УДК 531.39.6

© 1994 г. А.В. Киргетов

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ПРИВОДЯЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЯПУНОВА

Строится преобразование Ляпунова для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, периодически зависящих от времени, приводящее такую систему к системе с постоянными коэффициентами. Построение основано на процедуре последовательных замен переменных. Получены условия сходимости. В случае наличия сходимости оценена ее скорость. На основании полученных оценок решается вопрос об устойчивости по Ляпунову нулевого положения равновесия.

Задача о приводимости системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными T-периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами поставлена Ляпуновым. Им доказано, что всякая такая система приводима [1]. Для системы вида $\dot{x} = \varepsilon A(t)x$ было построено [2] приводящее преобразование в виде формального ряда по степеням ε и доказано [2], что он сходится, если $\varepsilon T\ \max_i \sup_{t\in[0,T]}|\lambda_i(t)| < \ln 2$, где $\lambda_i(t)$ – собственные значения матрицы $A(t)$. В дальнейшем рассматривались [3–5] различные аспекты построения приводящего преобразования в виде формальных рядов.

Использовалась [6] процедура последовательных замен переменных для отыскания приводящего преобразования Ляпунова. Для системы вида $\dot{x} = (A + B(t))x$, где A – постоянная матрица, а $B(t)$ – квазипериодическая, было показано, что сходимость имеет место, если все собственные значения матрицы A действительны и сильно различны, а норма матрицы $B(t)$ достаточно мала и удовлетворяет бесконечной цепочке неравенств. Однако в случае чисто периодической системы можно получить более простые и наглядные оценки, при которых процедура последовательных замен сходится.

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A_0(t)x \tag{1.1}$$

$$(x = (x^1,\dots,x^n),\ \ A_0 = \overline{A}_0 + \tilde{A}_0,\ \ \overline{A}_0 = T^{-1}\int_0^T A_0(t)dt,\ \ \tilde{A}_0 = A_0 - \overline{A}_0)$$

где $A_0(t)$ – непрерывная, T-периодическая $(n \times n)$-матрица. Пространство непрерывных, T-периодических $(n \times n)$-матриц обозначим через C. Определим в нем норму по формуле

$$\|A\|_C = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \sup_{[0,T]} |a_{ij}(t)|$$

где a_{ij} – элементы матрицы A. Пространство C с введенной нормой полное [7]. Индекс C у нормы в дальнейшем будем опускать.

Применим к (1.1) процедуру последовательных замен переменных, для k-го шага определяемую выражением

$$x_{(k-1)} = (E + Z_k)x_{(k)},\ \ k = 1,2,\dots,\ \ x_{(0)} \equiv x \tag{1.2}$$

где $x_{(k-1)}, x_{(k)}$ – старые и новые переменные соответственно, E – единичная матрица,

$Z_k(t)$ – T-периодическое, непрерывно-дифференцируемое решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{Z} = \overline{A}_{k-1}Z - Z\overline{A}_{k-1} + \tilde{A}_{k-1}, \tag{1.3}$$

удовлетворяющее условию $\overline{Z}_k = 0$. Подобное решение определено, если [4, 5] для собственных значений матрицы $\overline{A}_{k-1}$ выполнены сотношения

$$\lambda_i - \lambda_j \neq 2\pi T^{-1}\sqrt{-1}m,\ \ i, j = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

для всякого не равного нулю целого m.

Для невырожденности замены (1.2) на k-м шаге достаточно [8], чтобы

$$\|Z_k\| < 1 \tag{1.5}$$

Преобразованная система после k шагов имеет вид

$$\dot{x}_{(k)} = A_k x_{(k)},\quad A_k = \overline{A}_{k-1} + (E + Z_k)^{-1}\tilde{A}_{k-1}Z_k \tag{1.6}$$

Если последовательные замены определены и невырождены для первых m шагов, то, очевидно, матрицы A_k непрерывны и T-периодичны для $k \leq m$, т.е. системы (1.6) того же класса, что и (1.1). Получим условия существования невырожденных замен на каждом шаге и условия сходимости рассмотренной процедуры. Промежуточные результаты сформулируем в виде нескольких лемм.

