

УДК 531.36:543.1

© 1994 г. А.Д. Морозов

О РЕЗОНАНСАХ И ХАОСЕ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Исследуются периодические по времени системы, близкие к двумерным нелинейным гамильтоновым, в случае, когда возмущение содержит нелинейные параметрические члены и является неконсервативным. Устанавливается условие существования новых режимов в резонансных зонах: регулярных двухчастотных и нерегулярных – «квазиаттракторов». На основе анализа автоколебательных укороченных систем, определяющих топологию резонансных зон, решается задача о переходе от резонансного случая к нерезонансному при изменении расстройки. На конкретном примере демонстрируется хорошее совпадение численных и аналитических результатов в квазиконсервативном случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим системы вида

$$dx/dt = \partial H(x, y) / \partial y + \varepsilon g(x, y, vt), \quad dy/dt = -\partial H(x, y) / \partial x + \varepsilon f(x, y, vt) \quad (1.1)$$

где ε, ν – параметры (величина $|\varepsilon|$ мала), g, f – периодические по $\varphi = \nu t$ с периодом 2π функции.

Предположим что невозмущенная гамильтонова система

$$dx/dt = \partial H(x, y) / \partial y, \quad dy/dt = -\partial H(x, y) / \partial x \quad (1.2)$$

нелинейна и имеет по крайней мере одну ячейку D , заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. Гамильтониан H , а также функций g, f будем считать достаточно гладкими (аналитическими) по x, y в некоторой области $G \subset R^2$ либо $G \subset R^1 \otimes S^1$. Кроме этого функции g и f будем считать непрерывными по t .

Предположим, что выполнено

Условие А. $\partial g / \partial x + \partial f / \partial y \neq 0$.

Из этого условия следует неконсервативность системы (1.1).

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать автономную систему

$$dx/dt = \partial H(x, y) / \partial y + \varepsilon \bar{g}(x, y), \quad dy/dt = -\partial H(x, y) / \partial x + \varepsilon \bar{f}(x, y) \quad (1.3)$$

где $\bar{g} = \langle g \rangle_\varphi, \bar{f} = \langle f \rangle_\varphi$.

Предположим выполненным

Условие Б. Система (1.3) имеет в ячейке D конечное множество грубых предельных циклов.

Цель работы – решение важного вопроса о возникновении новых режимов в резонансных зонах. Могут быть как регулярные, так и нерегулярные режимы – «квазиаттракторы». (Термин «квазиаттрактор» [1] применительно к рассматриваемой задаче означает существование гомоклинической структуры Пуанкаре с притягивающей окрестностью).

Здесь не анализируются численно свойства самого квазиаттрактора, ибо в настоящее время этому посвящено много работ (например, [2]).

Наряду с этим в данной работе на конкретном примере системы (1.1)

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x - x^3 + (P_1 + P_2x^2 + P_3x \sin(vt))y + P_4 \sin(vt) \quad (1.4)$$

где P_i – параметры, иллюстрируются теоретические результаты, полученные при малых $|\epsilon|$, а также устанавливается хорошее совпадение теории с экспериментом при немалых $|\epsilon|$. При этом требуется лишь малость неконсервативных членов, т.е. малость параметров P_1, P_2, P_3 в (1.4). Существование новых режимов в резонансных зонах обусловлено наличием у функций f и g нелинейных параметрических членов (для системы (1.4) – это $P_3x y \sin(vt)$). Впервые на существование таких режимов в системах вида (1.1) было указано в [3, 4]. Данная статья примыкает к работам [4, 5], развивая теорию существенно нелинейных автоколебательных систем.

При исследовании систем (1.1), (1.3) удобно перейти от переменных x, y к переменным действие (I) – угол (θ). В новых переменных система (1.1) принимает вид

$$dI/dt = \epsilon F(I, \theta, \varphi), \quad d\theta/dt = \omega(I) + \epsilon R(I, \theta, \varphi), \quad d\varphi/dt = \nu \quad (1.5)$$

$$(F = gX_\theta - fY_\theta, \quad R = -gX_I + fY_I)$$

где $\omega(I)$ – частота собственных колебаний, определяемая из (1.2).

Система (1.5) определена на прямом произведении $\delta \otimes S^1 \otimes S^1 = \delta \otimes T^2$, где δ – отрезок, являющийся образом отрезка $[h_{\min}, h_{\max}]$, $[h \in [h_{\min}, h_{\max}], H(x, y) = h$ – интеграл «энергии» системы (1.2)). Из-за соизмеримости частот ω, ν :

$$\omega(I) = q\nu / p, \quad q, p \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

иначе говоря, из-за резонансов, полностью усредненная система

$$dI/dt = \epsilon B(I), \quad B(I) = \langle F \rangle_{\varphi, \theta} \quad (1.7)$$

не определяет, вообще говоря, поведение решений системы (1.5) в глобальной области, отвечающей изменению I на отрезке δ .

Уравнение

$$B(I) = 0 \quad (1.8)$$

называется порождающим уравнение Пуанкаре–Понтрягина. Его простые вещественные корни определяют грубые предельные циклы в системе (1.3). Условие Б эквивалентно условию: уравнение (1.8) имеет ограниченное множество простых корней на интервале δ . Таким образом, если $B(I_0) = 0$, то $dB(I_0)/dI \neq 0$. Отсюда следует [5] возможность установления качественного поведения решений в глобальной области $\delta \otimes T^2$. При этом достаточно установить поведение решений в окрестностях ограниченного множества резонансных уровней $I = I_{pq}(H(x, y) = h_{pq})$, где I_{pq} определяются из (1.6), $I_{pq} \in \delta$.

2. Структура резонансных зон в параметрических системах. Поведение решений в окрестностях

$$U = \{(I, \theta): I_{pq} - C\mu < I < I_{pq} + C\mu, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad C = \text{const}\}, \quad \mu = \sqrt{\epsilon}$$

индивидуальных резонансных уровней $I = I_{pq}(H(x, y) = h_{pq})$, определяется с точностью до членов $O(\mu^2)$ [3, 4] уравнением маятникового типа

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} - bA(\nu; I_{pq}) = \mu\sigma(\nu; I_{pq}) \frac{d\nu}{d\tau} \quad (2.1)$$

$$b = d\omega(I_{pq})/dI, \quad \tau = \mu t, \quad A(\nu; I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F(I_{pq}, \nu + q\varphi/p, \varphi) d\varphi$$

$$\sigma(\nu; I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} \left[\frac{dF(I_{pq}, \nu + q\varphi/p, \varphi)}{dI} + \frac{\partial R(I_{pq}, \nu + q\varphi/p, \varphi)}{\partial \nu} \right] d\varphi$$

Видно, что наименьший период функций $A(v, I_{pq}), \sigma(v, I_{pq})$ равен $2\pi/p$ [3, 6].
Справедливо соотношение (приведенное ранее [4] без доказательства)

$$\sigma(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g(X, Y, \varphi)}{\partial X} + \frac{\partial f(X, Y, \varphi)}{\partial Y} \right) d\varphi \quad (2.2)$$

где $X = X(I_{pq}, v + q\varphi/p), Y = Y(I_{pq}, v + q\varphi/p)$ – невозмущенное решение на уровне $I = I_{pq}$.
Действительно, из выражений для F и R в (1.5) следует

$$\partial F(I, \theta, \varphi) / \partial I + \partial R(I, \theta, \varphi) / \partial \theta = (\partial g / \partial x + \partial f / \partial y)(x_\theta y_I - x_I y_\theta)$$

Так как преобразование $(x, y) \Rightarrow (I, \theta)$ каноническое, то $(x_\theta y_I - x_I y_\theta) = 1$. Отсюда получаем (2.2).

Из соотношения (2.2) вытекает следующая

Теорема 1. Если дивергенция векторного поля уравнения (2.1) зависит от v , то дивергенция векторного поля исходной системы (1.1) содержит слагаемые, которые зависят как от времени t , так и от одной или обеих координат.

Во многих случаях верно и обратное утверждение (например, для (1.4)).

