая замена переменных из [5], а замена переменных, аналогичная "редуцирующей" замене из [8], используется для приведения граничных условий при соударении к простейшей форме, когда импульс, отвечающий координате, на которую наложена неудерживающая связь, просто меняет знак при соударении диска с плоскостью. Затем делается замена переменных, которая в случае невозмущенного движения приводит гамильтониан к переменным действие–угол. Переменная действие при ударе не изменяется, и исследование орбитальной устойчивости сводится к анализу периодической по угловой переменной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы на промежутке времени, отвечающем свободному полету диска между его двумя последовательными соударениями с плоскостью.

1. Уравнения движения и их первые интегралы. Движение диска отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в произвольной точке O плоскости,



Фиг. 1

над которой движется диск, и вертикальной осью OZ (фиг. 1). Пусть $Gxyz$ – система координат, образованная главными центральными осями инерции диска, ось Gz перпендикулярна плоскости диска. Положение диска зададим координатами x, y, z его центра тяжести в системе координат $OXYZ$ и тремя углами Эйлера ψ, θ, φ, определяющими ориентацию трехгранника $Gxyz$ относительно кениговой системы координат $GXYZ$.

Ближайшая к плоскости OXY точка M диска во все время движения находится над этой плоскостью или лежит в ней. Поэтому имеет место неравенство $z \geqslant R\sin\theta$, где R – радиус диска. Если положить $\zeta = z - R\sin\theta$, то неудерживающая связь запишется в виде неравенства $\zeta \geqslant 0$.

В свободном полете, когда $\zeta > 0$, движению диска отвечает функция Лагранжа

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\zeta}^2) + mR\cos\theta\dot{\zeta}\dot{\theta} + \tfrac{1}{8}mR^2(1 + 4\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + \tag{1.1}$$

$$+\tfrac{1}{8}mR^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \tfrac{1}{4}mR^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 - mg(\zeta + R\sin\theta)$$

Здесь m – масса диска, g – ускорение свободного падения.

Условие абсолютно упругого соударения записывается в виде равенства $\dot{\zeta}^+ = -\dot{\zeta}^-$. Здесь и далее индексами минус и плюс отмечены значения соответствующих величин до и после удара.

При ударе остаются неизменными все обобщенные координаты $x, y, \zeta, \psi, \theta, \varphi$ и все обобщенные импульсы, кроме ипульса p_ζ, отвечающего обобщенной координате ζ [14]. Замечая еще, что функция Лагранжа не зависит от x, y, ψ, φ, приходим к интегралам

$$p_x = m\dot{x} = c_x = \text{const}, \quad p_y = m\dot{y} = c_y = \text{const} \tag{1.2}$$

$$p_\psi = \tfrac{1}{4}mR^2\sin^2\theta\dot{\psi} + \tfrac{1}{2}mR^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta = \tfrac{1}{4}mR^2\alpha(\alpha = \text{const}) \tag{1.3}$$

$$p_\varphi = \tfrac{1}{2}mR^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = \tfrac{1}{2}mR^2\beta \quad (\beta = \text{const})$$

справедливым во все время движения, включающее промежутки свободного полета диска и моменты его соударения с плоскостью.

Из (1.2) следует, что проекция центра тяжести диска на плоскость OXY движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности будем считать, что в (1.2) $c_x = c_y = 0$, т.е. центр тяжести диска движется по заданной вертикали. При этом, согласно (1.3), проекция кинетического момента диска относительно центра тяжести на вертикаль и на ось симметрии Gz постоянны.

В дальнейшем для описания свободного полета диска целесообразно использовать гамильтонову форму уравнений движения. Полагая $\theta = \pi/2 + q$ и вводя импульсы

$$p = \tfrac{1}{4}mR^2(1 + 4\sin^2 q)\dot{q} - mR\sin q\dot{\zeta} \tag{1.4}$$

$$p_\zeta = m\dot{\zeta} - mR\sin q\dot{q} \tag{1.5}$$

получаем функцию Гамильтона

$$H=\frac{2}{mR^2}p^2+\frac{4}{mR}\sin q p p_\zeta+\frac{1}{2m}(1+4\sin^2 q)p_\zeta^2+ \tag{1.6}$$

$$+\frac{mR^2}{8\cos^2 q}(\alpha+2\beta\sin q)^2+mg(\zeta+R\cos q)$$

Из равенства $\dot{\zeta}^+=-\dot{\zeta}^-$ и уравнения $\dot{\zeta}=\partial H/\partial p_\zeta$ следует, что до- и послеударное значения импульса p_ζ связаны соотношением

$$p_\zeta^+=-p_\zeta^- -\frac{8\sin q}{R(1+4\sin^2 q)}p \tag{1.7}$$

Величины q, p, ζ во время удара не изменяются.

2. Невозмущенное движение. Переменные действие–угол. Из уравнений с гамильтонианом (1.6) и граничных условий (1.7) следует, что существуют такие движения, когда плоскость диска вертикальна, а сам диск вращается с постоянной угловой скоростью вокруг горизонтальной или вертикальной оси.