Лемма 1. Пусть матрицы $A, B \in C$. Тогда

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,\ \ \|\overline{A}\| \leq \|A\|,\ \ \|\tilde{A}\| \leq 2\|A\| \tag{1.7}$$

Если дополнительно $dB/dt \in C$, то

$$\|B - \overline{B}\| \leq \tfrac{1}{2}T\|dB/dt\| \tag{1.8}$$

Неравенства (1.7) следуют из свойств матричных норм [8], оценка аналогичная (1.8) доказана в [9].

Для сокращения дальнейших выкладок введем обозначения

$$\nu_k = \|\overline{A}_k\|,\ \ \mu_k = \|\tilde{A}_k\|$$

$$\sigma_k = \frac{T\mu_k/2}{1 - T\nu_k},\ \ \delta_k = \frac{2\sigma_k}{1 - \sigma_k - 2\sigma_k^2},\ \ k = 0, 1, \ldots \tag{1.9}$$

Лемма 2. Если

$$T\nu_0 < 1,\ \ \sigma_0 < (\sqrt{17} - 3)/4 \tag{1.10}$$

то замена переменных (1.2) определена и невырождена на первом шаге, причем

$$T\nu_1 < 1,\ \ \mu_1 < \mu_0\delta_0,\ \ \sigma_1 < \sigma_0\delta_0,\ \ \delta_1 < \delta_0^2,\ \ 0 < \delta_0 < 1 \tag{1.11}$$

Доказательство. Для собственных значений λ_j матрицы A_0 по свойствам матричных норм [8] имеем оценку $\max_{j=1,\ldots,n}|\lambda_j| < \|\overline{A}_0\|$, и в силу первого из условий (1.10) $|\lambda_j| < 1/T$, ($j = 1, \ldots, n$). Отсюда заключаем, что неравенства (1.4) справедливы, искомое решение Z_1 уравнения (1.3) может быть найдено, замена переменных (1.2) определена. Далее, воспользовавшись неравенством (1.8), для решения Z_1 уравнения (1.3) получаем оценку $\|Z_1\| \leq T\|\dot{Z}_1\|/2 \leq T(2\nu_0\|Z_1\| + \mu_0)/2$, или

$$\|Z_1\| \leq \sigma_0 \tag{1.12}$$

Отсюда и из второго условия (1.10) заключаем, что $\|Z_1\| < 1$, и следовательно, в силу (1.5) замена переменных (1.2) на первом шаге невырождена.

Для того чтобы $0 < \delta_0 < 1$ необходимо и достаточно выполнение второго из условий (1.10).

Далее, используя явный вид матрицы A_1(1.6) и оценки (1.7), получим

$$\nu_1 \leq \nu_0 + \mu_0\sigma_0 / (1-\sigma_0), \quad \mu_1 \leq 2\mu_0\sigma_0 / (1-\sigma_0), \quad \sigma_1 \leq \sigma_0\delta_0 \tag{1.13}$$

откуда справедливость оценок (1.11) получается прямой выкладкой с использованием определений (1.9) и условия $1-\sigma_0-2\sigma_0^2 > 0$.

Лемма 3. При выполнении условий леммы 2 последовательные замены переменных (1.2) определены и невырождены на каждом шаге, т.е. осуществима их бесконечная цепочка, а также для всякого $k = 1, 2,\ldots$ справедливы оценки

$$T\left\|\bar{A}_k\right\| < 1, \quad \left\|\tilde{A}_k\right\| = \mu_k \leq \mu_0\delta_0^{2^k-1}, \quad \left\|Z_{k+1}\right\| \leq \sigma_k \leq \sigma_0\delta_0^{2^k-1}, \quad \delta_k \leq \delta_0^{2^k} \tag{1.14}$$

Доказательство получается методом полной математической индукции с использованием леммы 2 и неравенства (1.12).

Лемма 4. Пусть последовательные T-периодичные замены (1.2) (конкретный вид матриц Z_k в данном случае не важен) определены, невырождены, непрерывно-дифференцируемы для каждого шага $k = 1,2,\ldots$ и найдутся постоянные $M_1, M_2 > 0$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|Z_k\right\| \leq M_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\dot{Z}_k\right\| \leq M_2 \tag{1.15}$$

Тогда процедура последовательных замен переменных сходится, т.е. найдется матрица $Q_\infty \in C$, такая, что

$$Q_\infty = \lim_{k\to+\infty} Q_k, \quad Q_k = (E+Z_1)\ldots(E+Z_k) \tag{1.16}$$

При этом замена переменных $x = Q_\infty y$ переводит систему (1.1) в систему $\dot{y} = A_\infty y$, где

$$A_\infty = \lim_{k\to+\infty} A_k, \quad A_k = Q_k^{-1}(A_0Q_k - \dot{Q}_k) \tag{1.17}$$

A_k – матрица, определяющая преобразованную систему после k итераций.