Слагаемые, о которых идет речь в теореме 1, называются нелинейными параметрическими.

Обратимся к исследованию уравнения (2.1). Прежде всего заметим, что справедливы представления

$$A(v; I_{pq}) = A_*(v; I_{pq}) + B(I_{pq}), \quad B = \langle A \rangle_v \quad (2.3)$$

$$\sigma(v; I_{pq}) = \sigma_*(v; I_{pq}) + B_1(I_{pq}), \quad B_1 = \langle \sigma \rangle_v$$

где $B(I)$ – порождающая функция для автономной системы (1.3), а B_1 – ее производная. Случай знакоопределенной функции $\sigma(v; I_{pq})$ достаточно хорошо изучен (например, [3–7]). Поэтому обратимся к случаю, когда σ – знакопеременная функция. Иначе говоря, изучим то новое в структуре резонансных зон, что дают нелинейные параметрические члены в возмущении. Из (2.3) вытекает, что в этом случае выполнено условие

$$|B_1(I_{pq})| < \max_v |\sigma_*(v, I_{pq})| \quad (2.4)$$

При исследовании маятникового уравнения (2.1) будем различать случаи:
а) $B(I_{pq}) \neq 0$; б) $B(I_{pq}) = 0$. В случае б) у системы (1.3) в окрестности уровня $H(x, y) = h_{pq}$ существует грубый предельный цикл, а в случае а) – такого цикла нет.

Случай а. Пренебрегая в (2.1) членами порядка μ , приходим к интегрируемому уравнению

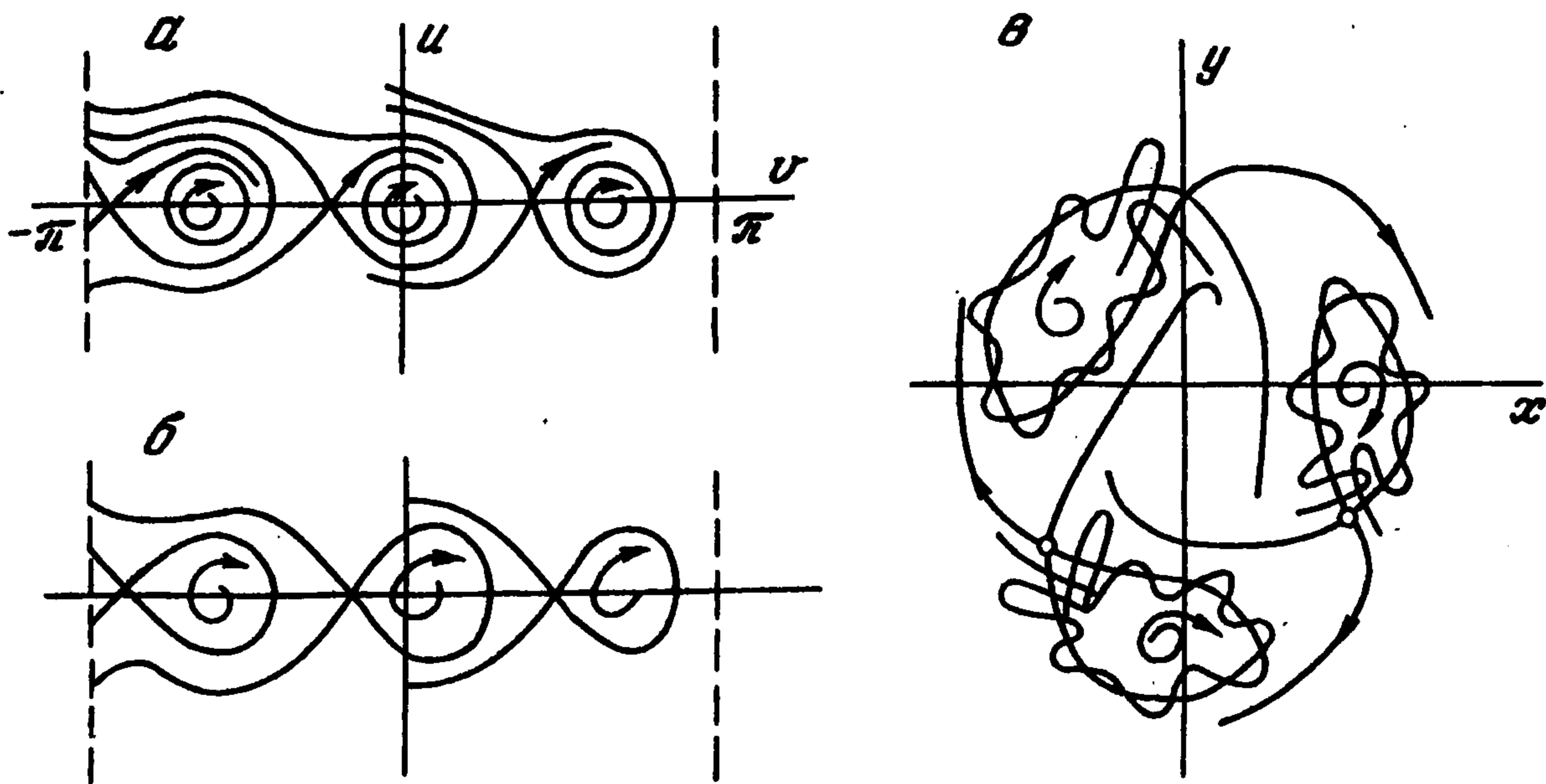
$$d^2 v / dt^2 - bA(v, I_{pq}) = 0 \quad (2.5)$$

Если $|B(I_{pq})| > \max_v |A_*(v, I_{pq})|$, то уравнение (2.5) не имеет состояний равновесия.

Тогда резонансный уровень $I = I_{pq}$ был назван «проходимым» [3, 4]. Заметим, что этот термин был введен, исходя из топологии резонансной зоны, что отличает его от соответствующего термина у физиков, где «прохождение» связано с изменением частоты возмущения v . В рассматриваемом случае в окрестности резонансного уровня отсутствуют периодические решения.

Наибольший интерес представляет случай, когда уравнение (2.5) имеет состояния равновесия, т.е. когда выполнено условие

$$|B(I_{pq})| < \max_v |A_*(v, I_{pq})| \quad (2.6)$$



Фиг. 1

В этом случае резонансный уровень $I = I_{pq}$ был назван частично проходимым (подробности см. в [4. б]).

Уравнение (2.1) эквивалентно автономной системе, которая по виду является частным случаем системы (1.3). При выполнении условия (2.4) в нем могут существовать предельные циклы. Для определения последних необходимо построить порождающую функцию Пуанкаре–Понтрягина.

На фиг. 1,а показан фазовый портрет уравнения (2.1), когда выполнены условия (2.4), (2.6) и имеется единственный предельный цикл. Если этот цикл лежит вне окрестности петли сепаратрисы уравнения (2.5), то в исходной системе ему отвечает двумерный инвариантный тор. Так как период движения на предельном цикле уравнения (2.1) имеет порядок $1/\mu$ по t , то в этом случае имеем длинновременной режимы биений в исходной системе (1.1) (образующие у тора имеют разный порядок).

Если же предельный цикл попадает в окрестность петли сепаратрисы (ширина которой по I , как известно, есть величина порядка $\exp(-1/\mu)$), то происходит разрушение двумерного инвариантного тора в исходной системе (1.1). На фиг. 1,б показана бифуркационная ситуация, когда цикл «влипает» в петлю сепаратрисы. Учет неавтономных членов, которые были отброшены при выводе (2.1), приводит к гомоклинической структуре, показанной на фиг. 1,в для отображения Пуанкаре при $p = 3$. Из-за наличия некомпактных сепаратрис в этом случае можно говорить лишь о нерегулярном переходном процессе.