В первом движении

$$q=0,\quad \dot{\psi}=0,\quad \dot{\varphi}=\omega_1(\theta=\pi/2,\ \alpha=0,\ \beta=\omega_1) \tag{2.1}$$

Во втором движении

$$q=0,\quad \dot{\psi}=\omega_2,\quad \dot{\varphi}=0\ (\theta=\pi/2,\ \alpha=\omega_2,\ \beta=0) \tag{2.2}$$

При этом движение центра тяжести диска происходит вдоль фиксированной вертикали и при $\zeta>0$ описывается уравнениями

$$d\zeta/dt=\partial\Gamma/\partial p_\zeta,\quad dp_\zeta/dt=-\partial\Gamma/\partial\zeta \tag{2.3}$$

$$\Gamma=\frac{1}{2m}p_\zeta^2+mg\zeta \tag{2.4}$$

а связь значений импульса p_ζ до и после удара диска о плоскость, получаемая из (1.7) при $q=0$, имеет вид

$$p_\zeta^+=-p_\zeta^- \tag{2.5}$$

В результате соударений диска с плоскостью его центр тяжести совершает периодическое движение с периодом $\tau=2(2h/g)^{1/2}$, где h – высота подскока наинизшей точки диска над плоскостью, величина τ равна промежутку времени между двумя последовательными соударениями. Периодическому движению центра тяжести в фазовой плоскости ζ, p_ζ отвечает траектория, показанная на фиг. 2. Эта траектория представляет собой параболу, задаваемую уравнением

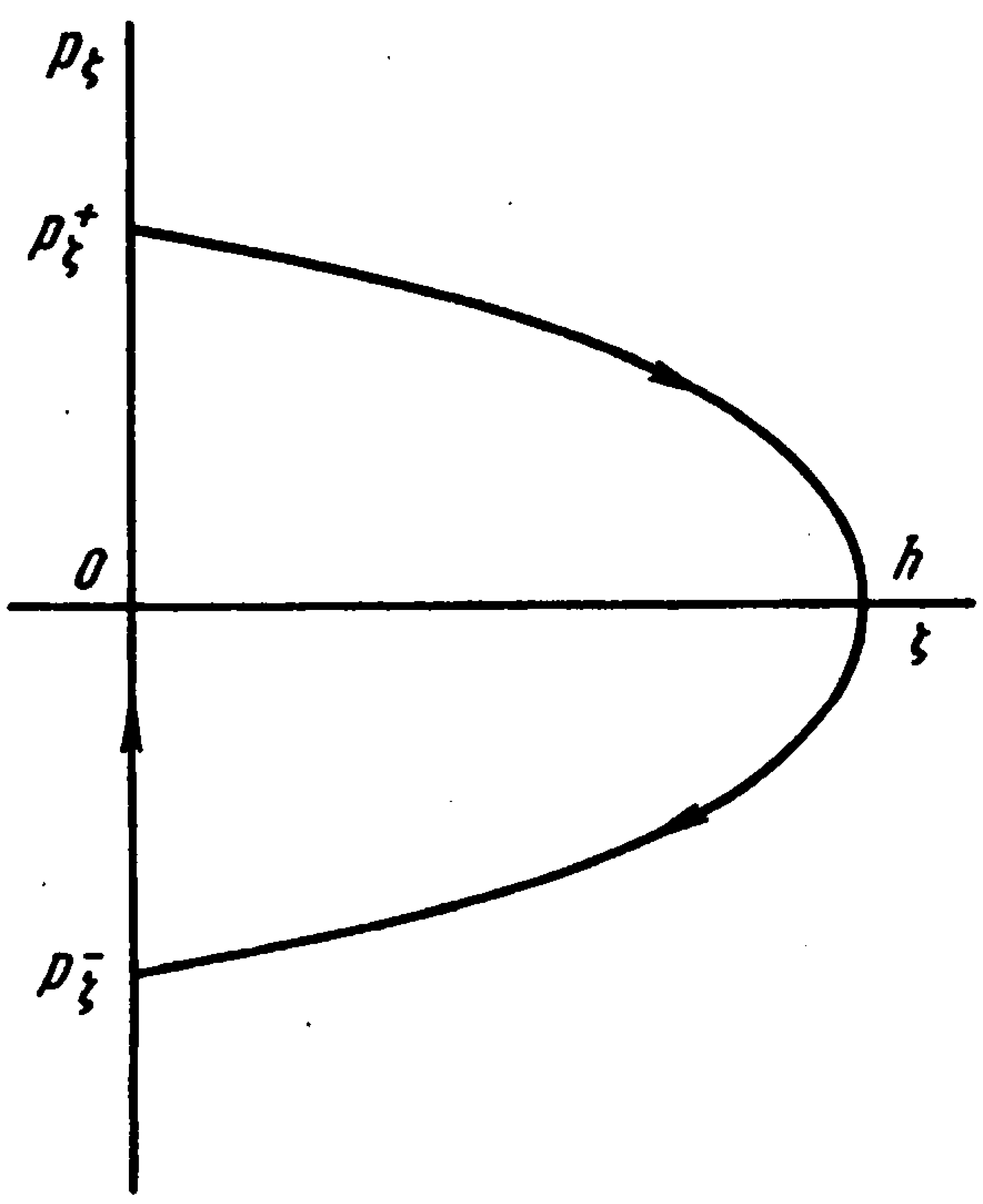
$$p_\zeta^2/(2m)+mg\zeta=mgh \tag{2.6}$$