Доказательство. Из цепочки оценок

$$\left\|E+Z_k\right\| \leq 1+\left\|Z_k\right\|, \quad \ln\left\|Q_k\right\| \leq \ln\prod_{j=1}^{k}\left(1+\left\|Z_j\right\|\right) \leq \sum_{j=1}^{k}\left\|Z_j\right\| \leq M_1$$

получаем, что для произвольных m и k

$$\left\|Q_{m+k}-Q_k\right\| \leq \left\|Q_k\right\|\ln\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left\|Z_{k+j}\right\|\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\left\|Z_{k+j}\right\|\exp M_1$$

Отсюда в силу сходимости первого ряда (1.15) заключаем, что последовательность матриц Q_k фундаментальна и, поскольку пространство C полное, она сходится к некоей матрице $Q_\infty \in C$. Сходимость последовательности матриц $\dot{Q}_k$ доказывается аналогично. Далее, из равномерной сходимости элементов матриц $Q_k, \dot{Q}_k$ по теореме о дифференцируемости равномерно сходящейся последовательности функций получаем, что Q_∞ – непрерывно-дифференцируемая матрица и $\dot{Q}_\infty = \lim_{k\to+\infty}\dot{Q}_k$. Таким образом, предельное преобразование определено. Его невырожденность следует из невырожденности замен переменных на каждом шаге и сходимости первого ряда (1.15), из которой следует $\|Z_k\| \to 0$, $\det(E+Z_k) \to 1$ при $k \to +\infty$.

Итак, матрица Q_∞ определяет некоторую невырожденную замену переменных, и с использованием выражения для A_k в (1.17) заключаем, что $A_k \to A_\infty = Q_\infty^{-1}(A_0Q_\infty - \dot{Q}_\infty)$, $k \to +\infty$.

Заметим теперь, что для последовательных замен, определяемых выражениями (1.2), (1.3), при выполнении условий леммы 3 условия леммы 4 также выполнены, так как из оценок (1.14) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Z_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k \le \sigma_0\sum_{k=1}^{\infty}\delta_0^{2^k-1} < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\dot Z_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(2\|Z_k\|\nu_k + \mu_k\right) \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k / T < \infty$$

(при выводе второй цепочки неравенств необходимо воспользоваться уравнением (1.3) для матрицы Z_k и определениями (1.9)). Следовательно, построенная процедура последовательных замен переменных при выполнении условий леммы 3 сходится. Далее, из оценок (1.14) следует, что $\|A_\infty - \bar A_\infty\| = \lim_{k\to+\infty}\|A_k - \bar A_k\| = 0$, т.е. предельная матрица A_∞ постоянна. Таким образом, предельное преобразование является приводящим преобразованием Ляпунова.

Окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть для непрерывной T-периодической матрицы A_0, задающей систему (1.1), выполнены условия

$$T\|\bar A_0\| < 1,\quad T\|\tilde A_0\| / \left(1 - T\|\bar A_0\|\right) < \left(\sqrt{17} - 3\right)/2 \tag{1.18}$$

Тогда

1°. Последовательные замены переменных (1.2), (1.3) определены, невырождены и T-периодичны на каждом шаге $k = 1,2,\ldots$

2°. Процедура последовательных замен сходится, и предельное преобразование $x = Q_\infty y$ (матрица Q_∞ определена соотношением (1.16)) является приводящим преобразованием Ляпунова, т.е. матрица $A_\infty = Q_\infty^{-1}(A_0 Q_\infty - \dot Q_\infty)$ постоянна.

