УДК 531.36

© 1994 г. Т.Д. Конашенкова, Н.К. Монцук

О СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗЬЮ

Рассматриваются голономные механические системы с неудерживающей связью и абсолютно упругими ударами о связь под действием возмущающих сил типа нормального "белого шума". Дается определение движения и ставится задача анализа таких систем. Показано, что уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, составленное для одномерной плотности распределения вероятностей вектора состояния систем, свободных от неудерживающей связи, определяет и одномерную плотность распределения исследуемых систем. Изучаются стационарные в узком смысле режимы и предлагается приближенный метод анализа таких систем. Рассмотрены примеры.

При анализе стохастических виброударных систем основное внимание уделялось [1] механическим системам с одной степенью свободы, причем исследование проводилось методом усреднения в сочетании с методом негладких преобразований. Движение некоторых виброударных систем при случайном возмущении, отличном от белого шума, исследовалось в [2] при помощи предельных теорем.

1. Рассмотрим механическую голономную систему, с $(n + 1)$-мерным конфигурационным пространством U ($\mathbf{q} = [q_0, \mathbf{q}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ – локальные координаты на U, $\dim \mathbf{q}_1 = n$), кинетической энергией T, являющейся квадратичной формой обобщенных скоростей, потенциальной энергией $\Pi = \Pi(\mathbf{q})$, вектором обобщенных сил $\mathbf{F}$ и неудерживающей связью $q_0 \geqslant 0$. Функция Гамильтона системы равна $H = T + \Pi$, $T = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Omega(\mathbf{q}, t)\mathbf{p}/2$ где $\mathbf{p}$ – вектор обобщенных импульсов. Будем считать, что обобщенные координаты на U выбраны так, что

$$T = [\omega_0^2(\mathbf{q},t)p_0^2 + \mathbf{p}_1^{\mathrm{T}}\Omega_1(\mathbf{q},t)\mathbf{p}_1]/2$$

(полугеодезические координаты) [3, 4]. Предполагается, что вектор обобщенных сил $\mathbf{F}$ представим в виде

$$\mathbf{F} = -\mathbf{D}(\mathbf{q},t)\mathbf{p} + \mathbf{b}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\mathbf{V}(t)$$

где $\mathbf{V}(t)$ – вектор нормально распределенных белых шумов с матрицей интенсивности $\nu(t)$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{b}$ – детерминированные матричные функции соответствующей размерности ($\mathbf{D}$ – неотрицательная матрица). Если бы система была свободна от неудерживающей связи, то она описывалась бы следующими стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) в смысле Ито:

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q} - \mathbf{D}\mathbf{p} + \mathbf{b}\mathbf{V} \tag{1.1}$$

с соответствующими начальными условиями.

Определение и анализ стохастической механической системы с односторонней неудерживающей связью и абсолютно упругими ударами о связь представляет основную цель настоящей работы.

Определим [3] вспомогательную систему с $(n+1)$ степенями свободы, свободную от неудерживающей связи. Для этого в (1.1) перейдем к новым переменам по формулам

$$q_0(t)=|Q_0(t)|,\quad \mathbf{q}_1(t)=\mathbf{Q}_1(t),\quad p_0(t)=P_0\operatorname{sgn}Q_0(t),\quad \mathbf{p}_1(t)=\mathbf{P}_1(t) \tag{1.2}$$

Эта формула задает отображение $(\mathbf{Q},\mathbf{P})\to(\mathbf{q},\mathbf{p})$, $q_0\geqslant 0$.

Вспомогательная система описывается следующими СДУ с соответствующими начальными условиями:

$$Q_0^{\cdot}=a_0,\quad \mathbf{Q}_1^{\cdot}=\mathbf{a}_1,\quad P_0^{\cdot}=a_2+\mathbf{b}_0\operatorname{sgn}Q_0\mathbf{V},\quad \mathbf{P}_1^{\cdot}=\mathbf{a}_3+\mathbf{b}_1\mathbf{V} \tag{1.3}$$

$$a_0=\partial H^*/\partial P_0=\omega_0(|Q_0|,\mathbf{Q}_1,t)P_0,\quad \mathbf{a}_1=\partial H^*/\partial\mathbf{P}_1=\boldsymbol{\Omega}_1(|Q_0|,\mathbf{Q}_1,t)\mathbf{P}_1$$

$$a_2=-\partial H^*/\partial Q_0-\mathbf{D}_0(|Q_0|,\mathbf{Q}_1,t)[P_0,\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}}\operatorname{sgn}Q_0]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{a}_3=-\partial H^*/\partial\mathbf{Q}_1-\mathbf{D}_1(|Q_0|,\mathbf{Q}_1,t)[P_0\operatorname{sgn}Q_0,\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{b}_j=\mathbf{b}_j(|Q_0|,\mathbf{Q}_1,P_0\operatorname{sgn}Q_0,\mathbf{P}_1,t)\quad (j=0,1)$$

Здесь $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{b}_0$ – первые строки матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{b}$ соответственно, т.е. $\mathbf{D}=[\mathbf{D}_0,\mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}=[\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, а функция Гамильтона H^* вспомогательной системы определяется так:

$$H^*(\mathbf{Q},\mathbf{P})=H(|Q_0|,\mathbf{Q}_1,P_0,\mathbf{P}_1),\quad \partial H^*/\partial Q_0|_{Q_0=0}=\min\{0,\partial H/\partial Q_0|_{Q_0=+0}\}$$

Коэффициенты сноса и диффузии СДУ (1.3) испытывают, вообще говоря, разрывы первого рода при переходе через гиперплоскость $Q_0=0$. Вопросы построения решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) для одномерной плотности вероятностей вектора состояния в подобных случаях рассматривались в [5].