Если принять, что соударение происходит на "промежутке" времени от $t=-0$ до $t=+0$, то при $t=-0$ имеем $\zeta=0$, $p_\zeta=p_\zeta^-=-m(2gh)^{1/2}$, а при $0\leqslant t<\tau$:

$$\zeta(t)=-gt^2/2+(2gh)^{1/2}t,\quad p_\zeta=m(2gh)^{1/2}-mgt \tag{2.7}$$

При ударе происходит скачкообразное изменение импульса от величины p_ζ^- до p_ζ^+. Этому изменению на фиг. 2 соответствует участок фазовой траектории, лежащий на оси $\zeta=0$.

Для дальнейшего полезно описать невозмущенное движение центра тяжести диска в переменных I, W, где I–действие, а W–соответствующая угловая переменная [15].



Фиг. 2

Имеем

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p_\zeta d\zeta$$

где криволинейный интеграл вычисляется вдоль траектории (2.6), откуда получаем выражение высоты подскока диска через переменную действие в невозмущенном движении

$$h = \left(\frac{9\pi^2}{8m^2 g}\right)^{1/3} I^{2/3} \tag{2.8}$$

Функция Гамильтона (2.4) в переменных действие–угол будет такой:

$$\Gamma = \Gamma(I) = (9m\pi^2 g^2/8)^{1/3} I^{2/3} \tag{2.9}$$

Для получения явного вида канонического преобразования $p_\zeta, \zeta \to I, W$ воспользуемся тем, что решение уравнений (2.3) известно. Оно задано равенствами (2.7). Надо только в них заменить h через I по формуле (2.8), а время выразить через угловую переменную, воспользовавшись тем, что $W = \omega(I)t$, а

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \pi\left(\frac{g}{2h}\right)^{1/2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial I} = \left(\frac{m\pi^2 g^2}{3I}\right)^{1/3}$$

Искомая унивалентная каноническая замена переменных 2π-периодична по W и при $0 \leqslant W < 2\pi$ задается равенствами

$$\zeta = \left(\frac{9}{8m^2\pi^4 g}\right)^{1/3} I^{2/3} W(2\pi - W), \quad p_\zeta = \left(\frac{3m^2 g}{\pi^2}\right)^{1/3} I^{1/3}(\pi - W) \tag{2.10}$$

Важно отметить, что переменная действие не изменяется при соударениях. Это видно из равенства (2.5) и формулы для p_ζ в замене (2.10). Впрочем, это непосредственно следует из геометрического смысла этой переменной: I есть поделенная на 2π площадь, ограниченная фазовой траекторией на фиг. 2, а она постоянна в невозмущенном движении.

3. Упрощение граничных условий. Исследуем орбитальную устойчивость описанных в разд. 2 поступательно-вращательных движений диска. Это означает, что будет рассматриваться устойчивость этих движений по отношению к переменным $q, \dot{q}$ и высоте h подскока диска над плоскостью. Постоянные α и β интегралов (1.3) считаем невозмущаемыми. Подробно рассмотрим случай, когда в невозмущенном движении диск вращается вокруг вертикали.

Предварительно сделаем каноническую замену переменных $\zeta, q, p_\zeta, p \to Q, \xi, P, \eta$ такую, чтобы координата ζ осталась без изменения ($\zeta = Q$), импульс η при ударе оставался бы постоянным, а граничные соотношения (1.7) приняли бы вид, аналогичный соотношениям (2.5) в невозмущенном движении:

$$P^+ = -P^- \tag{3.1}$$

Производящую функцию этой замены возьмем в виде

$$S = \zeta P + f(\zeta, q)\eta$$

где функция f пока неизвестна, она определится из условия (3.1).

В неявной форме искомое каноничское преобразование задается равенствами

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \zeta, \quad \xi = \frac{\partial S}{\partial \eta} = f(\zeta, q), \quad p_\zeta = \frac{\partial S}{\partial \zeta} = P + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\eta, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q}\eta \tag{3.2}$$

Так как $q^+ = q^-$, $\zeta^+ = \zeta^-$, $p^+ = p^-$, то последнее соотношение из (3.2) дает равенство $\eta^+ = \eta^-$. Условие (1.7) при учете равенств (3.2) записывается в виде соотношения

$$p^+ = -p^- - 2\eta\left[\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{4\sin q}{R(1+4\sin^2 q)}\frac{\partial f}{\partial q}\right]$$

которое по условию должно быть эквивалентно соотношению (3.1) при любом η. Отсюда следует, что в качестве функции $f(\zeta, q)$ можно взять функцию, удовлетворяющую линейному однородному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{4\sin q}{R(1+4\sin^2 q)}\frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

Общее решение этого уравнения есть произвольная дифференцируемая функция от первого интеграла соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения [16].

