УДК 513.36

© 1994 г. А.П. Иванов

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ КАСАТЕЛЬНОГО УДАРА

Рассматриваются семейства движений системы твердых тел, включающие соударения с произвольно малой (включая нулевую) начальной скоростью сближения. Формальное описание таких соударений при помощи аксиом стереомеханики приводит к динамическим парадоксам. Предлагается другое решение задачи о касательном ударе, основанное на вязкоупругой модели контактных напряжений.

1. Введение. Зададим обобщенные координаты $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ таким образом, чтобы величина q_0 равнялась расстоянию между элементами ударной пары. Тогда значения $q_1,\ldots, q_n$ произвольны, а первая координата связана односторонним ограничением $q_0 \geqslant 0$. В области $q_0 > 0$ движение описывается уравнениями

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{1.1}$$

Для описания ударов обычно используют формально-аксиоматическую стереомеханическую теорию удара [1], в которой пренебрегают его продолжительностью τ, а также ролью "активных" сил $\mathbf{Q}$ по сравнению с контактными напряжениями в формировании ударного импульса. Уравнения стереомеханики таковы:

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}^-, \quad \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{U}(\mathbf{q}^-, \dot{\mathbf{q}}^-) \tag{1.2}$$

где знаки минус и плюс соответствуют началу и концу соударения, $\mathbf{U}$ – некоторое отображение полупространства $\dot{q}_0 < 0$ в полупространство $\dot{q}_0 > 0$. В частности, для удара без трения при подходящем выборе обобщенных координат [2] отображение $\mathbf{U}$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{q}}_0^+ = -\kappa \dot{\mathbf{q}}_0^-, \quad \dot{\mathbf{q}}_j^+ = \dot{\mathbf{q}}_j^- \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

где $\kappa \in [0, 1]$ – ньютоновский коэффициент восстановления относительной скорости.

Противоречивость уравнений (1.2) проявляется при наличии движений с касаниями ограничителя. Пусть в некоторый момент $t = t^*$ выполнены условия

$$q_0 = 0, \quad \dot{q}_0 = 0, \quad F_0 > 0 \tag{1.4}$$

Неравенство в (1.4) обеспечивает ослабление односторонней связи: $q_0 > 0$ при $t \neq t^*$. В этом случае сколь угодно малые изменения начальных условий могут иметь двоякие последствия: либо тела вообще не соприкасаются вблизи момента $t = t^*$, либо они соударяются с произвольно малой начальной скоростью. Обсудим две ситуации.

1°. Для шероховатых тел, не обладающих сферической симметрией, возможно явление "тангенциального" удара: величина ударного импульса не исчезает при $\dot{q}_0(t^*) \to -0$ [3, 4]. При этом движение не обладает свойством непрерывной зависимости от начальных условий [5].

2°. Для тел с абсолютно гладкими поверхностями удар описываается уравнениями (1.3). Допустим, что система обладает T-периодическим движением $\mathbf{q}^*(t)$, включающим касательный удар (1.4). Этому движению отвечает неподвижная точка отображения фазового пространства в себя вдоль интегральных кривых между моментами $t = t^*$ и $t = t^* + T$. Данное отображение в окрестности неподвижной точки имеет неограниченную при $\tau \to 0$ производную [6]. Такая ситуация выходит за рамки линейной теории и носит название C-бифуркации [7]. При C-бифуркации мультипликаторы являются разрывными функциями параметров, и общий подход к ее исследованию пока не разработан (был изучен [7–9] ряд частных случаев).

Удовлетворительное решение данных задач на основе уравнений стереомеханики (1.2) не представляется возможным. Ниже предлагается более подходящая модель касательного удара, а также ее приложение к решению этих задач.

2. Исследование касательного удара частицы о вязкоупругую среду. Допустим, что контактные напряжения определяются свойствами среды Кельвина–Фойгта: неравенство $q_0 < 0$ возможно, оно сопровождается возникновением реакции R_0, линейной по q_0 и по $\dot{q}_0$ [1]. Уравнения движения в области $q_0 < 0$ имеют вид

$$\ddot{q}_0 = -M^2 q_0 - 2\alpha M \dot{q}_0 + F_0, \quad \ddot{q}_j = F_j \quad (j = 1,\ldots,n), \alpha \in (0,1) \tag{2.1}$$

где значение коэффициента M, характеризующего контактную жесткость, велико. Соударению соответствует часть траектории системы (2.1) при начальных условиях

$$q_0(t^*) = 0, \quad q_i(t^*) = q_i^0, \dot{q}_0(t^*) = -u < 0, \quad \dot{q}_i(t^*) = \dot{q}_i^0 \tag{2.2}$$

на участке $t \in (t^*, t^* + \tau)$, где τ – наименьший положительный корень уравнения $q_0(t^* + \tau) = 0$.