Решением СДУ (1.3) с соответствующими начальными условиями является марковский процесс $\mathbf{X}(t)\equiv[\mathbf{Q}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Определим движение стохастической механической системы с неудерживающей связью и абсолютно упругими ударами о связь, как случайный процесс $\mathbf{x}(t)=[\mathbf{q}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, получающийся из $\mathbf{X}(t)$ по формулам (1.2). Зная конечномерные распределения вектора $\mathbf{X}$, с использованием формул (1.2) можно найти все конечномерные распределения искомого вектора $\mathbf{x}$, т.е. решить задачу анализа.

Заметим, что подход, связанный с определением диффузионного процесса с граничными экранами при помощи некого вспомогательного процесса (вспомогательной системы), хорошо известен (см., например, [6], с. 270). Однако для задач механики виброударных систем необходим специальный подход, ибо там удар означает мгновенный перескок из одной точки фазового пространства в другую.

2. Исследуем вопрос о том, какому уравнению удовлетворяет одномерная плотность $f_1(\mathbf{x},t)$ искомого процесса $\mathbf{x}(t)$. Для этого введем инволюцию фазового пространства вспомогательной (и исходной) системы при помощи формулы $S\mathbf{X}=[-Q_0,\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}},-P_0,\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ ($S^2=\mathrm{id}$). По известным формулам для плотности функций случайного аргумента [7] можно найти, что одномерная плотность $f_1(\mathbf{x},t)$ случайного процесса с отражениями $\mathbf{x}(t)$ связана с соответствующей плотностью $f_1^*(\mathbf{X},t)$ вспомогательного процесса $\mathbf{X}(t)$ следующим соотношением:

$$f_1(\mathbf{x},t)=f_1^*(\mathbf{x},t)+f_1^*(S\mathbf{x},t)\quad (q_0\geqslant 0) \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что

$$\partial f_1 / \partial q_0|_{q_0=0} = 0, \quad \partial f_1 / \partial p_0|_{p_0=0} = 0$$

Одномерная плотность $f_1^*(\mathbf{X},t)$ вспомогательного процесса удовлетворяет следующему уравнению ФПК (см., например, [8]):

$$\partial f_1^* / \partial t + G f_1^* = 0 \tag{2.2}$$

$$G(\cdot) = \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}}[\mathbf{a}(\mathbf{X})(\cdot)] - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{P}}\sigma'(\mathbf{X})(\cdot)\right]$$

$$\mathbf{a} = [a_0, \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}, a_2, \mathbf{a}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad \sigma' = \mathbf{b}'\nu\mathbf{b}'^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b}' = [\mathbf{b}_0^{\mathrm{T}} \operatorname{sgn} Q_0, \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

Через G_S обозначим оператор, получающийся из G заменой $\mathbf{X}$ на $S\mathbf{X}$.

Лемма 1. $G_S = G$.

Доказательство. Имеем

$$G_S(\cdot) = -\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial Q_0}[a_0(S\mathbf{X})(\cdot)] + \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{Q}_1}[\mathbf{a}_1(S\mathbf{X})(\cdot)] - \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial P_0}[a_2(S\mathbf{X})(\cdot)] + \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{P}_1}[\mathbf{a}_3(S\mathbf{X})(\cdot)] -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial P_0^2}[\nu\mathbf{b}_0^2(S\mathbf{X})(\cdot)] - \frac{\partial}{\partial P_0}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{P}_1}[-\mathbf{b}_1(S\mathbf{X})\nu\mathbf{b}_0(S\mathbf{X})(\cdot)] - \right.$$

$$\left. -\mathrm{tr}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_1}\frac{\partial}{\partial P_0}(-\mathbf{b}_0(S\mathbf{X})\nu\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}(S\mathbf{X})(\cdot))\right] + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_1}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{P}_1}(\mathbf{b}_1(S\mathbf{X})\nu\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}(S\mathbf{X})(\cdot))\right]\right\}$$

Учитывая, что

$$a_0(S\mathbf{X}) = -a_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{a}_1(S\mathbf{X}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{X}), \quad a_2(S\mathbf{X}) = -a_2(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{a}_3(S\mathbf{X}) = \mathbf{a}_3(\mathbf{X}), \quad \mathbf{b}_j(S\mathbf{X}) = \mathbf{b}_j(\mathbf{X}) \quad (j = 0,1)$$

получаем требуемое.

Утверждение. Одномерная плотность $f_1(\mathbf{x}, t)$ искомого процесса $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет уравнению ФПК, составленному для системы, не стесненной неудерживающей связью

$$\partial f_1 / \partial t + G' f_1 = 0, \quad G'(\cdot) = \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{q}}\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\cdot)\right] + \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{p}}\left[\left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{D}\mathbf{p}\right)(\cdot)\right] - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{p}}\sigma(\cdot)\right]$$

$$f_1(\mathbf{x}, t_0) = f_{10}(\mathbf{x}), \quad \sigma = \mathbf{b}\nu\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$$

с соответствующим для системы с отражениями условием нормировки

$$\int_U f_1(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = 1, \quad U = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | q_0 \geqslant 0\}$$