Считая, что при $\zeta = 0$ замена $\xi = f(\zeta, q)$ является тождественной (т.е. $f(0, q) = q$), получаем, что функция $\xi = f(\zeta, q)$ задается неявно равенством

$$\ln tg\frac{q}{2} - 4\cos q - \frac{4}{R}\zeta = \ln tg\frac{\xi}{2} - 4\cos\xi \tag{3.3}$$

При малых значениях q

$$f(\zeta, q) = \exp\left(-\frac{4\zeta}{R}\right)\left[q + \frac{25}{12}\left(1 - \exp\left(-\frac{8\zeta}{R}\right)\right)q^3\right] + O(q^5)$$

и замена переменных $\zeta, q, p_\zeta, p \to Q, \xi, P, \eta$ задается рядами

$$f(\zeta, q) = \exp\left(-\frac{4\zeta}{R}\right)\left[q + \frac{25}{12}\left(1 - \exp\left(\frac{8\zeta}{R}\right)\right)q^3\right] + O(q^5)$$

$$p = \exp\left(-\frac{4Q}{R}\right)\left[\eta + \frac{25}{4}\left(1 - \exp\left(-\frac{8Q}{R}\right)\right)\xi^2\eta\right] + \ldots \tag{3.4}$$

$$\zeta = Q, \quad p_\zeta = P - \frac{4}{R}\xi\eta + \frac{50}{3R}\xi^3\eta + \ldots$$

Многоточие здесь означает члены, степень которых относительно ξ, η не ниже пятой.

4. Функция Гамильтона возмущенного движения. В новых переменных функция Гамильтона (1.6) (при $\alpha = \omega_2$, $\beta = 0$) представляется рядом по степеням ξ, η, коэффициенты которого – функции от Q и P. Этот ряд не содержит линейных членов по ξ, η и при $\xi = \eta = 0$ совпадает с правой частью выражения (2.4), в котором $p_\zeta = P$, $\zeta = Q$.

Введем теперь вместо переменных P, Q канонически сопряженные переменные J, υ по формулам, аналогичным (2.10):

$$P = (3m^2\pi g)^{1/3} J^{1/3} f_1(\upsilon), \quad Q = \left(\frac{9\pi^2}{8m^2 g}\right)^{1/3} J^{1/3} f_2(\upsilon), \tag{4.1}$$

$$P=(3m^2\pi g)^{1/3}J^{1/3}f_1(\upsilon),\quad Q=\left(\frac{9\pi^2}{8m^2g}\right)^{1/3}J^{1/3}f_2(\upsilon),\tag{4.1}$$

где f_1, f_2 – 2π-периодические функции; при $0 \leqslant \upsilon < 2\pi$

$$f_1=1-\upsilon/\pi,\quad f_2=\upsilon/\pi(2-\upsilon/\pi)\tag{4.2}$$

В невозмущенном движении J, υ являются переменными действие-угол I, W, введенными в разд. 2.

Для исследования устойчивости в качестве возмущений примем безразмерные величины x_1, x_2 и r, вводимые посредством канонического преобразования (с валентностью $4/(mR^2\omega_2)$)

$$\xi=x_1,\quad \eta=\tfrac14 mR^2\omega_2x_2,\quad \upsilon=\upsilon,\quad J=I+\tfrac14 mR^2\omega_2 r\tag{4.3}$$

Устойчивость по отношению к переменным x_1, x_2, r означает орбитальную устойчивость исследуемого периодического движения диска. Существенно, что все три величины x_1, x_2, r не изменяются во время удара.

Если еще перейти к безразмерному времени ω_2t, то после довольно громоздких вычислений, опирающихся на формулы (1.6), (3.4), (4.1)–(4.3), получим функцию Гамильтона возмущенного движения в виде ряда по степеням величин x_1, x_2, r с 2π-периодическими по υ коэффициентами:

$$H=H_2+H_4+\ldots\tag{4.4}$$

где H_κ – форма степени κ относительно x_1, x_2, $|r|^{1/2}$. Формы нечетной степени в разложении (4.4) отсутствуют:

$$H_2=\frac{\pi}{a}r+\frac{1}{2f_3}(f_3^2f_4x_1^2+x_2^2)\tag{4.5}$$

$$H_4=c_{20}r^2+(h_{20}x_1^2+h_{02}x_2^2)r+h_{22}x_1^2x_2^2+h_{40}x_1^4\tag{4.6}$$

