УДК 531.01

© 1994 г. И.В. Бойков

К ПРОБЛЕМЕ АЙЗЕРМАНА

Приводится положительное решение проблемы Айзермана в случае, когда правая часть дифференциального уравнения является самосопряженной матрицей.

Рассмотрим в n-мерном пространстве R_n наряду с нелинейной системой

$$\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k + f(x_1), \quad \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \quad i = 2,\ldots,n \tag{1}$$

линейную систему вида (1) при $f(x_1) = bx_1$.

Проблема Айзермана [1] состоит в следующем: если известно, что нулевое решение линейной системы асимптотически устойчиво при всех b, удовлетворяющих условию $\alpha < b < \beta$, то будет ли нулевое решение нелинейной системы (1) устойчивым в целом, если выполнено условие

$$\alpha < f(x_1)/x_1 < \beta \tag{2}$$

Эта проблема явилась источником многочисленных исследований. Для систем второго [2] и третьего [3] порядков показано, что выполнение условий (2) недостаточно для устойчивости решений.

Ниже приводится исследование устойчивости систем нелинейных уравнений более общего вида нежели (1)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + F(\mathbf{x}) \tag{3}$$

из которого следует положительное решение проблемы Айзермана для самосопряженной матрицы при условиях, что $-\infty < \alpha$, $\beta < \infty$. Здесь $\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$, $A = \{a_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2,\ldots, n)$, $F(\mathbf{x}) = (f_1(x_1,\ldots, x_n),\ldots, f_n(x_1,\ldots, x_n))$.

Исследование устойчивости будем проводить в пространствах R_n, E_n, где E_n – евклидово пространство. Ниже используются обозначения

$$R(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x} \in R_n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leqslant r\}, \quad S(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x} \in R_n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r\}$$

$$\operatorname{Re} K = K_R = (K+K^*)/2, \quad \Lambda(K) = \lim_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)h^{-1}$$

Здесь $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K [4], через $s_j(s_j(K))$ обозначены [5] s-числа оператора K, т.е. собственные значения оператора K^*K, $\sigma(K)$ – спектр оператора K.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \tag{4}$$

у которой матрица $B = \{b_{ik}\} i, k = 1, 2,\ldots, n$ подобрана таким образом, чтобы

$$\sigma(\operatorname{Re}(A+B)) \leqslant -\alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0 \tag{5}$$

Множество матриц B, для которых выполняется условие (5) обозначим через G.

Зафиксируем произвольный элемент $\mathbf{z} = (z_1,..., z_n) \in R_n$ и поставим ему в соответствие матрицу $C(\mathbf{z}) = \{c_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2,..., n)$, составленную из элементов $c_{ik} = f_i(z_1,..., z_n)(mz_k)^{-1}$ при $z_k \neq 0$, $c_{ik} = d_{ik}$ при $z_k = 0$, где $d_{ik} = \lim\limits_{z_k \to 0} f_i(z_1,...,z_n)z_k^{-1}$, если предел существует, $d_{ik} = 0$, если предел не существует, m – число элементов $z_k(k = 1, 2,..., n)$ вектора $\mathbf{z}$, отличных от нуля.

Теорема 1. Пусть при любом $\mathbf{z} \in R_n$, матрица $C(\mathbf{z})$ принадлежит множеству G, функции $f_i(z_1,..., z_n)$ $(i = 1, 2,..., n)$ непрерывны и $f_i(0,..., 0) = 0$ $(i = 1, 2,..., n)$. Тогда решение системы уравнений (3) устойчиво в целом.

Доказательство. Пусть в момент времени T траектория решения системы уравнений (3) проходит через точку $\mathbf{z} \in R_n$ с нормой $\|\mathbf{z}\| = r$. Покажем, что существует такой отрезок времени Δt_1, в течение которого траектория решения системы (4) перейдет со сферы $S(\mathbf{0}, r)$ в шар $R(\mathbf{0}, r_1)$, где $r_1 = e^{-\alpha\Delta t_1/2}r$. Для этого представим уравнение (3) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + C\mathbf{x} + D(\mathbf{x}) \tag{6}$$

$$D(\mathbf{x}) = (d_1(x_1,...,x_n),...,d_n(x_1,...,x_n)),\ d_i(x_1,...,x_n) =$$
$$= f_i(x_1,...,x_n) - f_i(z_1,...,z_n) - \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(x_k - z_k)$$

Решение уравнения (6) можно представить при $t \geqslant T$ в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{(A+C)(t-T)}\mathbf{x}(T) + \int\limits_T^t e^{(A+C)(t-\tau)}D(\mathbf{x}(\tau))d\tau \tag{7}$$