Случай б. В этом случае у уравнения (2.1) всегда есть состояния равновесия и имеем третий тип резонансной зоны – непроходимую резонансную зону. Чтобы лучше понять структуру такой зоны, введем в (2.1) расстройку γ , определяющую отклонение резонансного уровня $I = I_{pq}$ от уровня $I = I_0$, в окрестности которого у автономной системы (1.3) существует предельный цикл:

$$B(I_{pq}) = (dB(I_0)/dI)(I_{pq} - I_0) + O((I_{pq} - I_0)^2) \approx \gamma\mu \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.1) можно переписать в виде системы

$$du/dt = A_*(v; I_{pq}) + \mu(\sigma(v; I_{pq})u + \gamma), \quad dv/dt = bu \quad (2.8)$$

Для невырожденных резонансных зон, которые здесь рассматриваются, $b \neq 0$.

Перейдем в системе (2.8) (как в колебательной, так и во вращательной области) от переменных (v, u) к переменным действие- J , угол L и усредним полученную систему по «быстрой» угловой переменной L . В результате придем к уравнению

$dJ/d\tau = \mu b \Phi(J)/2\pi$, где

$$\Phi(J) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} \sigma(v(J, L); I_{pq}) u^2(J, L) dL & \text{в колебательной области} \\ \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} \sigma(v(J, L); I_{pq}) u^2(J, L) dL \pm \frac{2\pi\gamma}{b} & \text{во вращательной области} \end{cases}$$

Ω – собственная частота, $0 < J < J_c$, J_c – отвечает контуру в «невозмущенной» системе

$$du/d\tau = A_*(v; I_{pq}), \quad dv/d\tau = bu \quad (2.9)$$

составленному из седла и двух сепаратрисных петель, охватывающих фазовый цилиндр.

Функция $\Phi(J)$ разрывная при $\gamma \neq 0$ в точке $J = J_c$. Поэтому для определения взаимного расположения сепаратрис, которые в системе (2.9) образовывали контур из внешних петель сепаратрис, воспользуемся формулой В.К. Мельникова [8].

$$\Delta = \mu \Delta_1^\pm + O(\mu^2)$$

$$\Delta_1^\mp = b \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_*(v_0; I_{pq}) + B_1(I_{pq})) u_0^2 d\tau \mp 2\pi\gamma$$

Здесь v_0, u_0 – решение системы (2.9) на контуре, составленном из седла и внешних петель сепаратрис. Обозначая $d = \max_v |\sigma_*(v; I_{pq})| = \|\sigma_*\|$, $a = |B_1(I_{pq})|/d$, из формулы для Δ_1^\pm получаем $\Delta_1^\pm = d(\alpha + \beta a) \pm 2\pi\gamma$, где

$$\alpha = b \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}(v_0; I_{pq}) u_0^2 d\tau, \quad \beta = b \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 d\tau, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_*}{\|\sigma_*\|}$$

Из условия $\Delta_1^\pm = 0$ находим

$$\gamma = \gamma^\pm = \mp d(\alpha + \beta a) / 2\pi \quad (2.10)$$

При $\gamma = \gamma^+$ в системе (2.8) существует верхний контур, а при $\gamma = \gamma^-$ – нижний. Соотношение (2.10) на плоскости параметров (a, γ) определяет две прямые линии. Они пересекаются в точке $(a_*, 0)$, где $a_* = -\alpha/\beta$. При $|a| > 1$ функция $\sigma(v; I_{pq})$ – знакоопределенная, а при $|a| < 1$ – знакопеременная.

В силу условия (2.4) представляет интерес второй случай, ибо первый рассмотрен ранее [4, 5]. Особенностью случая $|a| < 1$ является возможность существования в системе (2.8) предельных циклов как в колебательной, так и во вращательной областях, для которых нет порождающих циклов в системе (1.3). Возможны [9] следующие бифуркации рождения предельных циклов в системе (2.8): а) из негрубого фокуса, б) от петли сепаратрисы (контур), в) из уплотнения траекторий. Если не интересоваться числом предельных циклов, то достаточно рассмотреть случай, когда в колебательной области существует не более одного (при этом можно добавить слова «с точностью до четного числа») предельного цикла. Тогда можно сформулировать общее утверждение об изменении качественного поведения траекторий системы (2.8) при изменении расстройки подобно тому, как это было сделано в [4]. Однако, прежде чем это делать, более детально рассмотрим вопрос для случая, когда функции f, g – тригонометрические многочлены степени N по φ . Тогда согласно (1.5), (2.1) и функции A, σ будут тригонометрическими многочленами по v степени не выше $N_1 \leq N$:

$$-bA_*(v; I_{pq}) = \sum_{i=1}^{N_1} (a_i \cos(ipv) + b_i \sin(ipv)), \quad \sigma_*(v; I_{pq}) = \sum_{i=1}^N (d_i \cos(ipv) + c_i \sin(ipv)) \quad (2.11)$$

Из (2.1), (2.2) следует, что вклад в A и σ дают, вообще говоря, разные гармоники в возмущении. Это означает, что в формулах (2.11) преобладающими могут быть гармоники с разными номерами. Оставим в (2.11) только эти основные гармоники. Пусть для определенности в выражении для $A_*(v; I_{pq})$ преобладающей является гармоника с номером 1, а в выражении для $\sigma_*(v; I_{pq})$ – с номером n . Тогда, заменяя $\gamma b \Rightarrow \gamma$, систему (2.8) можно переписать в виде уравнения

$$d^2 v / dt^2 + r \sin(pv + \psi) = \mu [(d_n \cos(npv) + c_n \sin(npv) + B_1)(dv / dt) + \gamma] \quad (2.12)$$

$$(r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \psi = \text{arctg}(b_1 / a_1))$$

Делая замену

$$z = pv + \psi, \quad \sqrt{rp}\tau \Rightarrow \tau, \quad \mu / \sqrt{rp} \Rightarrow \mu, \quad \gamma / \sqrt{p/r} \Rightarrow \gamma$$

$$\tilde{d}_n = d_n \cos(n\psi) - c_n \sin(n\psi), \quad \tilde{c}_n = d_n \sin(n\psi) + c_n \cos(n\psi)$$

придем к уравнению (штрих означает производную по τ)

$$z'' + \sin(z) = \mu [(\tilde{d}_n \cos(nz) + \tilde{c}_n \sin(nz) + B_1)z' + \gamma]$$

Член $\mu \tilde{c}_n z' \sin(z)$ в этом уравнении является консервативным, т.е. не дает вклада в порождающую функцию $\Phi(J)$. Поэтому отбросим его. Далее, обозначая $B_1/\tilde{d}_n = a$, $\gamma/\tilde{d}_n \Rightarrow \gamma$, $\mu \tilde{d}_n \Rightarrow \mu$, придем к уравнению

$$z'' + \sin(z) = \mu [(\cos(nz) + a)z' + \gamma] \quad (2.13)$$

Для уравнения (2.13) порождающая функция $\Phi(J)$, согласно [2], имеет вид

$$\Phi(J(\rho)) = \Phi^{(s)}(\rho) = aF_n^{(s)}(\rho) + F_0^s(\rho) \pm \delta_{2s} 2\pi\gamma \quad (2.14)$$