Предложенная процедура является конструктивным способом приближенного построения *приводящего* преобразования Ляпунова. Используя полученные в лемме 3 оценки (1.14), не составляет труда оценить скорость сходимости последовательных преобразований и последовательностей матриц $A_k, \bar A_k$:

$$\begin{aligned}
&\|Q_\infty - Q_k\| \le (1+\sigma_0)^{D(\delta_0)}\sigma_0\delta_0^{2^k-1}D\left(\delta_0^{2^k}\right)\\
&\|A_\infty - A_k\| \le \mu_0\delta_0^{2^k-1}\left[D\left(\delta_0^{2^k}\right) + \tfrac{1}{2}\delta_0^{2^k}D\left(\delta_0^{2^{k+1}}\right)\right]\\
&\|A_\infty - \bar A_k\| \le \tfrac{1}{2}\mu_0\delta_0^{2^{k+1}-1}D\left(\delta_0^{2^{k+1}}\right),\quad k = 0,1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\left(D(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2^m-1}\right)$$

2. Сформулированные в теореме 1 условия сходимости последовательных замен в ряде случаев могут быть улучшены. В частности, этого можно добиться, сузив класс рассматриваемых матриц и несколько ухудшив норму.

Обозначим через M пространство T-периодических матриц, элементы которых представимы в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье. Введем в M норму по формуле

$$\|A\|_M = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\max_{i=1,\ldots,n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^m(t)\right|$$

где a_{ij}^m – коэффициенты Фурье разложения в ряд элемента a_{ij} матрицы A. Видно, что $M \subset C$ и $\|A\|_M \ge \|A\|_C$ для всякой матрицы $A \in M$, т.е. норма $\|\cdot\|_M$, вообще говоря, хуже, чем $\|\cdot\|_C$. Однако это позволяет улучшить условия сходимости последовательных замен (1.18), которые в этом случае принимают простой вид

$$T\|A_0\|_M < \pi \tag{2.1}$$

В остальном формулировка теоремы 1 остается без изменений.

Доказательство этого факта проводится совершенно аналогично тому, как это проделано выше для случая пространства C и опирается на некоторые изменения оценок в леммах 1, 2 (индекс M у норм опускаем):

$$\begin{aligned}
&(1.7)\colon\ \|A\| = \|\overline{A}\| + \|\tilde{A}\| \\
&(1.8)\colon\ \|B - \overline{B}\| \leqslant \frac{T}{2\pi}\left\|\frac{dB}{dt}\right\| \\
&(1.9)\colon\ \sigma_k = \frac{T\mu_k / 2}{\pi - T\nu_k},\quad \delta_k = \frac{\sigma_k}{1-\sigma_k} \\
&(1.10)\colon\ T\nu_1 < \pi,\quad \sigma_0 < 1/2 \\
&(1.13)\colon\ \nu_1 + \mu_1 \leqslant \nu_0 + \mu_0\sigma_0 / (1-\sigma_0) \\
&\mu_1 \leqslant \mu_0\sigma_0 / (1-\sigma_0),\quad \sigma_1 \leqslant \sigma_0\delta_0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь слева указан номер формулы, справа необходимое изменение.

Отметим, что условие сходимости (2.1) улучшает достаточное условие сходимости [5], которое для системы вида $\dot{x} = (A_0 + \varepsilon B_0(t))x$, где A_0 = const, определяется неравенством $\varepsilon T\|B_0\|/(\pi - T\|A_0\|) < 2(3-2\sqrt{2})$.

Претерпевают также некоторые изменения и оценки скорости сходимости последовательностей преобразованных матриц, а именно во втором и третьем из неравенств (1.19) коэффициент $\frac{1}{2}$ заменяется на единицу.

3. На основании теоремы 1 и оценок скорости сходимости можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ системы (1.1). Действительно, при наличии сходимости последняя оценка (1.19) или аналогичная ей из разд. 2 определяет гарантированную окрестность матрицы $\overline{A}_k$, в которой лежит матрица A_∞. Если матрица $\overline{A}_k$ такова, что все постоянные матрицы в данной окрестности имеют собственные значения только с отрицательными вещественными частями (существует собственное значение с положительной вещественной частью), то это, в частности, справедливо и для матрицы A_∞. Следовательно, равновесие $y = 0$ приведенной системы $\dot{y} = A_\infty y$ равномерно асимптотически устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову. Далее, поскольку приведенная система получается из исходной с помощью линейного непрерывного T-периодического преобразования, то сделанное заключение справедливо и для равновесия $x = 0$ системы (1.1).

4. *Пример. Устойчивость верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса при наличии сил вязкого трения.* Уравнение движения маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные синусоидальные колебания с амплитудой b и частотой ω, при наличии силы вязкого трения имеет вид

$$\ddot{\phi} + \nu\dot{\phi} + (g - b\omega^2 \sin\omega t)l^{-1}\sin\phi = 0 \tag{4.1}$$

Здесь ϕ – отклонение маятника от вертикали, ν – коэффициент вязкого трения, g – ускорение свободного падения, l – длина маятника.