Доказательство. Складывая равенство (2.2) с уравнением

$$\partial f_1^*(S\mathbf{X}, t) / \partial t + G_S f_1^*(S\mathbf{X}, t) = 0$$

получающимся из (2.2) заменой $\mathbf{X}$ на $S\mathbf{X}$, и, учитывая лемму 1, получаем

$$\partial / \partial t[f_1^*(\mathbf{X}, t) + f_1^*(S\mathbf{X}, t)] + G[f_1^*(\mathbf{X}, t) + f_1^*(S\mathbf{X}, t)] = 0$$

Отсюда

$$\partial f_1(\mathbf{X}, t) / \partial t + G f_1(\mathbf{X}, t) = 0$$

Остается заметить, что в области $q_0 \geqslant 0$ при замене $\mathbf{X}$ на $\mathbf{x}$ оператор G совпадает с G'. Утверждение доказано. Оно обобщает известный аналогичный результат ([1], с. 352).

Аналогично доказывается и формула Ито для процесса с отражениями $\mathbf{x}(t)$. А именно, пусть $\xi(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемая функция на U. Тогда процесс $\xi(\mathbf{x}(t))$

имеет стохастический дифференциал

$$d\xi = \left[\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^{\mathrm{T}}\xi}{\partial \mathbf{p}}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{D}\mathbf{p}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial \mathbf{p}^2}\right)\right]dt + \frac{\partial^{\mathrm{T}}\xi}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{b}d\mathbf{W}$$

Его вид совпадает с видом стохастического дифференциала процесса в освобожденной от неудерживающей связи системе.

Пример 1. Рассмотрим вертикальное (вдоль оси q) движение материальной точки в однородном поле тяжести в случайной среде с абсолютно упругими отражениями в точке $q = 0$

$$\dot q = p, \quad \dot p = -\varepsilon p - k + V \quad (q \geqslant 0)$$

Здесь ε, k – безразмерные постоянные, V – стационарный нормальный белый шум интенсивности ν.

Из утверждения следует, что одномерная плотность распределения $f_1(q, p, t)$ удовлетворяет следующему уравнению ФПК с соответствующим начальным условием и условием нормировки:

$$\partial f_1/\partial t + \partial(pf_1)/\partial q - \partial[(\varepsilon p + k)f_1]/\partial p - (\nu/2)\partial^2 f_1/\partial p^2 = 0$$

$$f_1(q,p,t_0) = f_{10}(q,p), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f_1(q,p,t)\,dq\,dp = 1 \tag{2.3}$$

Заметим, что в отсутствие отражающего экрана в точке $q = 0$ уравнение для p отделяется и может быть исследовано отдельно. Однако в соответствующей вспомогательной системе

$$\dot Q = P, \quad \dot P = -\varepsilon P - k\,\mathrm{sgn}\,Q - \mathrm{sgn}\,QV$$

уравнение для P уже не отделяется. Поэтому уравнение ФПК в рассматриваемом примере следует составлять для всего вектора состояния (q, p).

Пример 2. Рассмотрим движение математического маятника между параллельными стенками (фиг. 1) в однородном поле тяжести. Предполагается, что на маятник действуют случайный и диссипативный моменты. Запишем уравнения движения в безразмерных параметрах

$$\dot\varphi = p, \quad \dot p = -\sin\varphi - \varepsilon p + b(\varphi)V(t)$$

Здесь $V(t)$ – стационарный белый шум интенсивности ν, $\varepsilon > 0$ – удельный коэффициент трения. Удары о стенки происходят в точках $\varphi = \pm l$.

Покажем, что и в этом случае (двух односторонних связей) плотность $f_1(\varphi, p, t)$ распределения вероятностей процесса с отражениями будет удовлетворять уравнению ФПК составленного, как если бы неудерживающих связей не было.

Введем функции $\delta(\Phi)$ и $\zeta(\Phi)$ [9]

$$\delta = \begin{cases} \Phi, & \Phi \in [0, l] \\ -\Phi + 2l, & \Phi \in [l, 3l] \\ \Phi - 4l, & \Phi \in [3l, 4l] \end{cases}, \quad \zeta = \begin{cases} 1, & \Phi \in [0, l] \cup [3l, 4l] \\ -1, & \Phi \in (l, 3l) \end{cases}$$