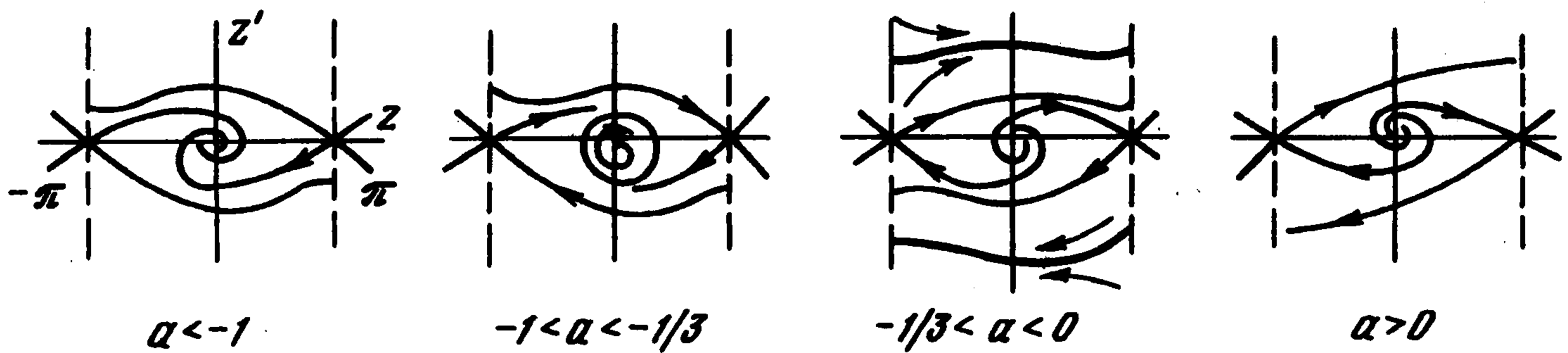
$$F_0^{(1)}(\rho) = 16[(\rho - 1)K + E], \quad F_1^{(1)}(\rho) = 16[(1 - \rho)K + (2\rho - 1)E] / 3$$

$$F_0^{(2)}(\rho) = 8E / \sqrt{\rho}, \quad F_1^{(2)}(\rho) = 8[2(\rho - 1)K + (2 - \rho)E] / 3\rho^{3/2}$$

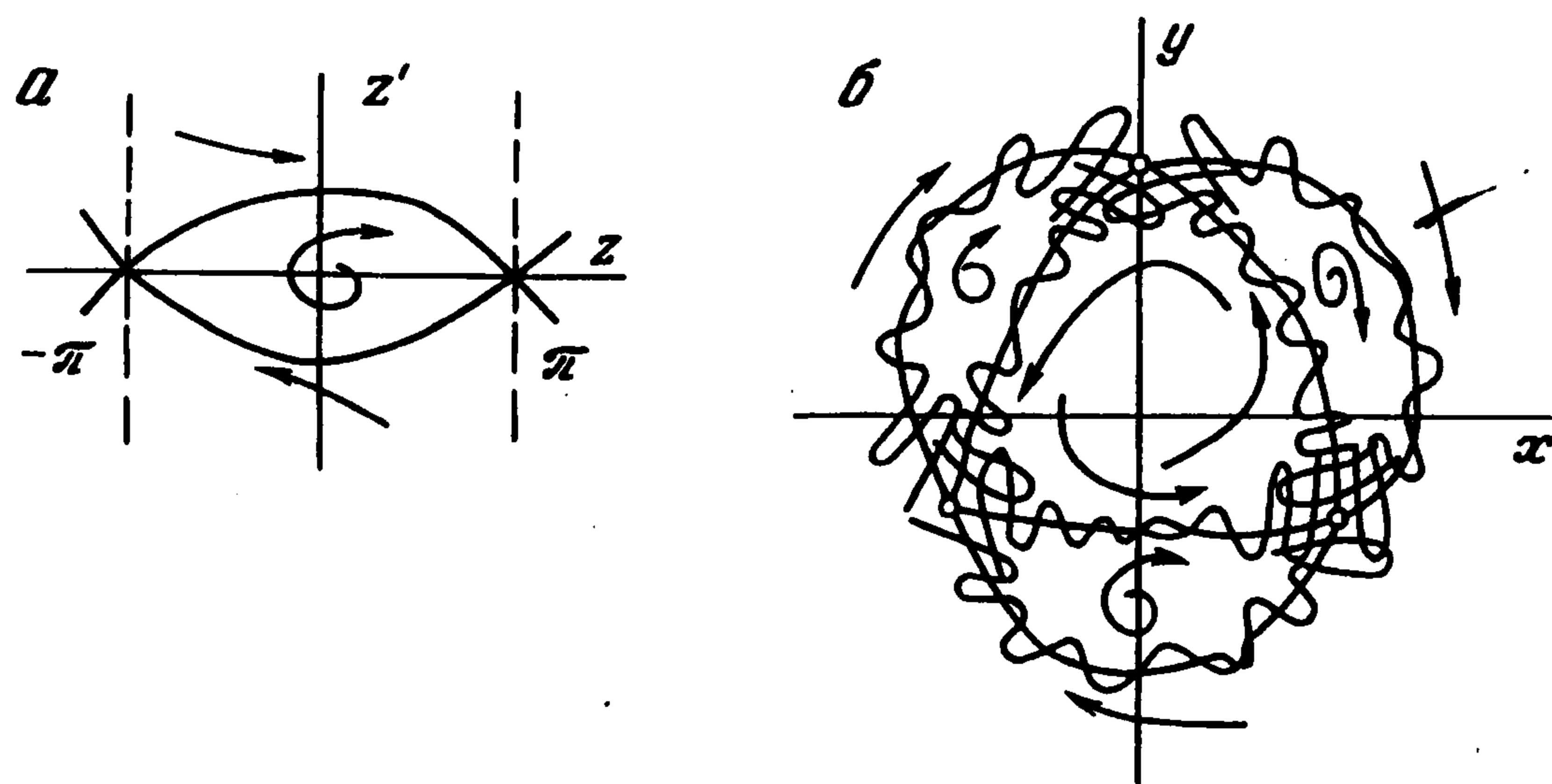
Здесь $s = 1$ отвечает колебательной области, а $s = 2$ – вращательной, K, E – полные эллиптические интегралы, $\rho = k^2$, k – модуль эллиптических интегралов, $\rho = (1 + \hbar)/2$ в колебательной области и $\rho = 2/(1 + \hbar)$ во вращательной области, $\hbar = \hbar(J(\rho))$ – значение интеграла энергии уравнения $z'' + \sin(z) = 0$, $F_j^{(s)}(\rho)$ – порождающая функция, определяемая слагаемым в возмущении $z' \cos(jz)$; знак плюс соответствует верхнему полуцилиндру, а минус – нижнему; δ_{2s} – символ Кронекера.

Уравнение вида (2.13) с $n = 1$ без предположения малости μ рассматривалось [10] в связи с анализом систем фазовой автоподстройки частоты. Здесь, в отличие от [10], при исследовании уравнения (2.13) используем соотношение (2.14). Это позволяет в явной форме найти все бифуркационные множества, за исключением одного – отвечающего петле сепаратрисы седла, не охватывающей фазовый цилиндр. Отметим также, что результаты работы [10] позволяют обобщить исследование уравнения (2.13) на случай уравнения (2.1), если $\sigma_* = dA/dv$

Обратимся прежде всего к случаю $\gamma = 0$. В этом случае $\Phi(\rho)$ – непрерывная функция при $\rho = 1$. Тогда она определяет предельные циклы вплоть до сепаратрисы. Этот случай рассмотрен в [2]. На фиг. 2 показаны грубые топологические структуры при $n = 1$. Отметим, что уход предельных циклов на «бесконечность» возможен лишь при $B_1 = 0$. Это невозможно при выполнении условия Б. На фиг. 3,а показан би-