В общем виде аналитическое решение системы (2.1) невозможно, однако и приближенные решения позволяют сделать вывод о закономерностях удара. Был исследован случай, когда величина u фиксирована, и показано [10], что вне зависимости от вида функции $\mathbf{F}$ справедливы оценки

$$\tau = \pi\delta^{-1}M^{-1} + o(M^{-1}), \dot{q}_0(t^* + \tau) = \kappa u + O(M^{-1}) \tag{2.3}$$

$$\dot{q}_i(t^* + \tau) = \dot{q}_i^0 + O(M^{-1}) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

$$\delta = (1 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \kappa = \exp(-\pi\alpha / \delta)$$

Соотношения (2.3) в пределе при $M \to \infty$ переходят в уравнения стереомеханики (1.3), что оправдывает использование модели (2.1) для описания удара.

В окрестности касательного удара значения u могут быть сколь угодно малыми, что соответствует другому предельному случаю решения: $u \to 0$, величина M фиксирована. Заметим, что величина

$$C_0 = F_0(t^*, 0, q_i^0, 0, \dot{q}_i^0)$$

в соответствии с (1.4) положительна; выберем величину u настолько малой, что $Mu/C_0 = \chi \ll 1$. При учете начальных условий (2.2) решение первого из уравнений (2.1) представим по формуле Тейлора

$$q_0(t^* + \Delta t) = -u\Delta t + \tfrac{1}{2}(C_0 + O(\chi))(\Delta t)^2 + \vartheta(\Delta t)^2 \tag{2.4}$$

Приравнивая правую часть формулы (2.4) к нулю, найдем продолжительность удара τ, а затем и конечные значения переменных,

$$\tau = 2u / C_0 + o(u^2), \quad \dot{q}_0(t^* + \tau) = u + o(u) \tag{2.5}$$

$$p_i(t^* + \tau) = p_i^0 + O(u) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

Сравнивая две группы уравнений (2.3) и (2.5), отметим особенности ударов с малой начальной скоростью сближения: во-первых, продолжтельность таких ударов убывает вместе с u, во-вторых, коэффициент восстановления к близок к единице, в-третьих, в первой формуле (2.1) при $u \to 0$ главной частью является слагаемое C_0, несущественное в соотношениях (2.3).

Последнее свойство следует из анализа формулы (2.4): так как

$$q_0(t^* + \Delta t) \geqslant -\tfrac{1}{2}u^2 C_0^{-1} + o(u^2), \quad \dot{q}_0(t^* + \Delta t) \geqslant -u$$

то

$$-M^2 q_0 - 2\alpha M \dot{q}_0 \leqslant C_0(2\alpha\chi + \tfrac{1}{2}\chi^2 + o(\chi^2)), \quad F_0 = C_0 + O(\chi)$$

Замечания. 1°. Если зависимость реакции R_0 от $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ отличается от выражения (2.1), но $R_0 \to 0$ при q_0, $\dot{q}_0 \to 0$, то для достаточно малых значений u удар описывается теми же формулами (2.5), так как при их выводе явный вид функции R_0 не использовался.

2°. Соотношения (2.5) остаются справедливыми и для соударения тел с шероховатыми поверхностями. При этом уравнения (2.1) усложняются ввиду наличия касательной составляющей реакции [11]. Тем не менее по аналогии с предыдущим замечанием все оценки и основной вывод остаются в силе: для достаточно малых значений u движение определяется в основном не реакцией, а активными силами.

В данной модели первый из парадоксов, отмеченных во введении, разрешается: ударный импульс во всех случаях исчезает при $u \to +0$.