Получим условия, при которых верхнее положение равновесия маятника равномерно асимптотически устойчиво в линейном приближении и, следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению оно равномерно асимптотически устойчиво и для полной системы.

Обозначим

$$\tau = t\sqrt{g/l},\ \ \Omega = \omega\sqrt{g/l},\ \ \kappa = b\omega/\sqrt{gl},\ \ f = \nu\sqrt{g/l}$$

и линеаризуем уравнение движения (4.1) в окрестности положения равновесия $\phi = \pi$. Получим (штрих означает дифференцирование по τ)

$$\phi'' + f\phi' - (1 - \kappa\Omega\sin\Omega\tau)\phi = 0$$

Перейдем от уравнения второго порядка к системе двух линейных уравнений относительно переменных ϕ, ϕ' и сделаем в ней замену

$$\left\|\begin{matrix}\phi\\ \phi'\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1 & 0\\ \chi & 0\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\right\| \quad (\chi = \kappa\cos\Omega\tau)$$

В результате получим систему вида (1.1)

$$\left\|\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\right\|' = A_0\left\|\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\right\|,\ \ A_0 = \left\|\begin{matrix}\chi & 1\\ \chi^2 - \chi f & -\chi - f\end{matrix}\right\|$$

где матрица A_0 принадлежит пространству M.

Условие сходимости процедуры последовательных замен (2.1) для рассматриваемого случая примет вид

$$\max(1, |\kappa^2/2 - 1| + f) + \kappa(1 + \kappa/2 + f) < \Omega/2 \tag{4.2}$$

Получим теперь условия асимптотической устойчивости равновесия. Пусть матрица $A_\infty = \bar{A}_0 + a$, где a – некоторая постоянная матрица. Тогда третья из оценок (1.19) без коэффициента $^1/_2$, поскольку $A_0 \in M$, оценка (2.3) при $k = 0$ запишется в виде

$$\|a\| < \mu_0\delta_0 D(\delta_0^2) = \varepsilon$$

причем δ_0 и $D(x)$ определяются выражением (2.2) и соотношением в скобках в (1.19) соответственно, а параметры

$$\nu_0 = \max(1, |\kappa^2/2 - 1| + f),\ \ \mu_0 = \kappa(1 + \kappa/2 + f) \tag{4.3}$$

Условие того, что матрица A_∞ имеет все собственные значения с отрицательными вещественными частями получим из критерия Рауса–Гурвица:

$$-f + a_{11} + a_{22} < 0,\ \ a_{11}(-f + a_{22}) - (1 + a_{12})(1 - \kappa^2/2 + a_{21}) > 0$$

где a_{ij} – элементы матрицы a. Эти неравенства заведомо выполнены, если при $\varepsilon < 1$

$$-f + 2\varepsilon < 0,\ \ -1 + (1 - \varepsilon)\kappa^2/2 - f\varepsilon > 0,\ \ 0 < \varepsilon < 1 \tag{4.4}$$

Таким образом, при выполнении неравенств (4.2), (4.4) равновесие $\phi = \pi$ маятника равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Видно, что полученные условия при постоянных κ, f и $\Omega \to \infty$ ($\varepsilon \to 0$), т.е. в нулевом приближении по параметру $1/\Omega$, переходят в известное [10] условие $b\omega/\sqrt{gl} > \sqrt{2}$.

В линейном приближении по параметру $1/\Omega$ они запишутся в виде

$$\nu_0 + \mu_0 < \Omega/2,\ \ f - 2\mu_0^2/\Omega > 0$$

$$-1 + (1 - \mu_0^2/\Omega)\kappa^2/2 - f\mu_0^2/\Omega > 0$$

причем ν_0, μ_0 определяются формулами (4.3).

Автор благодарит В.В. Румянцева за замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: АН СССР, 1956. С. 7–263.
2. *Еругин Н.П.* Приводимые системы. М.: Тр. Мат. Ин-та АН СССР, 1946. Т. 13. С. 1–96.
3. *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев.: Изд-во АН УССР, 1960. 78 с.

4. *Еругин Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск.: Изд-во АН БССР, 1963. 272 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969. 247 с.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 269 с.
9. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев. Вища шк., 1976. 180 с.
10. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. N 5. С. 588–597.

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1993