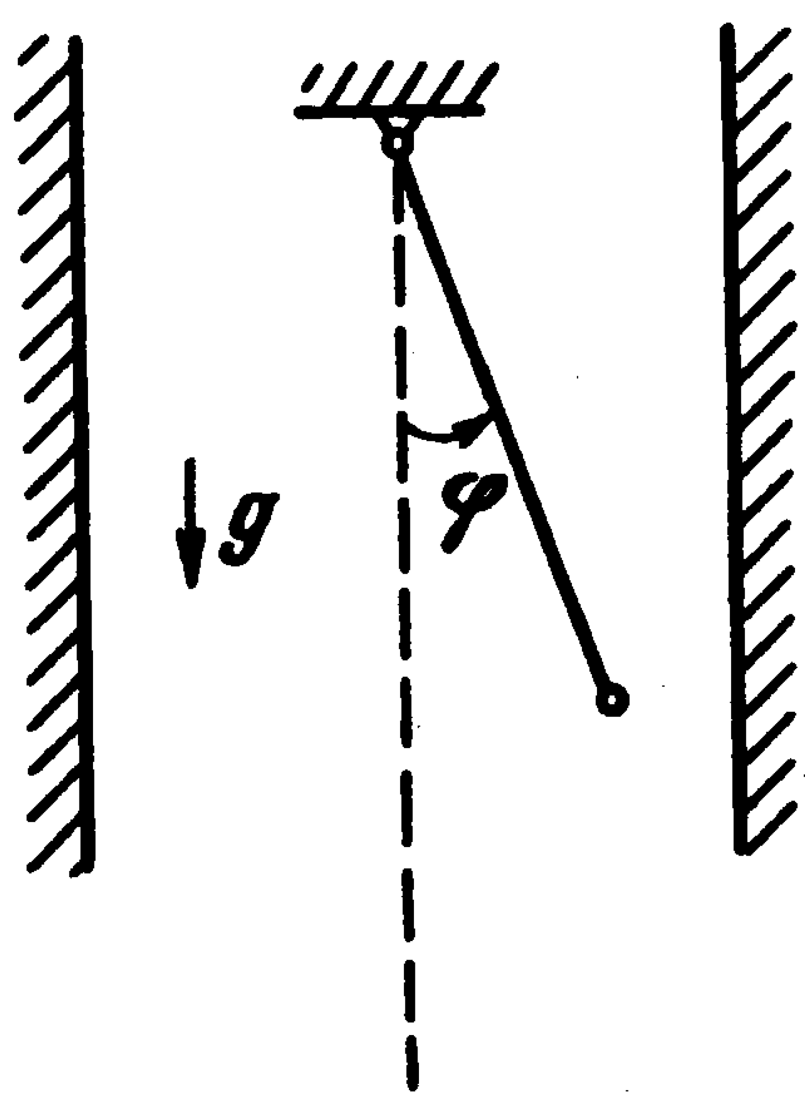
Определим вспомогательную систему на цилиндре с координатами $\Phi \in [0, 4l]$ (Φ измеряется с точностью до кратных $4l$) и $P \in R$, свободную от неудерживающих связей, при помощи замены $\varphi = \delta(\Phi)$, $p = P\zeta(\Phi)$. Она описывается следующей системой СДУ:

$$\dot\Phi = P, \quad \dot P = -\zeta(\Phi)\sin\delta(\Phi) - \varepsilon P + b(\delta(\Phi))\zeta(\Phi)V(t) \tag{2.4}$$

Определим инволюцию фазового пространства $\{\Phi, P\}$ по формуле $S\mathrm{X} = [2l - \Phi, -P]^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{X} = [\Phi, P]^{\mathrm{T}}$. Тогда справедлива формула (2.1) для $\mathrm{x} = [\varphi, p]^{\mathrm{T}}$. Так как вектор сноса уравнений (2.4) при этой инволюции меняет знак, а диффузионный коэффициент $\nu b^2\zeta^2$ – нет, то так же, как и в разд. 1, $G_S = G$ и искомая $f_1(\varphi, p, t)$ удовлетворяет следующему уравнению ФПК:

$$\partial f_1/\partial t + \partial(pf_1)/\partial\varphi + \partial[(-\sin\varphi - \varepsilon p)f_1]/\partial p - (\nu/2)\partial^2 f_1/\partial p^2 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f_1(\varphi,p,t)\,d\varphi\,dp = 1, \quad f_1(\varphi,p,t_0) = f_{10}(\varphi,p)$$



Фиг. 1

Физический смысл утверждения проясняется, если воспользоваться конструктивным подходом к обоснованию механических систем с неудерживающими связями посредством введения вместо неудерживающих связей вспомогательного поля упругих сил большой жесткости [10]. Выпишем уравнения ФПК для движения освобожденной от неудерживающих связей системы в случае, когда присутствует вспомогательное поле и когда его нет. В той области, где происходит движение с отражениями (между "стенок") снос и диффузия одинаковы для обоих случаев. Поэтому и решения уравнений ФПК совпадают с точностью до постоянной. При стремлении жесткости вспомогательного поля к бесконечности вероятность пребывания траектории за стенкой стремится к нулю, и нормировать искомую одномерную плотность для движения с отражениями следует в области возможного движения системы с отражениями. Разумеется, эти рассуждения не претендуют на строгость, однако они проясняют несколько формальный подход разд. 1.

3. Из утверждения следует тесная связь между стационарными режимами (СР) стохастической системы, освобожденной от неудерживающей связи, и СР исходной системы. Из существования СР в освобожденной системе тотчас же следует существование СР и в системе с неудерживающей связью (это и понятно, так как отражающая стенка улучшает возвратные свойства процесса), причем совпадают с точностью до произведения на постоянную и их одномерные плотности. Обратное, вообще говоря, неверно, так как для одномерной плотности СР системы с отражениями может и не выполняться условие нормировки по фазовому пространству освобожденной системы. В примере 1 существует СР (т.е. точное решение уравнения (2.3) при $\partial f_1/\partial t =$ $= 0$) с плотностью

$$f_{st}(q,p)=\frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}k}{\nu\sqrt{\pi\nu}}\exp\left[-\frac{2\varepsilon}{\nu}\left(\frac{p^2}{2}+kq\right)\right]\quad (q\geqslant 0,\ p\in R) \qquad (3.1)$$

Однако в системе без отражающего экрана его нет. В примере 2 ($b\equiv 1$), если обе стенки отсутствуют, то существует СР с плотностью

$$f_{st}(\varphi,p)=c\exp\left[-\frac{2\varepsilon}{\nu}\left(\frac{p^2}{2}-\cos\varphi\right)\right]$$

Он же остается и после наложения двух односторонних связей. Выражение для f_{st} при этом не изменится, только значение c будет иным.