Здесь

$$f_3=\exp(a^2bf_2),\quad f_4=a^2b^2f_1^2-b+1,\quad c_{20}=-2\pi^2/(a^4b^2)\tag{4.7}$$

$$h_{20}=4\pi f_3(bf_1^2+f_2f_4)/(ab),\quad h_{02}=-4\pi f_2/(abf_3)$$

$$h_{22}=\tfrac14(17-25/f_3),\quad h_{40}=f_3[2(25-21f_3)+2a^2b^2f_1^2(25-27f_3)-b(50-51f_3)]/24$$

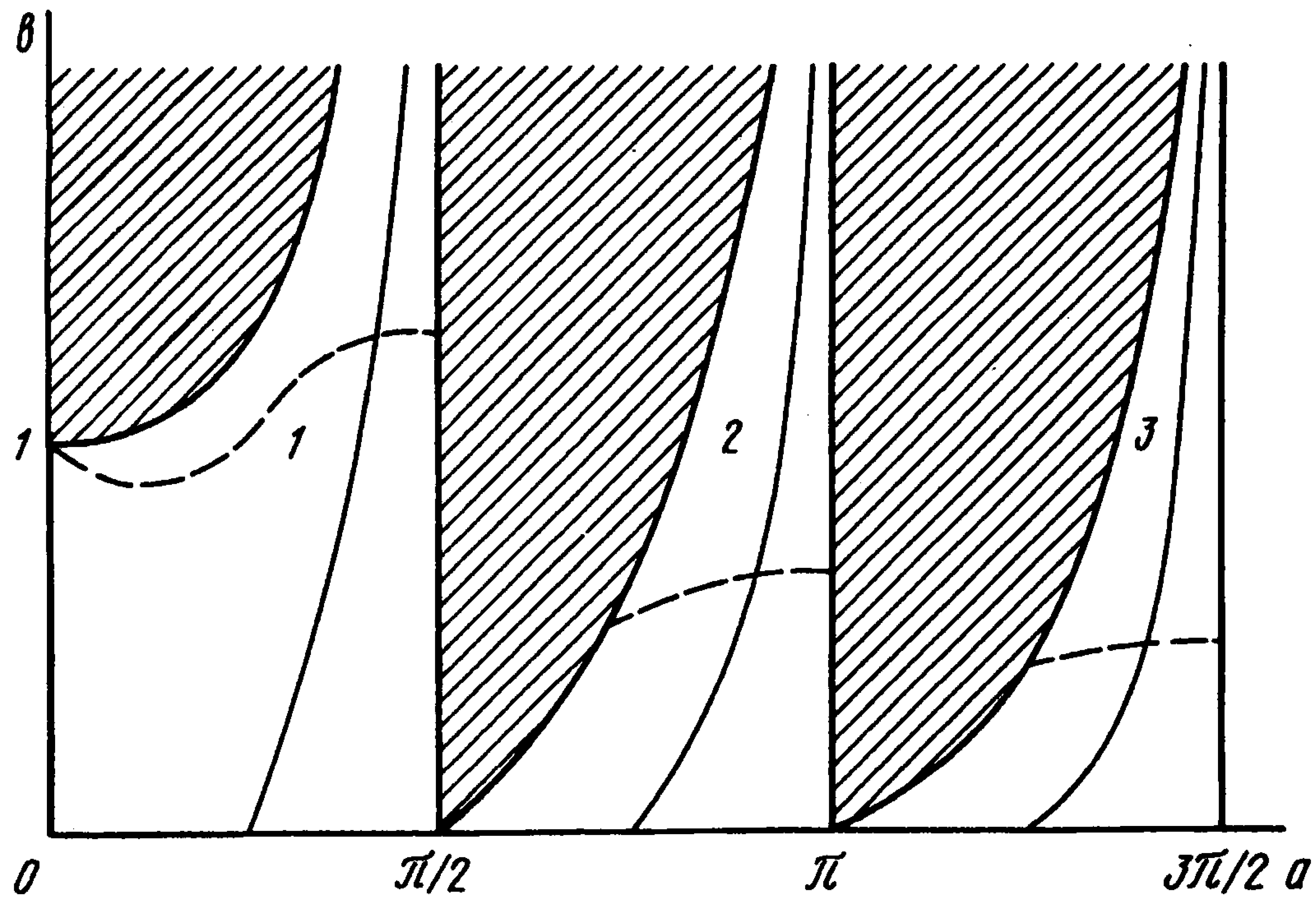
Безразмерные параметры a, b, от которых зависит гамильтониан (4.4), определяются равенствами

$$a=\omega_2(2h/g)^{1/2},\quad b=4g/(\omega_2^2R)\tag{4.8}$$

5. Устойчивость в первом приближении. Характеристические показатели. Первое приближение описывается уравнениями с гамильтонианом (4.5). Если в этих уравнениях в качестве независимой переменной принять угловую переменную υ, то уравнения для x_1, x_2 отделяются. Им соответствует 2π-периодический по υ гамильтониан вида

$$h_2=\frac{a}{2\pi f_3}(f_3^2f_4x_1^2+x_2^2)\tag{5.1}$$

Для исследования устойчивости в первом приближении надо вычислить фундаментальную матрицу решений $\mathbf{X}(\upsilon)$ этих уравнений. В общем случае линейной системы с периодическими коэффициентами такую матрицу в явной форме найти