3. Анализ *C*-бифуркаций. Перейдем к решению второй из поставленных во введении задач. Вначале допустим, что $n = 0$, т.е. данная механическая система имеет одну степень свободы. Уравнения движения представим в форме (индекс опущен)

$$\ddot{q} = F + R, \; F = F(\mu, t, q, \dot{q}), \; R = \begin{cases} 0 & q > 0 \\ -M^2 q - 2\alpha M \dot{q}, & q < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

где μ – некоторый параметр. Для $\mu = 0$ система (3.1) обладает T-периодическим решением $q_0^*(t)$, включающим касательный удар (1.4), а также, возможно, некоторые другие удары, описываемые формулой (1.3). Решения системы (3.1) задают точечное отображение $\Phi_\mu : (q(t^*), \dot{q}(t^*)) \to (q(t^* + T), \dot{q}(t^* + T))$, причем $\Phi_0(0, 0) = (0, 0)$. Так как реакция R непрерывна в начале координат, то отображение Φ_0 дифференцируемо:

$$\Phi_0(q, \dot{q}) = X_0 \left\| \begin{matrix} q \\ \dot{q} \end{matrix} \right\| + O(q^2 + \dot{q}^2)$$

В данной формуле определяющая матрица X_0 равна значению при $t = t^* + T$ фундаментальной матрицы решений $X(t^*, t)$ уравнений в вариациях

$$\dot{X}(t^*, t) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ F_q' & F_{\dot{q}}' \end{matrix} \right\| X(t^*, t), \quad X(t^*, t^*) = E_2 \tag{3.2}$$

причем в те моменты t_k, когда периодическое движение $q_0^*(t)$ испытывает удары, матрица $X(t^*, t)$ меняется скачком по формуле [12]

$$X(t^*, t_k + 0) = \left\| \begin{matrix} -\kappa & 0 \\ b_{21} & -\kappa \end{matrix} \right\| X(t^*, t_k) \tag{3.3}$$

$$b_{21} = [F(\mu, t_k, 0, -\kappa \dot{q}_0^*(t_k)) + \kappa F(\mu, t_k, 0, \dot{q}_0^*(t_k))] / \dot{q}_0^*(t_k)$$

В соответствии с общей теорией точечных отображений [13], если единица не является собственным значением матрицы X_0, то для достаточно малых μ отображение Φ_μ имеем неподвижную точку, переходящую в начало при $\mu \to 0$. Координаты $(\xi(\mu), \eta(\mu))$ этой точки в первом приближении определяются из уравнения

$$(E_2 - X_0)\begin{Vmatrix} \xi(\mu) \\ \eta(\mu) \end{Vmatrix} = \left.\frac{\partial \Phi_\mu(0,0)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$$

В общем случае $d\xi(\mu)/d\mu \neq 0$, и величина $\xi(\mu)$ в окрестности нуля знакопеременна. Этим определяется суть C-бифуркации: для $\mu < 0$ движение $q^*_\mu(t)$ уходит от удара в окрестности момента t^*, а при $\mu > 0$ оно испытывает удары с начальной скоростью, исчезающе малой при $\mu \to +0$ (или наоборот).

Эволюция движения $q^*_\mu(t)$ в регулярной области $\mu < 0$ описывается обычной теорией, поскольку в формуле (3.3) знаменатель не равен нулю. В области $\mu < 0$ существования касательных ударов пользоваться этой формулой уже нельзя, так как $b_{21} \to \infty$ при $\dot{q}^* \to 0$. Вместо этого можно непосредственно проварьировать систему (3.1) в области $q < 0$. При этом уравнение (3.2) принимает вид

$$\dot{X}(t^*,t) = \left(\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -M^2 & -2\alpha M \end{Vmatrix} + O(1)\right) X(t^*,t)$$

где величина $O(1)$ ограничена при $M \to \infty$. При учете формулы (2.5) для матрицы монодромии при $\mu > 0$ получим

$$X_\mu = \left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -M_\chi^2 & 1 \end{Vmatrix} + O(\chi)\right) X_0, \quad \chi = M\left[-\frac{2\xi(\mu)}{C_0}\right]^{1/2} \ll 1 \tag{3.4}$$

Обозначим $\rho_{1,2}(\mu)$ собственные значения матрицы X_μ (мультипликаторы) и предположим, что $|\rho_{1,2}(0)| < 1$ (т.е. периодическое движение асимптотически устойчиво для $\mu \leqslant 0$). Для достаточно малых значений $\mu > 0$, таких что $\chi = O(M^{-1})$, определитель матрицы X_μ равен $\rho_1(0)\rho_2(0)$, а ее след равен $-\rho_1(0) - \rho_2(0) - M\chi x_{12}$, где $x_{ij}(i, j = 1, 2)$ – элементы матрицы X_0. С ростом величины χ один из мультипликаторов остается внутри единичного круга, а второй покидает его по действительной оси, обращаясь в плюс или минус единицу в зависимости от знака коэффициента x_{12}. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если $x_{12} < 0$, то C-бифуркация имеет тип "седло–узел": данное периодическое движение сливается с некоторым неустойчивым движением того же периода и оба аннигилируют. В случае $x_{12} > 0$ эта бифуркация сводится к последовательности (конечной или бесконечной) удвоений периода.