Фиг. 2



Фиг. 3

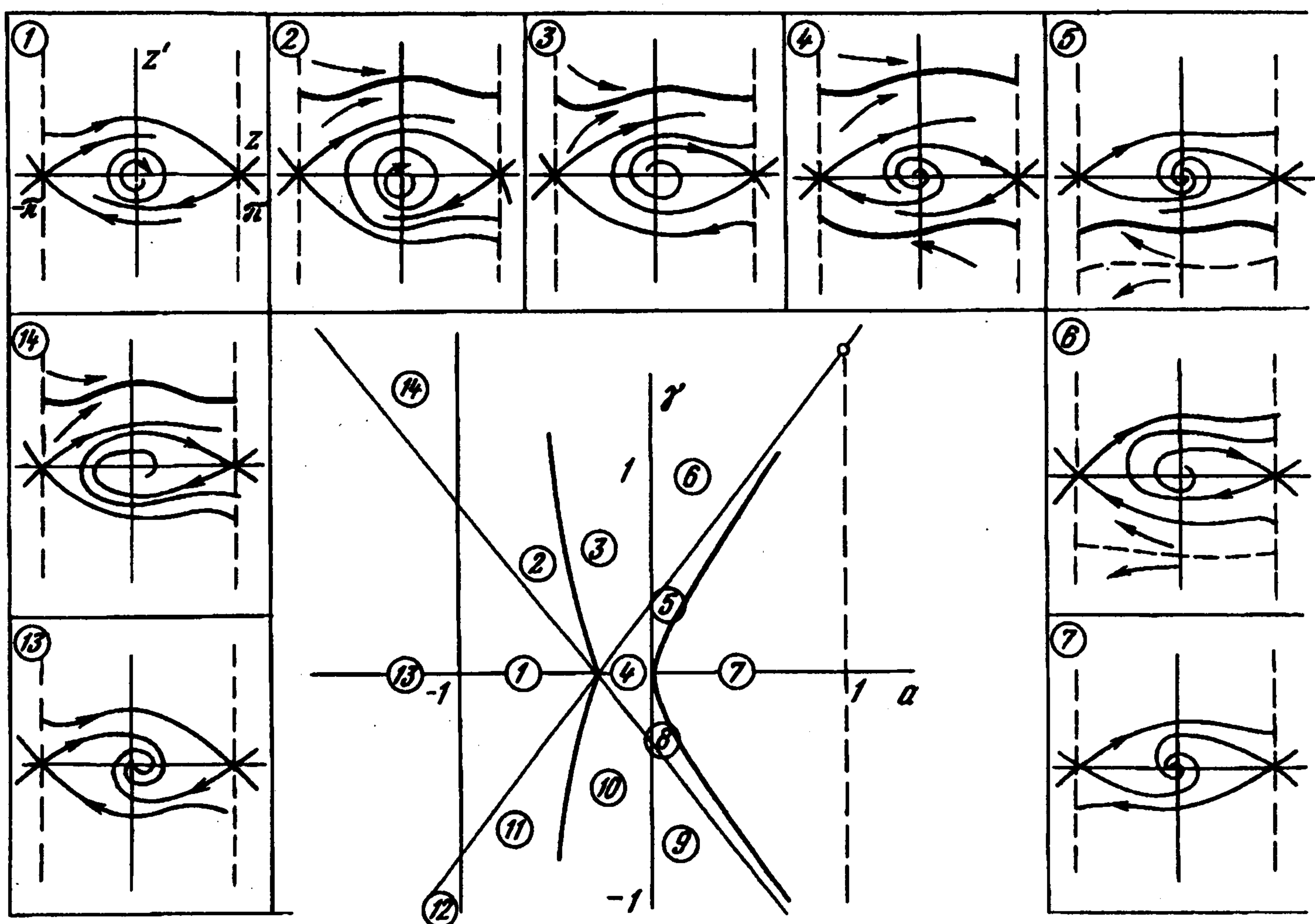
фуркационный случай, когда предельный цикл «влип» в сепаратрисный контур (в этом случае $\Phi(\rho)$ имеет простой корень $\rho = 1$), а на фиг. 3,б – соответствующее поведение инвариантных кривых (сепаратрис) отображения Пуанкаре для исходной системы при $\rho = 3$. Окрестность с гомоклиническим контуром является притягивающей. При этом в самой окрестности существует нетривиальное гиперболическое множество [11] и, следовательно, имеем «квазиаттрактор» (хаотическую динамику-хаос).

При $\gamma \neq 0$ порождающая функция $\Phi(\rho)$ разрывная в точке $\rho = 1$. Поэтому здесь бифуркация влипания цикла в сепаратрису требует отдельного рассмотрения.

Воспользуемся формулой В.К. Мельникова и вычислим величину Δ_1^\pm , определяющую расщепление невозмущенной сепаратрисы для уравнения (2.13). Видно, что уравнение $\Delta_1^\pm = 0$ совпадает с уравнением $\Phi^{(2)}(1) = 0$. Тогда, используя (2.14) и полагая для определенности $n = 1$, находим бифуркационные значения $\gamma^\pm = \mp 4(a + 1/3)/\pi$. При $\gamma = \gamma^+ + O(\mu)$ имеем петлю сепаратрисы седла, охватывающую фазовый цилиндр и расположенную в области $z' \geq 0$, а при $\gamma = \gamma^- + O(\mu)$ – в области $z' \leq 0$. Из (2.14) получаем следующую асимптотику при $\rho \rightarrow 0$: $\Phi^{(2)}(\rho) \approx \pi(8a/\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} \pm 4\gamma)/2$. Отсюда вытекает, что на плоскости (a, γ) прямая $a = 0$ является особой. Далее из (2.14) находим линию двойных циклов в параметрической форме

$$a = a_0(\rho) = -(F_0^{(2)})' / (F_n^{(2)})', \quad \gamma = \gamma_0(\rho) = \mp (F_0^{(2)}(F_n^{(2)})' - (F_0^{(2)})' F_n^{(2)}) / (2\pi \cdot (F_0^{(2)})'), \quad \rho \in [0, 1] \text{ или } \gamma = \gamma_0^\pm(a)$$

Видно, что перестройка фазового портрета уравнения (2.13) при $\rho \cong 1$ влечет образование петли сепаратрисы седла, не охватывающей фазовый цилиндр. В силу условия Б $a \neq 0$, и следовательно, седловая величина отлична от нуля. Тогда от петли сепаратрисы может родиться только один предельный цикл [9]. Численно можно найти на плоскости параметров соответствующее бифуркационное множество $\gamma_1^\pm(a)$.



Фиг. 4

Таким образом получаем разбиение плоскости параметров (a, γ) на области с разными структурами, а также и сами топологические структуры для уравнения (2.13), показанные на фиг. 4 при $n = 1$. Структуры, соответствующие случаям 8–12, не приведены на фиг. 4, ибо они получаются из структур 5, 6, 3, 2, 14, соответственно, изменением направления координатных осей.

Отметим, что одновременно с существованием у уравнения (2.13) петли сепаратрисы, охватывающей фазовый цилиндр, существует устойчивый предельный цикл либо охватывающий фазовый цилиндр, либо не охватывающий фазовый цилиндр, либо, наконец, устойчивое состояние равновесия или устойчивая «бесконечность». Это означает невозможность существования квазиаттрактора при $\gamma \neq 0$ в исходной неавтономной системе. Заметим, что гомоклиническая структура существует для малого интервала изменения параметра γ ($|\gamma - \gamma^*| \approx \exp(-1/\mu)$).

На примере (1.4) иллюстрируется существование квазиаттрактора при $\gamma \approx 0$.

Предельным циклам уравнения (2.13), не лежащим в окрестности невозмущенного сепаратрисного контура, отвечают в исходной системе двумерные инвариантные торы также, как и в случае $B \neq 0$. Однако здесь, в отличие от случая $B \neq 0$, могут существовать торы двух типов, соответствующие в (2.13) предельным циклам в колебательной и вращательной областях. Торы, отвечающие циклам уравнения (2.13) во вращательной области (за исключением одного), не имеют порождающего «колмогоровского» тора в соответствующей гамильтоновой возмущенной системе (для системы (1.4) $P_1 = P_2 = P_3 = 0$), в то время как асимптотически устойчивые торы, отвечающие предельным циклам уравнения (2.13) в колебательной области, это образы торов следующего шага в иерархии резонансов.

Замечание. Следует различать случаи четного и нечетного n . При n четном в петлю сепаратрисы влипают неустойчивый цикл, а при n нечетном – устойчивый. Поэтому при анализе проблемы существования квазиаттрактора представляет интерес лишь случай нечетного n .

В соответствии с бифуркационной диаграммой (фиг. 4) случай $|a| < 1$ удобно разбить на три подслучая: а) $-1 < a < a_*$, б) $a_* < a < 0$, в) $0 < a < 1$, $a_* = 1/(1-4n^2)$. Переносим результаты, полученные для уравнения (2.13) на уравнение (2.12) с нечетным n , используя в колебательной области [2] и рассматривая поведение решений на исходном цилиндре $\{v \bmod 2\pi, u\}$ приходим к следующей теореме.