Переходя в (7) к нормам, имеем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant e^{-\alpha(t-T)}r + \int\limits_T^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|D(\mathbf{x}(\tau))\|d\tau \tag{8}$$

Обозначим через Δt_1 промежуток времени в течение которого $\|D(\mathbf{x}(t))\| \leqslant \alpha/2\|\mathbf{x}(\tau)\|$. Тогда при $t \in [T, T + \Delta t_1]$ неравенство (8) может быть усилено путем замены $D(\mathbf{x}(\tau))$ на $\alpha\mathbf{x}(\tau)/2$. Умножив обе части усиленного неравенства на $e^{\alpha t}$, приходим к неравенству

$$\varphi(t) \leqslant e^{\alpha T}r + \frac{\alpha}{2}\int\limits_T^t \varphi(\tau)d\tau,\quad \varphi(t) = e^{\alpha t}\|\mathbf{x}(t)\| \tag{9}$$

Применяя к (9) неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем при $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_1$ оценку $\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant e^{-\alpha(t-T)/2}r$. Следовательно, при $t_1 = T + \Delta t_1$ получим оценку $r_1 = e^{-\alpha\Delta t_1/2}r$. Продолжая этот процесс, убеждаемся что в моменты $t_2, t_3,...$ траектория решения уравнения (3) пересекает сферы $S(\mathbf{0}, r_2)$, $S(\mathbf{0}, r_3)$ и т.д.

Для радиусов сфер r_k имеем выражения

$$r_k = r\exp[-\alpha(\Delta t_1 + \ldots + \Delta t_k)/2]$$
$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1},\quad k = 1,2,...,\quad t_0 = T$$

Таким образом, показано, что траектория решения системы уравнений (3), начатая в сфере $S(\mathbf{0}, r)$ не покидает этой сферы. Применяя теорему Пеано ([6], с. 21), убеждаемся, что траектория системы уравнений (4) продолжима на бесконечный интервал времени $[T, \infty)$.

Пусть T_* – сумма построенных выше интервалов времени Δt_i, начиная с Δt_1. Имеется две возможности: 1) $T_* = \mathrm{const} < \infty$, 2) $T_* = \infty$.

Рассмотрим первую возможность. Покажем, что $\|\mathbf{x}(T + T^*)\| = 0$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\|x(T+T^*)\| = d > 0$. Тогда, как показано выше, существует такой отрезок времени $\Delta t_* \geq 0$, что $\|x(T+T^*+\Delta t_*)\| \leq$ $\leq e^{-\alpha\Delta t_*/2}\|x(T+T^*)\|$. Из определения T^* следует, что $\Delta t_* = 0$. Таким образом, получено противоречение, из которого следует, что $\|x(T+T^*)\| = 0$, т.е. решение в данном случае асимптотически устойчиво.

Рассмотрим вторую возможность. Выше было показано, что $\|x(t_k)\| \leq \exp[-\alpha(\Delta t_1 + \dots + \Delta t_k)/2]r$ $(k = 1, 2,\dots)$. Учитывая, что $T^* = \infty$, имеем $\lim \|x(t_k)\| = 0$ при $k \to \infty$. Так как при $t_k \leq t$ точка $x(t)$ находится внутри сферы $S(0, \|x(t_k)\|)$, то асимптотическая устойчивость решения системы уравнений (4) при любом начальном приближении доказана и в этом случае.

Обозначим через G^* множество матриц $B = \{b_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2,\dots, n)$, для которых выполняется условие $\Lambda(A + B) \leq \alpha$, $\alpha = \text{const} < 0$.

Теорема 2. Пусть при любом $z \in R_n$, матрица $C(z)$ принадлежит множеству G^*, функции $f_i(z_1,\dots, z_n)$ непрерывны и $f_i(0,\dots, 0) = 0$ $(i = 1, 2,\dots, n)$. Тогда решение системы уравнений (4) устойчиво в целом.

Доказательство подобно доказательству теоремы 1. Единственное отличие заключается в том, что при переходе от выражения (7) к неравенству (8) используется известное свойство [4] логарифмической нормы $\|e^{A+C}\| \leq e^{\Lambda(A+C)}$.

Обозначим через G^{**} множество матриц $B = \{b_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2,\dots, n)$, для которых выполняется условие $s_* = \max s(A + B) \leq \alpha$, $\alpha = \text{const} < 0$.