Учитывая связь между существованием СР в исходной и освобожденной системах при нахождении СР в стохастических механических системах с абсолютно упругими отражениями, можно использовать методы нахождения СР, разработанные для стохастических систем без неудерживающих связей (см., например, [11]).

Рассмотрим в качестве примера движение тяжелого строго выпуклого твердого тела в случайной среде не ниже абсолютно гладкой горизонтальной плоскости x, y; z – вертикаль (удары абсолютно упругие). Движение происходит в однородном поле тяжести, g – его ускорение. Далее $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра тяжести относительно неподвижной системы координат. Предполагаем, что на тело со стороны случайной среды действуют детерминированные диссипативные сила и момент (линейные по скоростям), а также случайные сила и момент. В отсутствие неудерживающей связи уравнение движения центра тяжести

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\mathbf{g}-\varepsilon\mathbf{r}^{\cdot}+\mathbf{V}'$$

отделяется от уравнений движения тела относительно центра тяжести

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{\cdot}=-\mathbf{D}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{V},\quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}=0$$

Здесь ε – удельный коэффициент трения, $\mathbf{I}$ – тензор инерции, $\mathbf{D}'$ – некоторая положительная матрица диссипации, а $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}$ – независимые вектора нормально распределенных "белых шумов" с постоянными невырожденными матрицами интенсивности $\boldsymbol{\nu}'$ и $\boldsymbol{\nu}$, причем предполагается для простоты, что $\boldsymbol{\nu}'=\nu_0\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\nu_0 = \mathrm{const}$).

Из результатов [12] и утверждения следует, что если матрица $\mathbf{D}$ представима в виде

$$\mathbf{D}=\boldsymbol{\nu}(\lambda_1\mathbf{E}+\lambda_2\mathbf{I})$$

где λ_1 и λ_2 – вещественные числа, такие, что матрица $\lambda_1\mathbf{I}+\lambda_2\mathbf{I}^2$ положительно определенна, то СР существует и его одномерная плотность определяется формулой

$$f_{st}(\omega, \gamma, \mathbf{r}', z) = c\exp(-\omega^T \mathbf{I}\nu^{-1}\mathbf{D}\omega - \varepsilon r^{-2}/\nu_0 - 2\varepsilon g z/\nu_0)$$

где f_{st} нормируется в области $U = R^3 \times S^2 \times R^3 \times [0, \infty)$, поэтому

$$c = (\varepsilon/2)^{5/2}\pi^{-4}|\mathbf{I}\nu^{-1}\mathbf{D}|^{1/2} g$$

4. Для приближенного анализа стохастических механических систем с односторонней связью можно применять метод ортогональных разложений одномерной плотности распределения в подходящем гильбертовом пространстве [13]. Однако уравнения для коэффициентов разложения (квазимоментов) одномерной плотности в этом случае будут иные, чем в случае, когда система освобождена от односторонней связи. Причина этого состоит в том, что здесь уже $[M\xi(\mathbf{x})]'$ не совпадает с $MG^*\xi$ (M – оператор математического ожидания, G^* – оператор, сопряженный к G).

Проиллюстрируем этот подход на примерах 1 и 2.

Рассмотрим вначале задачу о маятнике между параллельными стенками.

Фазовое пространство системы – это полоса $U = [-l, l] \times R$ с координатами φ, p. В гильбертовом пространстве $L_2(U, \mu)$ функций на U с мерой μ, $d\mu = \mu_0(p)d\varphi dp$, $\mu_0 = (2l)^{-1}(2\pi\gamma)^{-1/2}\exp[-p^2/(2\gamma)]$ (далее $\gamma > 0$ – некоторая постоянная) определим ортобазис как систему всех произведений $\{e_n H_m, e'_n H_m\}$ тригонометрических функций

$$1, e_n, e'_n \ (n = 1, 2, \ldots), \quad e_n = \sqrt{2}(-1)^n \sin\frac{(2n-1)\pi\varphi}{2l}, \quad e'_n = \sqrt{2}(-1)^n \cos\frac{n\pi\varphi}{l} \tag{4.1}$$

и полиномов Эрмита

$$H_0(p) = 1, \quad H_1(p) = \frac{p}{\sqrt{\gamma}}, \ldots, \quad H_m(p) = (-1)^m\sqrt{\frac{\gamma^m}{m!}}\exp\left(\frac{p^2}{2\gamma}\right)\frac{d^m}{dp^m}\exp\left(-\frac{p^2}{2\gamma}\right)$$

Для искомой одномерной плотности $f_1(\varphi, p, t)$ в каждый момент времени имеет представление

$$f_1(\varphi, p, t) = \mu_0 \sum_{m=0}^{\infty} H_m\left[d_m + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}e_n + b_{mn}e'_n)\right] \tag{4.2}$$

где коэффициенты (квазимоменты искомого процесса $[\varphi, p]^T$) таковы:

$$d_m = MH_m(p), \quad a_{mn} = MH_m(p)e_n(\varphi), \quad b_{mn} = MH_m(p)e'_n(\varphi) \tag{4.3}$$

Заметим, что выбор системы (4.1) обусловлен тем, что f_1 в точках $\varphi = l$ и $\varphi = -l$ принимает, вообще говоря, разные значения. Поэтому традиционная тригонометрическая система здесь не годится.