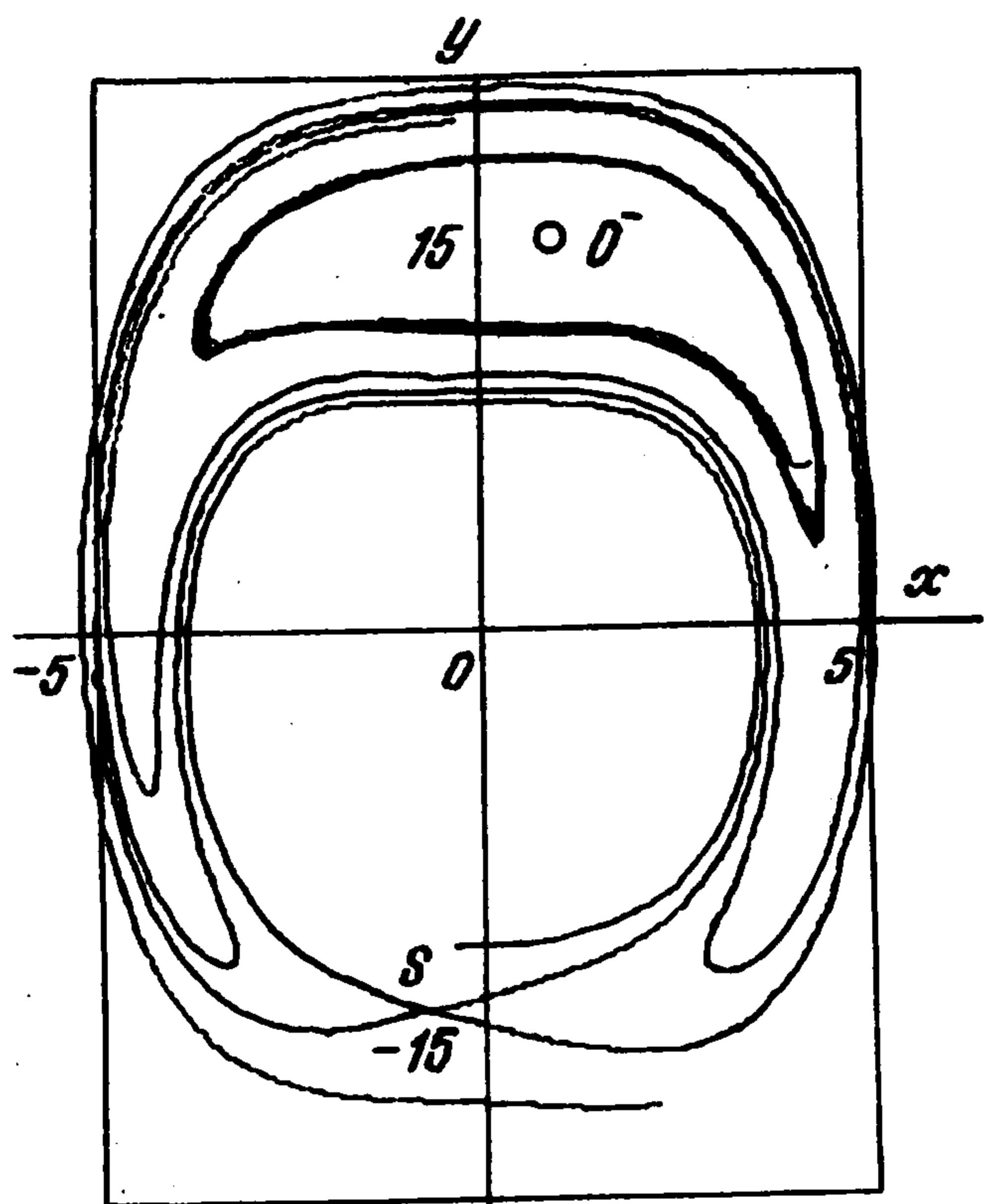
Теорема 2. Найдутся такие μ_* , $\gamma^\pm(a)$, $\gamma_0^\pm(a)$, $\gamma_1^\pm(a)$, a_* , что для $|\mu| < \mu_*$ и нечетном n в (2.12) можно выделить три интервала по параметру a : 1°. $a \in (-1, a_*)$; 2°. $a \in (a_*, 0)$; 3°. $a \in (0, 1)$.

1°. Пусть $a \in (-1, a_*)$. Тогда: 1) при $\gamma > \gamma_1^+ > 0$ у уравнения (2.12) существует единственный устойчивый предельный цикл (ПЦ), охватывающий фазовый цилиндр $\{v \bmod 2\pi, u\}$ и не более $p(n-1)$ ПЦ в колебательной области (КО); 2) при $\gamma_1^+ < \gamma < \gamma^+$ существует дополнительно p ПЦ в КО, родившиеся из петель сепаратрисы при $\gamma = \gamma_1^+$; 3) при $\gamma = \gamma^+$ устойчивый ПЦ во вращательной области влипают в сепаратрисный контур Γ_p^+ , составленный из p седел и внешних сепаратрис, идущих из седла в седло, остальные неустойчивые сепаратрисы стремятся к ПЦ в КО; 4) при $\gamma^- < \gamma < \gamma^+$ ПЦ, охватывающие фазовый цилиндр, отсутствуют и существует не более $p \cdot n$ ПЦ в КО; 5) при $\gamma = \gamma^-$ образуется сепаратрисный контур Γ_p^- , составленный из p седел и внешних сепаратрис и отличающийся от Γ_p^+ направлением обхода фазового цилиндра и расположением на нем; 6) при $\gamma_1^- < \gamma < \gamma^-$ существует не более $p \cdot n$ ПЦ в КО и один устойчивый ПЦ, охватывающий фазовый цилиндр; 7) при $\gamma < \gamma_1^-$ у уравнения (2.12) существует единственный устойчивый ПЦ, охватывающий фазовый цилиндр $\{v \bmod 2\pi, u\}$ и расположенный в области $u < 0$ и не более $p(n-1)$ ПЦ в КО.