Замечание. 1°. Если хотя бы одна из бифуркаций удвоения периода – субкритическая, то она является последней в вышеупомянутой последовательности. Суперкритические бифуркации образуют бесконечную последовательность, приводящую к хаосу при $\mu = O(M^{-4})$. В обоих случаях устойчивые периодические или субпериодические движения не сохраняются.

2°. Случай $x_{12} = 0$ является особым: устойчивое периодическое движение $q^*_\mu(t)$ может сохраниться при C-бифуркации [12]. Кроме того, для значений x_{12}, близких к нулю, возможно взаимодействие C-бифуркации с другой бифуркацией типа "седло–узел" [14]. В результате рождается новое устойчивое периодическое движение, переходящее в данное при $x_{12} \to 0$.

В общем случае $n > 0$ по аналогии с формулой (3.4) матрица X_0 при малых значениях $\mu > 0$ умножается на матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -M\chi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

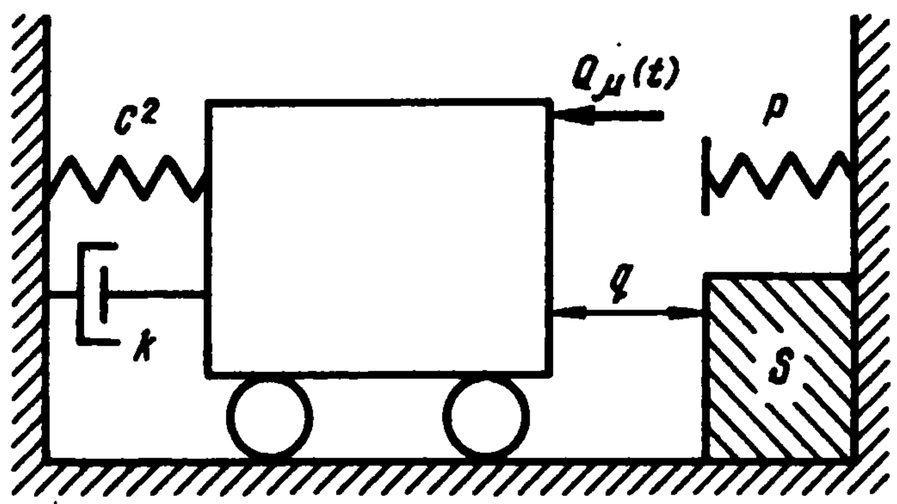
С ростом параметра μ от нуля мультипликаторы $\rho_j(\mu)$ ($j = 1, 2,\dots, 2n + 2$) изменяются непрерывно, и C-бифуркация распадается на более простые типы. Наряду с рассмотренными выше "седло-узлом" и "вилкой" здесь добавляется возможность бифуркации Хопфа, в результате которой рождаются семейства квазипериодических движений [15]. При дальнейшем росте параметра μ эти семейства в общем случае разрушаются и система приходит к хаосу.

4. Пример *C*-бифуркации. Рассмотрим вынужденные колебания линейного осциллятора с ограничителем (фиг. 1).

$$\ddot{q} + 2k\dot{q} + c^2 q = Q(\mu, t),\ q \geqslant 0, \quad k \geqslant 0 \tag{4.1}$$

$$Q(\mu, t) = c^2(1-\mu) + (1-c^2)\cos t + 2k\sin t$$

В данной задаче использование уравнений (3.1) означает, что барьер S заменяется пружиной P большой жесткости, закрепленной на правой стенке [16]. Для значений



Фиг. 1

$\mu < 0$ система обладает устойчивым безударным движением $q_\mu^*(t) = 1 - \mu - \cos t$ периода $T = 2\pi$, при $\mu = 0$ это движение включает касательные удары при $t = 0, \pm T, \pm 2T,\dots$