Лемма 2. Для любой гладкой функции $\xi(\varphi, p)$

$$(M\xi)' = M(G^*\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} p[f(l, p, t)\xi(l, p) - f(-l, p, t)\xi(-l, p)]dp \tag{4.4}$$

$$G^* = p\frac{\partial}{\partial\varphi} - (\sin\varphi + \varepsilon p)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}$$

при условии, что все математические ожидания и интегралы в (4.4) существуют.

Доказательство. По определению

$$M\xi(\varphi, p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f_1(\varphi, p, t)\xi(\varphi, p)d\varphi dp$$

С учетом уравнения ФПК для f_1 и формулы интегрирования по частям, имеем

$$(M\xi)' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l}\frac{\partial f_1}{\partial t}\xi d\varphi dp = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l}\left\{-\frac{\partial(f_1 p)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[(\sin\varphi + \varepsilon p)f_1]}{\partial p} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial p^2}\right\}\xi d\varphi dp =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p[f_1(l, p, t)\xi(l, p) - f_1(-l, p, t)\xi(-l, p)]dp + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f_1 G^*\xi d\varphi dp$$

т.е. получаем требуемое равенство (4.4).

Используя лемму 2 и формулы (4.2), (4.3), получаем следующие линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для коэффициентов d_m, a_{mn}, b_{mn} разложения (4.2) (суммирование ведется по k от $k = 1$ до ∞):

$$\dot a_{mn} = -\varepsilon m a_{mn} - \sqrt{\frac{2m}{\gamma}}\frac{\cos l}{l}\left\{1-\left[(2n-1)\frac{\pi}{2l}\right]^2\right\}^{-1} d_{m-1} -$$

$$-\frac{2\sqrt{m\gamma}}{l}\sum\left(\eta_{kn}+\frac{\cos l}{4\gamma}\kappa_{kn}\right)b_{m-1,k} - \frac{2}{l}\sqrt{(m+1)\gamma}\sum\eta_{kn}b_{m+1,k}$$

$$\dot b_{mn} = -\varepsilon m b_{mn} - \frac{2\sqrt{m\gamma}}{l}\sum a_{m-1,k}\left(\eta'_{kn}+\frac{\cos l}{4\gamma}\kappa'_{kn}\right) - \frac{2}{l}\sqrt{(m+1)\gamma}\sum\eta'_{kn}a_{m+1,k}$$

$$\dot d_m = -\varepsilon m d_m - \sum\sqrt{\frac{2m}{\gamma}}\frac{4l\cos l}{[4l^2-\pi^2(2k-1)^2]}a_{m-1,k} + \frac{\sqrt{2(m+1)\gamma}}{l}\sum a_{m+1,k} + \frac{\sqrt{2m\gamma}}{l}\sum a_{m-1,k}$$

$$\eta_{kn} = \left(\frac{2k}{2n-1}\right)^2\left[1-\left(\frac{2k}{2n-1}\right)^2\right]^{-1},\quad \eta'_{kn} = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\left[1-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\kappa_{kn} = \alpha^-(k)+\alpha^-(-k)+\alpha^+(k)+\alpha^+(-k)$$

$$\kappa'_{kn} = \beta^+(-k)+\alpha^-(-k)+\alpha^+(k)+\beta^-(k)$$

$$\alpha^{\pm}(k) = \left[1\pm(2n-1)\frac{\pi}{2l}+\frac{k\pi}{l}\right]^{-1}$$

$$\beta^{\pm}(k) = \left[1\pm(2n+1)\frac{\pi}{2l}+\frac{k\pi}{l}\right]^{-1},\quad \gamma = \frac{\nu}{2\varepsilon}$$

Ограничившись в (4.2) m, n такими, что $0 \leqslant m, n \leqslant N$ (прямоугольный метод суммирования ряда (4.2)), и положив остальные c_{mn} равными нулю, получаем систему линейных дифференциальных уравнений порядка $N(2N + 3)$. Решив ее (например, на ЭВМ), получим приближенное выражение для плотности распределения, а также приближенные значения для квазимоментов в любой момент времени.

Результаты вычислительных экспериментов на ПЭВМ для случая N = 6 приведены на фиг. 2 (представлен вид одномерной плотности СР) и фиг. 3 (приведены зависимости Mp, Dp, $M\sin\varphi$, $M\cos\varphi$ от времени).

Рассмотрим теперь пример 1. Фазовое пространство системы – это полуплоскость $U = [0, \infty)\times R$ с координатами q, p. В гильбертовом пространстве $L_2(U, \mu)$ функций на U с мерой μ, причем

$$d\mu = \mu_1(q)\mu_1(p)dqdp,\quad \mu_1(q) = \exp(-q),\quad \mu_2 = (2\pi\gamma)^{-1/2}\exp[-p^2/(2\gamma)]$$

определим ортобазис как систему всех произведений полиномов Лагерра

$$L_n(q) = (n!)^{-1}e^q\frac{d^n}{dq^n}(q^n e^{-q}) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_n^j j^{-1} q^j,\quad C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}\quad (n = 0,1,\ldots)$$

и полиномов Эрмита $H_m(p)$.