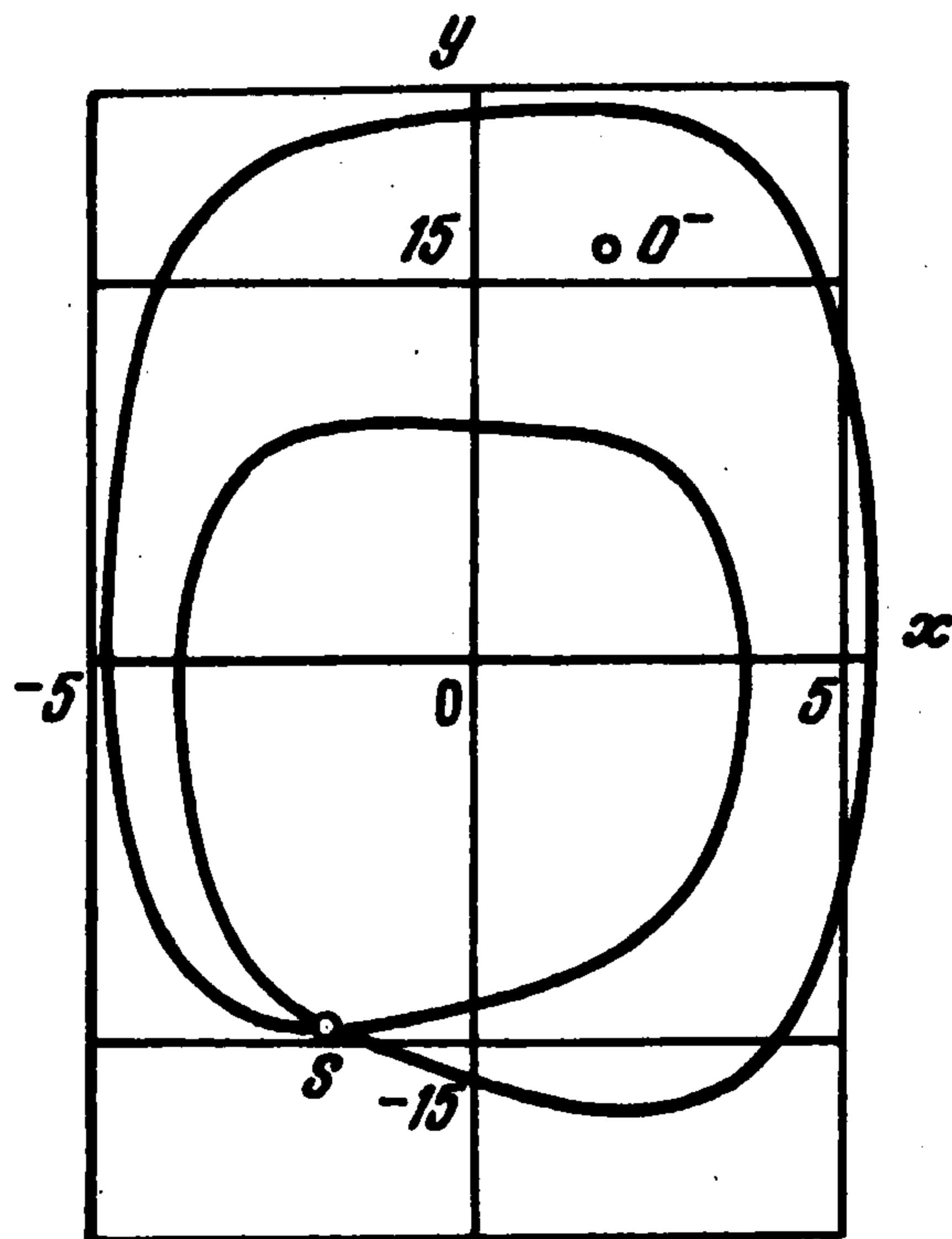
2°. Пусть $a \in (a_*, 0)$. Тогда в КО существует $p(n-1)$ ПЦ, а во вращательной области: 1) при $\gamma > \gamma^-$ у уравнения (2.12) существует единственный устойчивый ПЦ для $u > 0$; 2) при $\gamma = \gamma^-$ образуется контур Γ_p^- ; 3) при $\gamma^+ < \gamma < \gamma^-$ существует по одному устойчивому ПЦ на верхнем ($u \geq 0$) и нижнем ($u \leq 0$) полуцилиндрах; 4) при $\gamma = \gamma^+$ образуется контур Γ_p^+ ; 5) при $\gamma < \gamma^+$ существует единственный устойчивый ПЦ для $u < 0$.

3°. Пусть $a \in (0, 1)$. Тогда в КО существует не более $p(n-1)$ ПЦ, а во вращательной области: 1) при $\gamma > \gamma^-$ и $u < 0$ у уравнения (2.12) существует единственный неустойчивый ПЦ; 2) при $\gamma = \gamma^-$ образуется контур Γ_p^- ; 3) при $\gamma_0^- < \gamma < \gamma^-$ и $u < 0$ существуют устойчивый ПЦ, родившийся от Γ_p^- , и неустойчивый ПЦ; 4) при $\gamma = \gamma_0^-$ устойчивый и неустойчивый ПЦ сливаются; 5) при $\gamma_0^+ < \gamma < \gamma_0^-$ ПЦ отсутствуют; 6) при $\gamma = \gamma_0^+$ образуется полуустойчивый ПЦ для $u > 0$; 7) при $\gamma^+ < \gamma < \gamma_0^+$ существуют устойчивый и неустойчивый ПЦ для $u > 0$; 8) при $\gamma = \gamma^+$ образуется контур Γ_p^+ ; 9) при $\gamma < \gamma^+$ существует единственный неустойчивый ПЦ для $u > 0$.

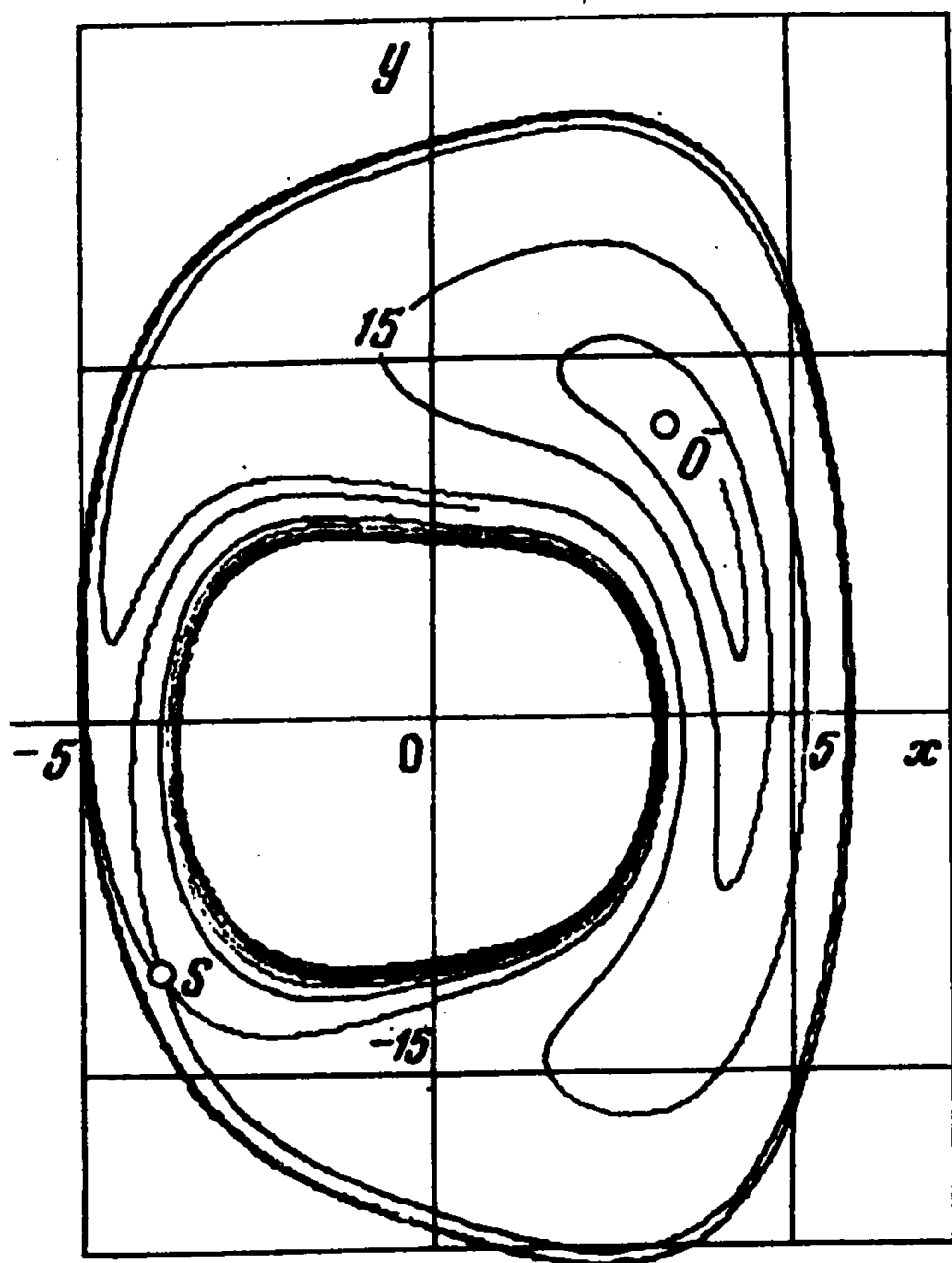
3. Компьютерный анализ системы (1.4). Данное исследование системы (1.4) дополняет полученные ранее результаты [5]. Поэтому остановимся лишь на эффектах, к которым приводит нелинейный параметрический член $x \gamma \sin(vt)$. Так же как и в [5] положим $v = 4$. Тогда при малых P_i , $i = 1-4$, в системе (1.4) могут существовать лишь два «расщепляемых» резонансных уровня: $H(x, y) = h_{11}$, $H(x, y) = h_{31}$, $h_{31} < h_{11}$. Соответствующая автономная система (1.3) имеет не более одного ПЦ, прохождение которого через резонансы при изменении параметра P_2 рассматривалось в [5]. Если этот ПЦ расположен вне окрестностей резонансных уровней $-H(x, y) = h_{11}$, $H(x, y) = h_{31}$, то в исходной неавтономной системе (1.4) ему отвечает двумерный инвариантный тор T^2 , для которого существует порождающий «колмогоровский» тор в гамильтоновой системе ($P_1 = P_2 = P_3 = 0$).