Теорема 3. Пусть при любом $z \in E_n$ матрица $C(z)$ принадлежит множеству G^{**}, функции $f_i(z_1,\dots, z_n)$ непрерывны и $f_i(0,\dots, 0) = 0$ $(i = 1, 2,\dots, n)$. Тогда решение системы уравнений (3) устойчиво в целом.

Доказательство подобно доказательству теоремы 1. Отличие заключается в следующем. Известно [4], что $\|e^{A+C}\| \leq e^{\|A+C\|}$. Норма $\|A + C\|$ оценивается в E_n посредством следующей цепочки неравенств:

$$\|(A+C)x\| = ((A+C)x,\ (A+C)x)^{1/2} = (UTx, UTx)^{1/2} =$$

$$= (Tx, Tx)^{1/2} = \|Tx\| \leq \max_j s_j \|x\|$$

где использовано [5] представление оператора $A + C = UT$ в виде произведения частично изометричного оператора U и оператора $T = (A + C)^*(A + C)$.

Вернемся к проблеме Айзермана. Пусть $a = \lim f(x)/x$ при $x \to 0$, если предел существует, или $a = 0$, если предел не существует.

Будем считать, что 1) матрица $A = \{a_{ij}\}$ $i, j = 1, 2,\dots, n$ самосопряженная, 2) линейная система, соответствующая (1) при $f(x_1) = bx_1$ асимптотически устойчива при любом $b \in B$, $B = [\alpha, \beta] \cup \{a\}$, 3) выполнено условие (2), 4) $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$. Из симметричности матрицы A следует симметричность матрицы $\bar{A}_b = \{\bar{a}_{lk}\}$ $(l, k = 1, 2,\dots, n)$, где $\bar{a}_{11} = a_{11} + b$, $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$ при $(i, j) \neq (1,1)$.

Покажем, что из условия асимптотической устойчивости решения линейной системы, соответствующей (1) при $f(x_1) = bx_1$, $b \in B$ следует существование такой постоянной $\gamma < 0$, что для всех указанных значений b собственные значения матриц $\bar{A}_b$ меньше γ.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует последовательность чисел b_k $(b_k \in B)$, таких, что $\lim \max (\sigma(\bar{A}_{b_k})) = 0$ при $k \to \infty$. Из последовательности b_k можно извлечь подпоследовательность сходящуюся к числу b_*, причем $\alpha \leq b^* \leq \beta$. Так как $\max \sigma(\bar{A}_{b_*}) \leq \gamma(b_*) < 0$, то ([7], гл. 14) существует ε-окрестность $(\varepsilon = \gamma(b^*)/2)$ точки b^*, для элементов b которой спектр матрицы $\bar{A}_b$ расположен левее значения $\gamma(b^*) + \varepsilon \leq \gamma(b^*)/2 < 0$. Из полученного противоречия следует, что $\max\sigma(\bar{A}_b) \leq \gamma$ при всех $\alpha \leq b \leq \beta$.

Так как матрица $\overline{A}_b$ – самосопряженная при всех $b \in B$, то $\sigma(\overline{A}_b) = \sigma(\mathrm{Re}\,\overline{A}_b)$. Следовательно, к системе уравнений (1) возможно применение теоремы 1. В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть линейная система, соответствующая системе (1) при $f(x_1) = bx_1$, асимптотически устойчива при любых b, таких, что $b \in B$. Матрица A самосопряжена, выполнены условия (2) и $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$. Тогда нелинейная система (1) устойчива в целом.

Следствие 1. Пусть решение системы $\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\overline{A}_b + \overline{A}_b^*)\mathbf{x}$ асимптотически устойчиво при любых b, таких, что $b \in [\alpha, \beta] \cup \{a\}$, выполнено условие (2), $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$. Тогда нелинейная система (1) устойчива в целом. Справедливость утверждения следует из теоремы 2 и равенства $\sigma(\frac{1}{2}(\overline{A}_b + \overline{A}_b^*)) = \sigma(\mathrm{Re}\,\overline{A}_b)$.

Следствие 2. Пусть решение системы $\dot{\mathbf{x}} = \overline{A}_b^*\overline{A}_b\mathbf{x}$ асимптотически устойчиво при любых b, таких, что $b \in B$, выполнено условие (2), $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$. Тогда нелинейная система (1) устойчива в целом.

Справедливость утверждения следует из теорем 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости "в большом" динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4. № 4. С. 187–188.
2. *Красовский Н.Н.* Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 5. С. 547–554.
3. *Плисс В.А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. 183 с.
4. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Пенза

Поступила в редакцию
1.IV.1993