Фиг. 3

с гамильтонианом (1.6), в линейном приближении по q и p выполняются соотношения

$$\ddot{q}+\omega_2^2 q=0, \quad p=\tfrac{1}{4}mR^2\dot{q}-m(2gh)^{1/2}Rf_1(\upsilon)q$$

Учитывая еще равенство $\upsilon=\pi\omega_2 t/a$ и формулы замен переменных (3.4), (4.3), получаем общее решение линейных уравнений с гамильтонианом (5.1) в виде

$$x_1=f_3^{-1/2}\left(c_1\sin\frac{a\upsilon}{\pi}+c_2\cos\frac{a\upsilon}{\pi}\right)$$

$$x_2=f_3^{1/2}\left[c_1\left(\cos\frac{a\upsilon}{\pi}-abf_1\sin\frac{a\upsilon}{\pi}\right)-c_2\left(\sin\frac{a\upsilon}{\pi}+abf_1\cos\frac{a\upsilon}{\pi}\right)\right]$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Элементы x_{ij} матрицы $\mathbf{X}(\upsilon)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{X}(0)=\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, будут такими:

$$x_{11}=f_3^{-1/2}\left(\cos\frac{a\upsilon}{\pi}+ab\sin\frac{a\upsilon}{\pi}\right),\quad x_{12}=f_3^{-1/2}\sin\frac{a\upsilon}{\pi} \tag{5.2}$$

$$x_{21}=f_3^{1/2}\left[ab(1-f_1)\cos\frac{a\upsilon}{\pi}-(1+a^2b^2f_1)\sin\frac{a\upsilon}{\pi}\right],\quad x_{22}=f_3^{1/2}\left(\cos\frac{a\upsilon}{\pi}-abf_1\sin\frac{a\upsilon}{\pi}\right)$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ может быть представлено в виде

$$\rho^2-2A\rho+1=0 \qquad A=\cos 2a+ab\sin 2a \tag{5.3}$$

Если $A>1$, то уравнение (5.3) имеет корень, модуль которого больше единицы. В этом случае рассматриваемое периодическое движение диска неустойчиво (независимо от линейных членов в уравнениях возмущенного движения). Если $|A|<1$, то оба корня имеют модули, равные единице, и имеет место устойчивость (в линейном приближении) [17].

После некоторых преобразований получаем, что условие $|A|<1$, эквивалентно совокупности двух систем неравенств

$$-\mathrm{ctg}\,a<ab<\mathrm{tg}\,a, \qquad \mathrm{tg}\,a<ab<-\mathrm{ctg}\,a \tag{5.4}$$

В плоскости параметров a, b имеется счетное множество областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении. Они показаны на фиг. 3. Области неустойчивости заштрихованы. Области устойчивости обозначены цифрами 1, 2, 3, ...; область с номером l ограничена снизу отрезком оси $b = 0$, на котором $\pi(l-1)/2 < a < \pi l/2$, правой ее границей служит прямая $a = \pi l/2$, а криволинейной границей является кривая $b = \mathrm{tg}a/a$ при нечетном l и кривая $b = -\mathrm{ctg}a/a$ при четном l, в самих областях соответственно $b < \mathrm{tg}a/a$ и $b < -\mathrm{ctg}a/a$.

В областях устойчивости в первом приближении корни уравнения (5.3) можно записать в виде $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\lambda)$, где $\pm i\lambda$ – характеристические показатели. Из (5.3) следует, что $\cos 2\pi\lambda = A$. Из этого равенства λ определяется неоднозначно. Неоднозначность устраняется, если воспользоваться непрерывностью величины λ по параметрам. В самом деле, если в функции Гамильтона (5.1) положить $b = 0$, то получим гамильтониан гармонического осциллятора с частотой $\lambda = a/\pi$. Поэтому в области с номером l

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\arccos A + \dfrac{1}{2}(l-1), & l \text{ нечетно} \\ -\dfrac{1}{2\pi}\arccos A + \dfrac{1}{2}l, & l \text{ четно} \end{cases} \tag{5.5}$$