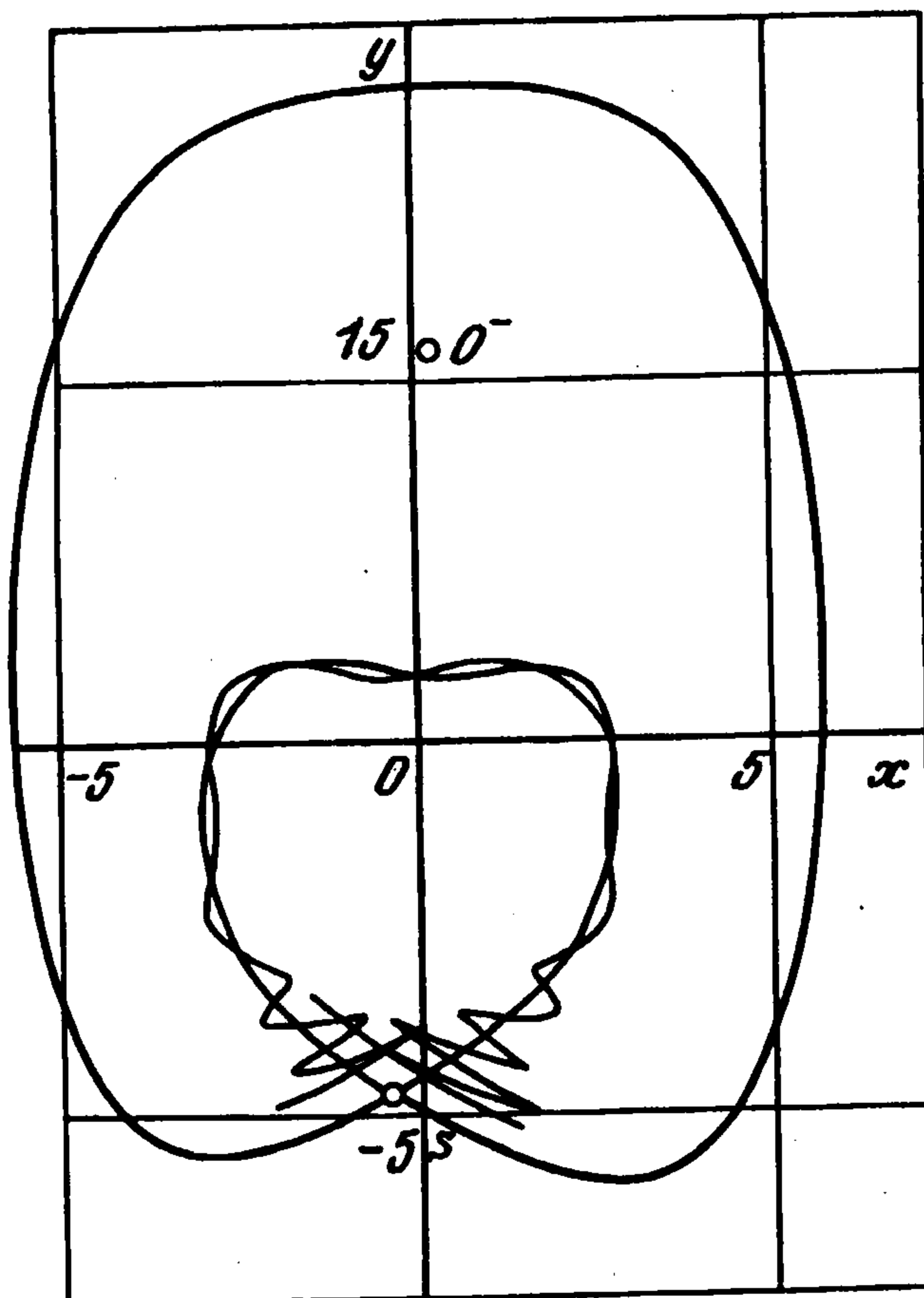
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

При компьютерном анализе системы (1.4) использовалась разработанная автором программа, с помощью которой получены результаты, представленные на фиг. 5–8. В этой программе при численном интегрировании применялись формулы из семейства формул Рунге–Кутты, допускающие погрешность на шаге $O(h^6)$, h –шаг интегрирования.

Численный анализ системы (1.4) проводился при различных значениях параметра P_4 (от 0,1 до 20) и достаточно малых значениях параметров P_1, P_2, P_3 . При этом мы фиксировали $P_2 = -0,008$ и изменяли параметры P_2, P_3 , когда исследовали основной резонанс. Установлено хорошее совпадение теоретических результатов с численными при изменении P_4 по крайней мере до $P_4 = 2$. Очевидно, систему (1.4) при $P_4 = 2$ нельзя считать близкой к интегрируемой. Далее везде будем считать $P_4 = 2$, если не оговорено противное.

На фиг. 5 показано отображение Пуанкаре при $P_1 = 0,0472; P_2 = -0,008; P_3 = 0,018$, определяющее структуру резонансной зоны основного резонанса ($p = 1, q = 1$). Наряду с сепаратрисами седловой

неподвижной точки S показана замкнутая инвариантная кривая, охватывающая неустойчивую неподвижную точку O^- , и соответствующая устойчивому ПЦ в колебательной области системы (2.8). Эта замкнутая инвариантная кривая появляется при $P_3 \approx 0,014$ в результате потери устойчивости неподвижной точки O^- . При увеличении параметра P_3 замкнутая инвариантная кривая увеличивается в размерах и при $P_3 \approx 0,0487$ влипают в сепаратрисы седловой точки S , образуя контур (фиг. 6). При дальнейшем увеличении P_3 появляются две замкнутые инвариантные кривые, показанные на фиг. 7 при $P_3 = 0,15$. Эти изменения структуры резонансной зоны хорошо согласуются с теоретическими результатами для $\gamma = 0$. Хорошее согласие с теорией отмечается также и при $\gamma \neq 0$.

В случае, представленном на фиг. 6, трансверсальность пересечения сепаратрис седловой точки S визуально не обнаруживается. Поэтому, чтобы лучше увидеть гомоклиническую структуру, мы увеличили P_4 . При $P_4 = 8$ эта структура хорошо видна (фиг. 8). Соответствующий квазиаттрактор является единственным притягивающим множеством. В самом квазиаттракторе не исключается существование устойчивых периодических точек большого периода, которые крайне трудно обнаружить при численном счете.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (Фундаментальные проблемы математики и механики).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афраймович В.С.* Принцип кольца и квазиаттракторы // Тезисы докл. 9-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. С. 42.
2. *Морозов А.Д.* О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 721–730.
3. *Морозов А.Д.* Уравнения маятникового типа и резонансы // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1980. С. 3–16.
4. *Морозов А.Д., Шильников Л.П.* О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 385–394.
5. *Morozov A.D.* On the global behavior of self-oscillatory systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1993. V. 3. № 1. P. 195–200.
6. *Морозов А.Д.* Системы, близкие к нелинейным интегрируемым. Горький: Изд-во Горьк. у-та, 1983. 96 с.
7. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. N.Y., Berlin, Springer-Verlag, 1983. 459 p.
8. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. Мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
9. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 487 с.
10. *Белюстина Л.Н., Белых В.Н.* Качественное исследование динамических систем на цилиндре // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. N. 3. С. 403–415.
11. *Шильников Л.П.* Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Мат. сб. 1967. Т. 74. № 3. С. 378–397.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
17.III.1993