Общее решение системы (4.1) при $q > 0$ имеет вид

$$q(t) = q_\mu^*(t) + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{4.2}$$

где $\lambda_{1,2}$ – корни характеристического уравнения

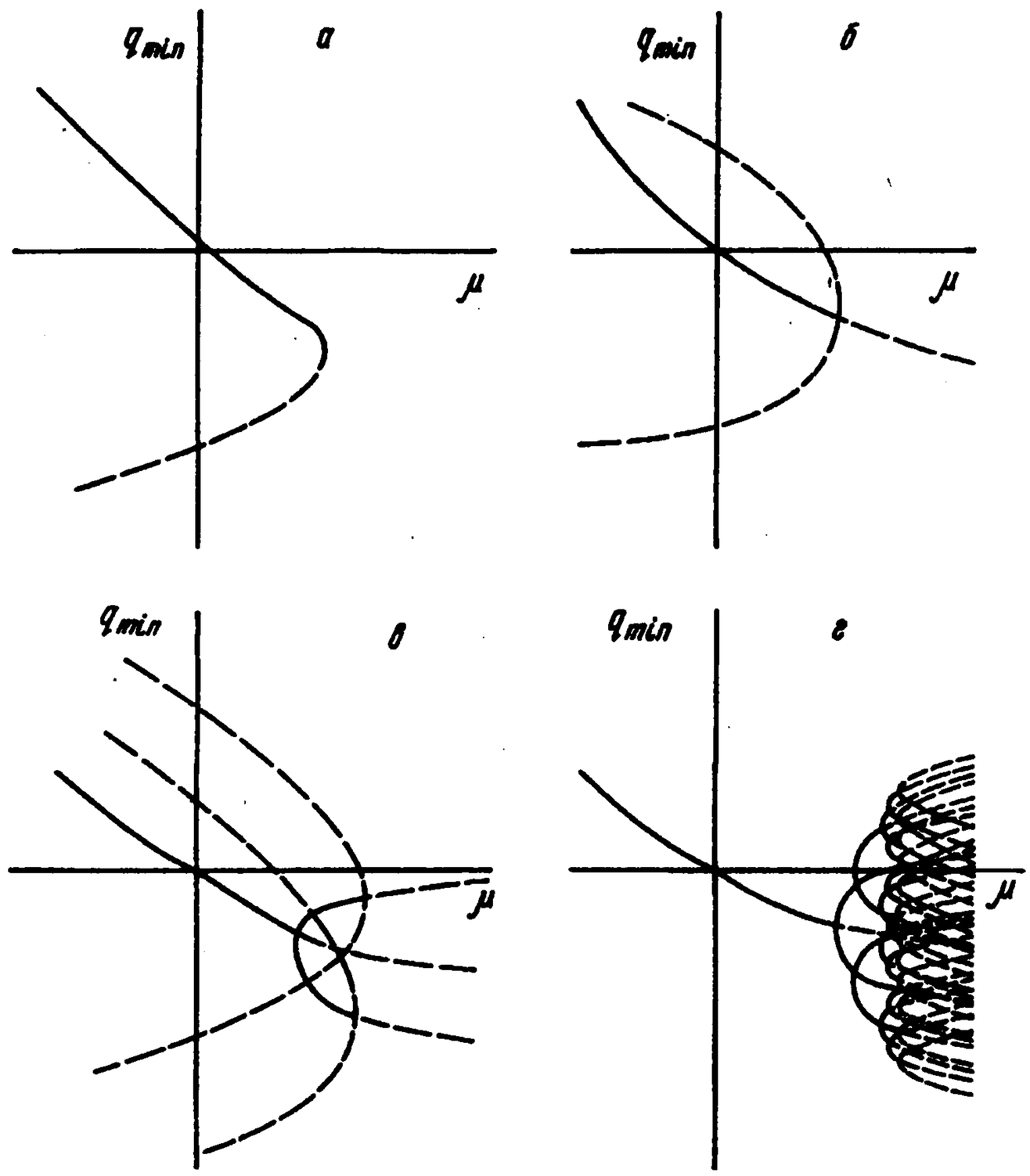
$$\lambda^2 + 2k\lambda + c^2 = 0$$

Матрица X_0 и ее собственные значения таковы:

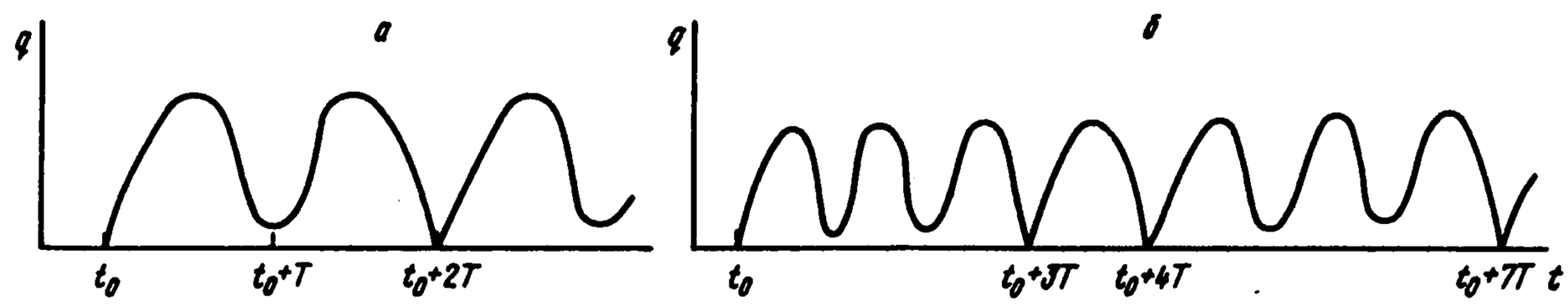
$$X_0 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{Vmatrix} \lambda_2\rho_1 - \lambda_1\rho_2 & \rho_2 - \rho_2 \\ o^2(\rho_1 - \rho_2) & \lambda_2\rho_2 - \lambda_1\rho_1 \end{Vmatrix}$$

$$\rho_{1,2} = \exp(\lambda_{1,2}T), \quad x_{1,2} = (\rho_2 - \rho_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Будем изображать периодические движения в плоскости (μ, $q_{\min}$), где $q_{\min}$ – минимальное значение координаты в окрестности моментов $t = 0, \pm T, \pm 2T,\dots$ Движению периода T соответствует одна точка на этой плоскости, периода $2T$ – пара точек с одинаковой абсциссой и т.д. Возможные сценарии C-бифуркации показаны на фиг. 2, где сплошные линии соответствуют устойчивым движениям, штриховые – неустой-



Фиг. 2



Фиг. 3

чивым: а) "седло-узел", б) субкритическая "вилка", в) суперкритическая плюс субкритическая "вилка", г) каскад удвоений периода. Теорема, доказанная выше, позволяет отличить первый из этих случаев, а тип удвоения периода можно определить опосредовано, из наличия периодических движений с ударами (1.3) при $\mu < 0$.

В случае *а* существуют *T*-периодические движения с одним ударом за период, т.е. выполнены условия

$$q(t_0) = q(t_0 + T) = 0, \quad \dot{q}(t_0) = -\kappa\dot{q}(t_0 + T) > 0 \tag{4.3}$$

Система (4.3) в силу (4.2) линейна относительно $C_{1,2}$. Исключая эти постоянные, получим

$$(1+\kappa)(\rho_2 - \rho_1)\dot{q}^*_\mu(t_0) + q^*_\mu(t_0)[\lambda_1(1-\rho_2)(1+\kappa\rho_1) - \lambda_2(1-\rho_1)(1+\kappa\rho_2)] = 0$$

$$\dot{q}(t_0) = q^*_\mu(t_0)(1-\rho_1)(1-\rho_2)\kappa(1+\kappa)^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho_2 - \rho_1)^{-1}$$

Если $\mu < 0$, то $q^*_\mu(t_0) > 0$, и знак величины $\dot{q}(t_0)$ противоположен знаку элемента x_{12}

матрицы X_0. Следовательно, случай *а* реализуется при условии $x_{12} < 0$, что соответствует утверждению теоремы.