6. Нелинейная задача об устойчивости. Рассмотрим теперь нелинейную задачу об орбитальной устойчивости периодического движения диска для значений параметров a, b, лежащих в областях его устойчивости в первом приближении. Для этого надо предварительно 2π-периодическим по υ линейным каноническим преобразованием x_1, $x_2 \to y_1, y_2$ привести функцию Гамильтона (5.1) к нормальной форме

$$h_2 = \frac{1}{2}\lambda(y_1^2 + y_2^2) \tag{6.1}$$

отвечающей гармоническим колебаниям с частотой λ, вычисляемой по формулам (5.5). Так как фундаментальная матрица решений $\mathbf{X}(\upsilon)$ найдена в явном виде, то согласно алгоритму из [18] преобразование $x_1, x_2 \to y_1, y_2$ также можно получить в явном виде

$$x_1 = n_{11}(\upsilon)y_1 + n_{12}(\upsilon)y_2, \quad x_2 = n_{21}(\upsilon)y_1 + n_{22}(\upsilon)y_2, \tag{6.2}$$

$$n_{11} = \kappa x_{12}\cos\lambda\upsilon - \kappa^{-1}x_{11}\sin\lambda\upsilon, \quad n_{12} = -\kappa x_{12}\sin\lambda\upsilon - \kappa^{-1}x_{11}\cos\lambda\upsilon, \tag{6.3}$$

$$n_{21} = \kappa x_{22}\cos\lambda\upsilon - \kappa^{-1}x_{21}\sin\lambda\upsilon, \quad n_{22} = -\kappa x_{22}\sin\lambda\upsilon - \kappa^{-1}x_{21}\cos\lambda\upsilon,$$

$$\kappa = (\sin 2\pi\lambda / \sin 2a)^{1/2}$$

Функция $x_{ij}(\upsilon)$ определены равенствами (5.2).

Каноническое преобразовавние (6.2) можно задать при помощи производящей функции S_1. Согласно теории канонических преобразований, функция Гамильтона (5.1), ее нормальная форма (6.1) и функция S_1 связаны тождеством

$$\frac{1}{2}\lambda(y_1^2 + y_2^2) = \frac{a}{2\pi f_3}\left[f_3^2 f_4(n_{11}y_1 + n_{12}y_2)^2 + (n_{21}y_1 + n_{22}y_2)^2\right] + \frac{\partial S_1}{\partial\upsilon} \tag{6.4}$$

Если теперь взять производящую функцию $S_2 = r_1\upsilon + S_1$, то равенства (6.2), дополненные формулами

$$\upsilon = \frac{\partial S_2}{\partial r_1} = \upsilon, \quad r = \frac{\partial S_2}{\partial\upsilon} = r_1 + \frac{\partial S_1}{\partial\upsilon} \tag{6.5}$$

(производная $\partial S_1/\partial\upsilon$ определена тождеством (6.4)), зададут каноническое унивалентное преобразование $\upsilon, r, x_1, x_2 \to \upsilon_1, r_1, y_1, y_2$ всех фазовых переменных, от которых зависит функция Гамильтона возмущенного движения (4.4).

Подставив в (4.4) получаемые из (6.2)–(6.5) выражения x_1, x_2, r через переменные ное преобразование $\upsilon, r, x_1, x_2 \to \upsilon_1, r_1, y_1, y_2$ всех фазовых переменных, от которых зависит функция Гамильтона возмущенного движения (4.4).

Подставив в (4.4) получаемые из (6.2)–(6.5) выражения x_1, x_2, r через переменные y_1, y_2, r_1, υ, найдем функцию Гамильтона возмущенного движения в виде

$$H = \frac{\pi}{a} r_1 + \frac{\pi\lambda}{2a}(y_1^2 + y_2^2) + c_{20} r_1^2 + K_2 r_1 + K_4 + \ldots \tag{6.6}$$

где K_m – форма степени m относительно y_1, y_2 с 2π-периодическими по υ коэффициентами:

$$K_m = \sum_{i+j=m} k_{ij} y_1^i y_2^j, \quad K_2 = 2c_{20}\frac{\partial S_1}{\partial \upsilon} + h_{20}x_1^2 + h_{02}x_2^2$$

$$K_4 = c_{20}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \upsilon}\right)^2 + (h_{20}x_1^2 + h_{02}x_2^2)\frac{\partial S_1}{\partial \upsilon} + h_{22}x_1^2x_2^2 + h_{40}x_1^4$$

причем $\partial S_1/\partial \upsilon, x_1, x_2$ определены равенствами (6.2)–(6.4). Многоточие в (6.6) означает члены ряда, степень которых относительно $y_1, y_2, |r_1|^{1/2}$ выше пятой.

Теперь надо нормализовать члены четвертой степени в (6.6). Нормальная форма будет различной в зависимости от того, есть в системе резонанс четвертого порядка ($4\lambda = n$ – целое число) или его нет. Из (5.3), (5.5) следует, что этот резонанс реализуется при значениях параметров a, b, удовлетворяющих равенству $ab = -\mathrm{ctg}\,2a$. Соответствующая резонансная кривая существует в каждой из счетного множества областей устойчивости в первом приближении. На фиг. 3 резонансные кривые изображены тонкими сплошными линиями.