Для искомой одномерной плотности $f_1(q, p, t)$ имеем представление

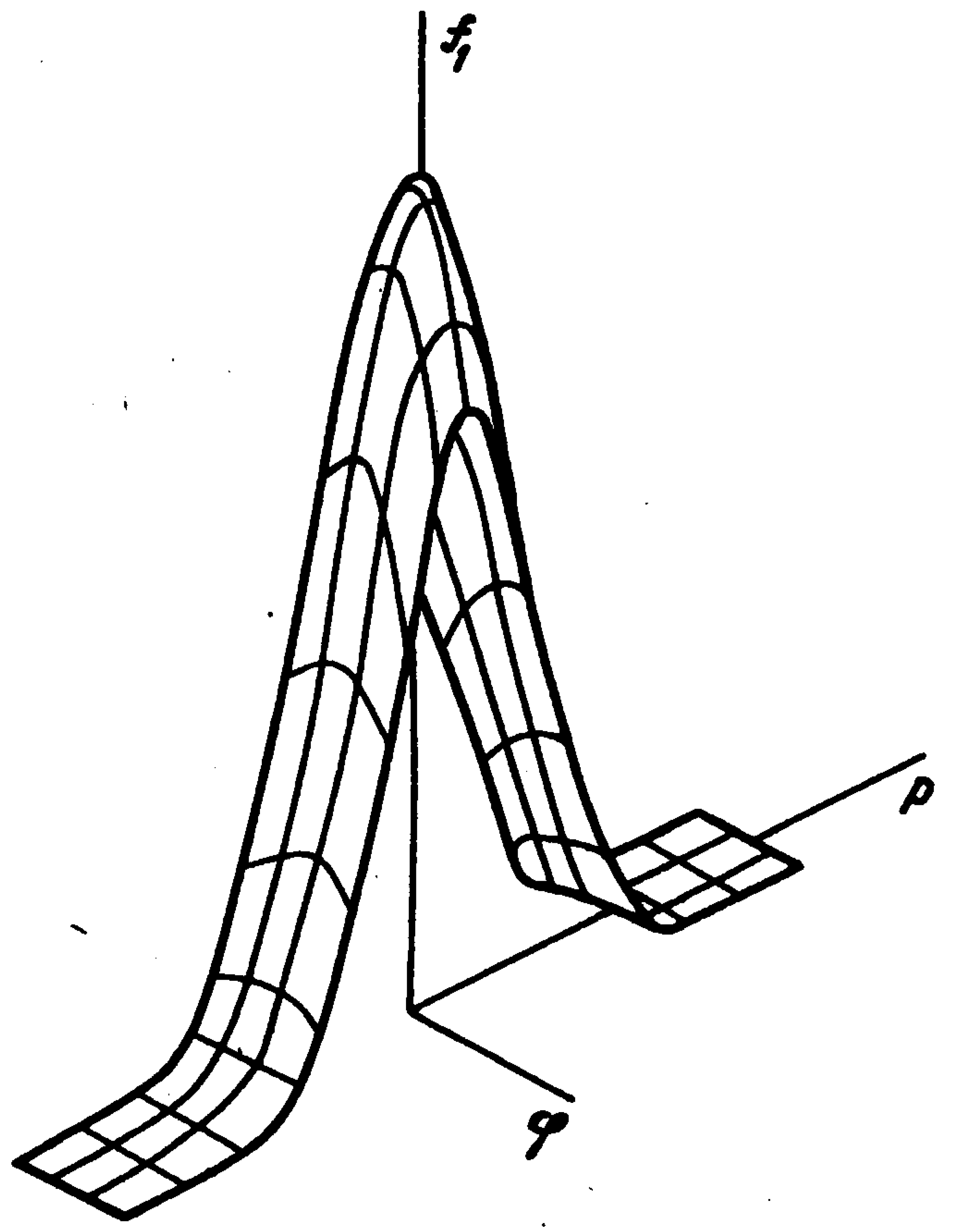
$$f_1(q,p,t) = \mu_1(q)\mu_2(p)\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{mn}H_m(p)L_n(q) \tag{4.5}$$

Можно показать, что для любой гладкой функции $\xi(q, p)$ справедлива лемма 2, где в (4.4) вместо $-l$ и l надо подставить $q = 0$ и $q = \infty$ соответственно. Отсюда, при учете разложения (4.5), можно получить следующие уравнения для коэффициентов разложения c_{mn}:

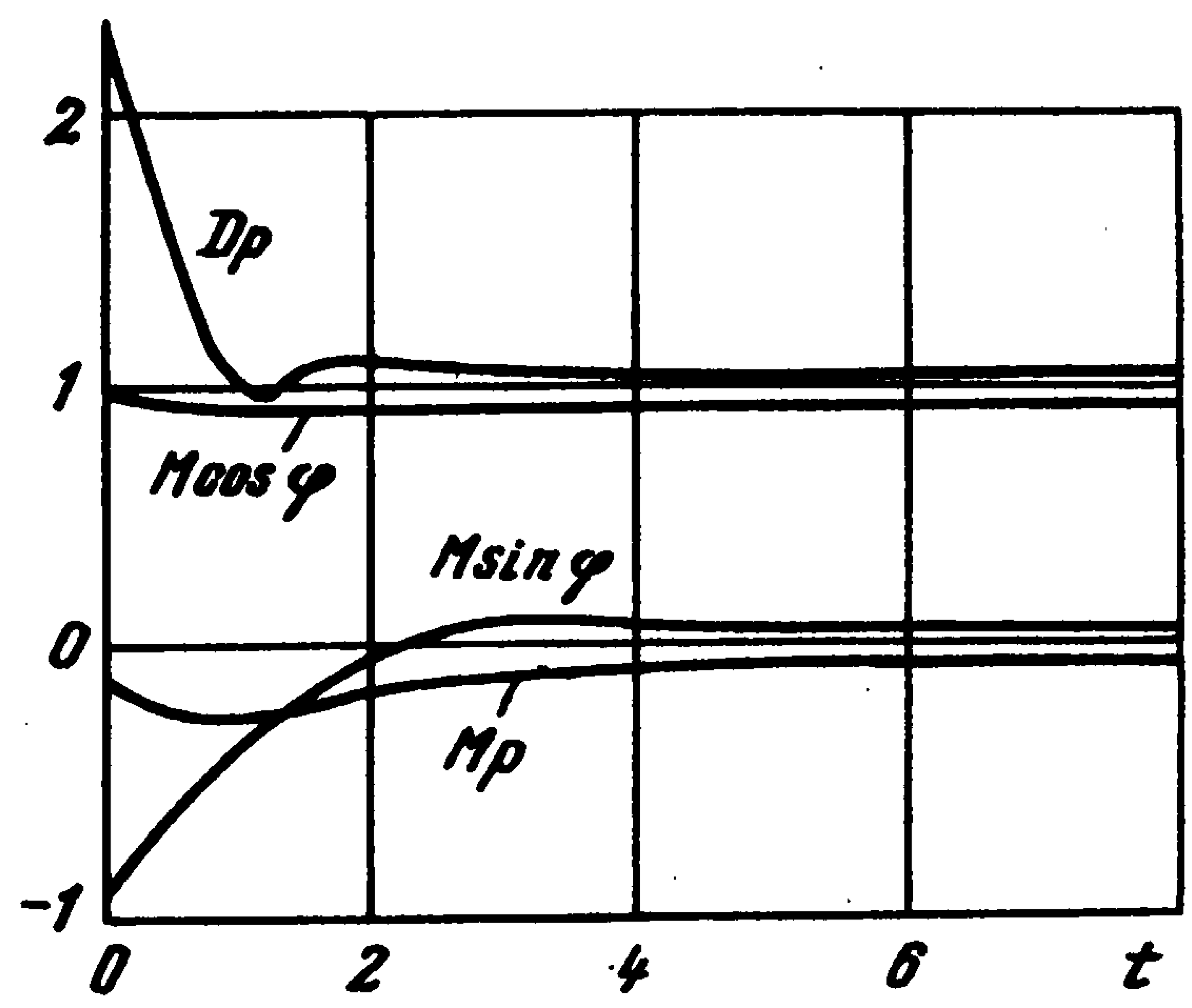
$$\dot c_{mn} = MG^*H_m(p)L_n(q) + \int_{-\infty}^{\infty}pH_m(p)L_n(0)f_1(0,p,t)dp =$$

$$= -\varepsilon m c_{mn} + \sqrt{(m+1)\gamma}\sum_{j=n}^{\infty}c_{m+1,j} + \sqrt{m\gamma}\sum_{j=n}^{\infty}c_{m-1,j} - k\sqrt{\frac{m}{\gamma}}c_{m-1,n} \tag{4.6}$$

При треугольном методе суммирования ряда (4.5), т.е. когда ограничиваемся только такими c_{mn}, у которых $0 \leqslant m + n \leqslant N$, положив остальные равными нулю, из уравнений (4.6) получаем точные выражения



Фиг. 2



Фиг. 3

для коэффициентов разложения стационарной плотности (3.1) (отличными от нуля будут только коэффициенты $c_{0n} = (1 - \gamma/k)^n$). Пользуясь этим же методом суммирования и решая уравнение (4.6), можно получать приближенные выражения для нестационарной плотности распределения вероятностей и приближенные значения для квазимоментов в любой момент времени.

Заметим, что применение метода ортогональных разложений в случае систем с односторонними связями нуждается в дополнительном обосновании ввиду эффекта, отраженного в лемме 2.

Заметим, что метод ортогональных разложений можно применять как по отношению к освобожденной от неудерживающей связи системе (с последующей нормировкой в области возможных движений системы с отражениями), так и к исходной системе с соударениями. Ортобазисы в этих случаях (так же, как и фазовые пространства) будут разные. Например, в задаче о движении математического маятника в случайной среде с двумя ограничителями можно было воспользоваться ортобазисом, представляющим собой комбинацию тригонометрических функций Фурье и полиномов Эрмита и искать $f_1 : S \times R \to R$, не обращая внимание на ограничители (как это сделано в [13]). А затем только, с учетом иного условия нормировки, подправить коэффициент d_0. Вычислительные эксперименты были проведены и для этого подхода и подтвердили результаты, представленные на фиг. 2 и 3.

В заключение заметим, что полученные результаты легко переносятся и на случай, когда вектор случайных сил в (1.1) представим в виде $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\boldsymbol{\pi}(t)$, а $\boldsymbol{\pi}(t)$ – вектор случайных функций, удовлетворяющих уравнению формирующего фильтра [8]

$$\boldsymbol{\pi}^{\cdot} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\pi}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\pi})\mathbf{V}(t)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
2. *Ковалева А.С.* Применение асимптотических методов к некоторым стохастическим задачам динамики виброударных систем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 733–737.
3. *Иванов А.П., Маркеев А.П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632–636.
4. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 428 с.
5. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
6. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1987. 397 с.
7. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. 496 с.

8. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 630 с.
9. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
10. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
11. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О стационарных и приводимых к стационарным режимах в нормальных стохастических дифференциальных системах // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 895–903.
12. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О флуктуациях в случайной среде тела с неподвижной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 1. С. 39–44.
13. *Мощук Н.К.* Приближенный метод анализа стохастических механических систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 907–917.

Москва

Поступила в редакцию
18.IX.1992