В случае *б* при $\mu < 0$ существует $2T$-периодическое движение с одним ударом за период, его примерный график изображен на фиг. 3, *а*. По аналогии с уравнениями (4.3) составим систему

$$q(t_0) = q(t_0 + 2T) = 0, \quad q(t_0 + T) > 0, \quad \dot{q}(t_0) = -\kappa\dot{q}(t_0 + 2T) > 0$$

которая в результате преобразований приводится к виду

$$q_\mu^*(t_0)(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)\kappa(1+\kappa)^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho_2^2 - \rho_1^2)^{-1} > 0 \tag{4.4}$$

$$q_\mu^*(t_0)(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2 + \rho_1)^{-1} < 0$$

В случае *в* реализуется $4T$-периодическое движение с двумя ударами за период, схематично изображенное на фиг. 3, *б*. Условия его существования таковы

$$q(t_0) = q(t_1 + 3T) = 0, q'(t_1 + 3T) = q'(t_0 + 4T) = 0, \quad q(t_0 + T) > 0$$

$$q(t_0 + 2T) > 0, \dot{q}(t_0) = -\kappa\dot{q}'(t_0 + 4T) > 0, \dot{q}'(t_1 + 3T) = -\kappa\dot{q}(t_1 + 3T) > 0$$

$$q'(t) = q_\mu^*(t) + C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t}$$

откуда получаем

$$q_\mu^*(t_0)(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho_2^3 - \rho_1^3)^{-1} > 0, \quad q_\mu^*(t_0)[1-(1+\rho_1)(1+\rho_2)] < 0 \tag{4.5}$$

Аналогично можно установить условия, при выполнении которых *C*-бифуркация сводится к двум супер- и одной субкритической "вилке" и т.д.

Соотношения (4.3)–(4.5) допускают простую интерпретацию в терминах собственных значений. Если $\lambda_{1,2}$ действительны, то разности $(\lambda_1 - \lambda_2)$ и $(\rho_1 - \rho_2)$ имеют одинаковый знак, так что ни одна из этих групп условий не удовлетворяется. В этом случае *C*-бифуркация сводится к каскаду удвоений (фиг. 2, *г*), что подтверждается численным моделированием [17].

Если числа λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены, $\lambda_{1,2} = V \pm iW$, $V < 0$, $W > 0$, то $\rho_{1,2} = e^V(\cos W \pm i\sin W)$. Исследованные случаи отвечают следующим значениям: а) $\sin W < 0$, б) $\sin W > 0$, $\sin 2W < 0$, в) $\sin W > 0$, $\sin 2W > 0$, $\sin 3W < 0$.

В целом можно сделать вывод, что для значений $k > c$ осциллятор (4.1) в результате *C*-бифуркаций проходит через каскад удвоений периода. Если же $k < c$, то устойчивость теряется в результате бифуркации "седло-узел" или субкритического удвоения периода (которому может предшествовать несколько суперкритических).

Работа выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–17228).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coldsmith W.* Impact. The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids. London: Arnold, 1960, 379 p. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
2. *Иванов А.П., Маркеев А.П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632–636.
3. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. V. 1. London: McMillan, 1882. 385 p. М.: Наука, 1983. 463 с.
4. *Болотов Е.А.* Об ударе двух твердых тел при действии трения. // Изв. Моск. инж. училища. 1908. Ч. 2. Вып. 2. С. 43–55.
5. *Painlevé P.* Sur les lois du frottement de glissement // Acad. Sci., 1905. T. 141. P. 401–405. М.: Гостехиздат, 1954. С. 241–249.

6. *Nordmark A.B.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator // J. Sound and Vibrat., 1991. V. 145. No. 2. P. 279–297.
7. *Фейгин М.И.* Удвоение периода колебаний при *С*-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 861–869.
8. *Фейгин М.И.* О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 810–818.
9. *Фейгин М.И.* О поведении динамических систем вблизи границ области существования периодических движений // ПММ. 1977. № 41. Вып. 4. С. 628–636.
10. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
11. *Иванов А.П.* Конструктивная модель удара с трением // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 895–901.
12. *Иванов А.П.* Аналитические методы в теории виброударных систем // ПММ. 1933. Т. 57. Вып. 2. С. 5–21.
13. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. 2 // Изв. вузов, Радиофизика. 1958. Т. 1. № 2. С. 95–117.
14. *Ivanov A.P.* Stabilization of an impact oscillator near grazing incidence owing to resonance // J. Sound and Vibrat. 1993. V. 162. No. 3. P. 562–565.
15. *Marsden J.E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and its Applications. N.Y.: Springer, 1976. 408 p. М.: Мир, 1980. 368 с.
16. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound and Vibrat. 1983. V. 90. No. 1. P. 129–155.
17. *Nordmark A.B.* Effects due to low velocity impact in mechanical oscillator // Intern. J.Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2. No. 3. P. 597–605.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1993