Близкое к тождественному, 2π-периодическое по υ каноническое преобразование $r_1, \upsilon, y_1, y_2 \to \mu_1, \nu_1, z_1, z_2$, нормализующее члены четвертой степени в (6.6), может быть найдено при помощи классической теории возмущений или одним из методов типа метода Депри–Хори [18]. Вычисления показывают, что при отсутствии резонанса $4\lambda=n$ нормализованный до членов четвертой степени включительно гамильтониан (6.6) имеет такой вид

$$H = \frac{\pi}{a^{-1}}(\mu_1 + \lambda\mu_2) + c_{20}\mu_1^2 + c_{11}\mu_1\mu_2 + c_{02}\mu_2^2 + O\left((|\mu_1| + \mu_2)^3\right) \tag{6.7}$$

$$(z_1 = (2\mu_2)^{1/2}\sin\nu_2, \quad z_2 = (2\mu_2)^{1/2}\cos\nu_2)$$

$$c_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(k_{20} + k_{02})d\upsilon, \quad c_{02} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(3k_{40} + k_{22} + 3k_{04})d\upsilon$$

Величина c_{20} определена в (4.7).

При выполнении неравенства

$$\delta \equiv c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} \neq 0 \tag{6.8}$$

движение, в котором $\mu_1 = \mu_2 = 0$, устойчиво по Ляпунову по отношению к переменным μ_1, μ_2 [19, 20]. В данной задаче отсюда следует орбитальная устойчивость изучаемого периодического движения диска.

Если же параметры a, b лежат на резонансной кривой $4\lambda = n$, то в (6.7) к членам второй степени относительно μ_1, μ_2 добавляются слагаемые вида

$$\mu_2^2[d\sin(n\nu_1 - 4\nu_2) + e\cos(n\nu_1 - 4\nu_2)]$$

где

При выполнении неравенства

$$|\delta| < (d^2 + e^2)^{1/2} \tag{6.9}$$

имеет место [18] неустойчивость, при обратном знаке в неравенстве (6.9) периодическое движение диска орбитально устойчиво.

Асимптотический анализ, проведенный для малых значений параметра b, показал, что при $b \to 0$ справедливы оценки

$$\delta = -2(ab)^{-2} + O(b^{-1}), \quad (d^2 + e^2)^{1/2} = O(1)$$

откуда следует, что для достаточно малых в рассматриваемое периодическое движение диска орбитально устойчиво как при резонансе, так и в его отсутствие.

При произвольных значениях параметров a, b проверка неравенств (6.8), (6.9) проводилась на ЭВМ для первых трех (l = 1, 2, 3) областей устойчивости в первом приближении. Оказалось, что на резонансных кривых есть участки неустойчивости. Эти участки в первой, второй и третьей областях задаются неравенствами $1{,}18188 < b < 1{,}26758$; $0{,}61620 < b < 0{,}63659$ и $0{,}41574 < b < 0{,}42454$ соответственно. Для граничных точек этих интервалов решение вопроса об устойчивости требует учета членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана возмущенного движения в ряд. Аналогично обстоит дело и для нерезонансных значений параметров a, b, лежащих на кривых, где не выполняется неравенство (6.8). Эти кривые показаны на фиг. 3 штриховой линией, они пересекают резонансные кривые на указанных выше участках неустойчивости. При остальных значениях параметров a, b из первых трех областей устойчивости в первом приближении исследуемое периодическое движение диска орбитально устойчиво.

Замечание. Из (1.6) следует, что, если пренебречь несущественной постоянной, то гамильтониан возмущенного движения для рассмотренного движения (2.2)–(2.5) при замене ω_2 на $2\omega_1$ переходит в гамильтониан возмущенного движения для (2.1), (2.3)–(2.5). Поэтому все выводы об устойчивости, полученные для периодического движения диска, в котором он вращается вокруг вертикали, переносятся на случай движения, в котором вращение происходит вокруг горизонтальной оси, простым пересчетом параметров a и b, задаваемых равенствами (4.8)

Автор благодарит А.И. Журова за помощь при проведении численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16257).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А.П.* Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 363–369.
2. *Маркеев А.П., Холостова О.В.* Об устойчивости движения твердого тела при наличии соударений с вибрирующей горизонтальной плоскостью // Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем. М.: МАИ, 1985. С. 34–40.
3. *Кобринский А.А., Кобринский А.Е.* Двумерные виброударные системы. Динамика и устойчивость. М.: Наука, 1981. 335 с.
4. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
5. *Журавлев В.Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 781–788.
6. *Журавлев В.Ф., Привалов Е.А.* Исследование методом усреднения вынужденных колебаний гироскопа с ударным поглотителем // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 18–22.
7. *Журавлев В.Ф.* Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 24–28.
8. *Иванов А.П., Маркеев А.П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632–636.
9. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.
10. *Иванов А.П.* О периодических движениях тяжелого симметричного твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 30–35.

11. *Маркеев А.П.* О движении твердого тела с идеальной неудерживающей связью // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 707–716.
12. *Маркеев А.П.* О качественном анализе систем с идеальной неудерживающей связью // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 867–872.
13. *Маркеев А.А.* Об устойчивости перманентного вращения тела с неудерживающей связью // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1992. № 3. С. 48–54.
14. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
16. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
17. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
18. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
19. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
20. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.II.1993