УДК 531.01

© 1994 г. В.В. Румянцев

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПУАНКАРЕ – ЧЕТАЕВА

Доказывается, что канонические уравнения Пуанкаре – Четаева представляют собой в довольно общем случае гамильтоновы уравнения в неканонических переменных. Показано, что системы обобщенных уравнений Лагранжа и Гамильтона в избыточных координатах, имеющие меньший порядок по сравнению с уравнениями, содержащими неопределенные множители, а также система уравнений Эйлера – Лагранжа в квазикоординатах представляют собой частные случаи уравнений Пуанкаре – Четаева, теория которых тем самым распространяется на названные системы. Обсуждается вопрос о применении уравнений Пуанкаре – Четаева в неголономной динамике.

Замечательная идея Пуанкаре [1] представлять уравнения движения голономных механических систем с помощью некоторой транзитивной группы Ли бесконечно малых преобразований была развита Четаевым [2–5] на случай нестационарных связей и зависимых переменных, когда группа преобразований интранзитивна. Четаев преобразовал уравнения Пуанкаре к виду канонических уравнений и разработал теорию интегрирования этих уравнений.

Как известно [6–8], одним из важных путей, которыми современная теория гамильтоновых систем обобщает классическую теорию, является использование неканонических координат, уравнения движения в которых оказываются зачастую значительно более простыми по сравнению с громоздкими и неудобными уравнениями в канонических координатах q_i, p_i, например, для движения свободного твердого тела. В этом смысле теория уравнений Пуанкаре – Четаева представляется весьма перспективной для современной теории гамильтоновых систем.

1. Рассмотрим голономную механическую систему с k степенями свободы, положение которой в пространстве для всякого момента времени t определяется значениями переменных $x_1, ..., x_n$ $(n \geqslant k)$, называемых определяющими координатами [5]. Если $n = k$, то x_i будут независимыми лагранжевыми координатами, а если $n > k$ – зависимыми или избыточными координатами системы.

Пусть тем или иным способом произведена параметризация наложенных на систему дифференциальных интегрируемых связей, в результате чего обощенные скорости представляются в виде

$$\dot{x}_i = \xi_i^s(t,x)\eta_s + \xi_i(t,x), \quad \operatorname{rank}(\xi_i^s) = k(i = 1,\dots,n; \; s = 1,\dots,k) \tag{1.1}$$

Здесь и далее всюду по повторяющимся индексам производится суммирование.

Существует замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов [4, 5]

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_s = \xi_i^s \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (s = 1,\dots,k,) \tag{1.2}$$

определяющих нетранзитивно действующие преобразования, переводящие голономную систему из положения (x_i) в момент времени t в действительное бесконечно близкое положение ($x_i + dx_i$) в момент $t + dt$ преобразованиём

$$df = (X_0 f + \eta_s X_s f)dt, \quad f(t,x) \in C^1 \tag{1.3}$$

и в виртуальное бесконечно близкое положение ($x_i + \delta x_i$) преобразованием

$$\delta f = \omega_s X_s f \tag{1.4}$$

В случае $n = k$, когда $\det(\xi_i^s) \neq 0$, преобразования (1.2) действуют транзитивно.

Система линейных операторов (1.2) замкнута в том смысле, что ее коммутатор

$$[X_i, X_j]f = X_i X_j f - X_j X_i f = c_{ij}^s X_s f \quad (i, j, s = 0, 1, \ldots, k) \tag{1.5}$$

где структурные коэффициенты c_{ij}^s удовлетворяют условиям $c_{ij}^s = -c_{ji}^s$, $c_{0j}^0 = 0$ и в общем случае могут быть переменными [5]: $c_{ij}^s = c_{ij}^s\ (t,x)$. Если все $c_{ij}^s = \text{const}$, то система (1.2) является группой Ли действительных перемещений, а операторы виртуальных перемещений X_s ($s = 1, \ldots, k$) – подгруппой Ли группы действительных перемещений.

Параметры η_s и ω_s действительных и виртуальных перемещений, введенные Пуанкаре [1], связаны между собой соотношениями

$$\delta_{\eta_i} = \frac{d\omega_i}{dt} + c_{rs}^i \eta_r \omega_s + c_{0s}^i \omega_s \quad (r, s, i = 1, \ldots, k) \tag{1.6}$$

Отметим, что Пуанкаре рассматривал случай, когда все $c_{0s}^i = 0$.

Параметризацию (1.1) и построение замкнутой системы операторов (1.2) нетрудно выполнить, если голономные связи заданы некоторой вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа [4, 5].

$$\omega_j = a_{ji}(t,x)\delta x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = k+1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Для этого следует выбрать k линейных дифференциальных форм $\omega_s = a_{si}(t,x)\delta x_i$ ($s = 1, \ldots, k$), независимых между собой, а также по отношению к формам (1.7), и полученную систему разрешить относительно δx_i:

$$\delta x_i = \xi_i^s(t,x)\omega_s \quad (i, s = 1, \ldots, n)$$

В результате на виртуальном перемещении, когда выполняются условия (1.7), получаем выражения операторов X_s и соотношение (1.4). Для действительных перемещений, стесненных вполне интегрируемыми уравнениями:

$$\eta_j dt \equiv a_{ji}(t,x)dx_i + a_j(t,x)dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = k+1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

точно так же дополняем (1.8) формами $\eta_s dt \equiv a_{si}(t,x)dx_i$ ($s = 1, \ldots, k$) и dt; в результате получаем выражения операторов (1.2) и соотношение (1.3).

Известный произвол в выборе вспомогательных форм ω_i и $\eta_i dt$ ($i = 1, \ldots, k$) позволяет устанавливать наиболее удобный кинематический смысл параметров и упрощать систему (1.2) до группы Ли, когда структурные коэффициенты c_{ij}^s оказываются постоянными.

С помощью уравнений (1.1) кинетическая энергия системы представляется функцией $T(t, x_1, \ldots, x_n,\ \eta_1, \ldots, \eta_k)$. Предполагая, что на точки системы действуют активные силы, обладающие силовой функцией $U(t, x)$, а также непотенциальные силы с проекциями F_x, F_y, F_z на неподвижные оси декартовой системы координат xyz, введем в рассмотрение функцию $L(t, x, \eta) = T(t, x, \eta) + U(t, x)$ и обобщенные непотенциальные силы

$$Q_i(t, x, \eta) = \sum (F_x X_i x + F_y X_i y + F_z X_i z) \quad (i = i, \ldots, k)$$

где суммирование происходит по всем точкам системы.

Функцию $L(t, x, \eta)$ условимся называть обобщенной функцией Лагранжа в отличие от классической функции Лагранжа $\hat{L}(t, x; \dot{x})$, из которой она получается при замене (1.1).

Четаев [5] вывел уравнения Пуанкаре из принципа Д'Аламбера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = c_{ri}^s \eta_r \frac{\partial L}{\partial \eta_s} + c_{0i}^s \frac{\partial L}{\partial \eta_s} + X_i L + Q_i \quad (r, s, i, \ldots, k) \tag{1.9}$$

к которым в общем случае следует присоединить уравнения (1.1). Совместная система уравнений движения (1.9), (1.1) порядка $k + n$ содержит такое же число неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_k$.

Уравнения (1.9) содержат как частные случаи уравнения, установленные Пуанкаре [1] для случая, когда $n = k$, $Q_i = 0$ и

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad c_{0i}^s = 0 \quad (i, s = 1, \ldots, k)$$

а также уравнения Лагранжа второго рода.

Следует отметить, что и Пуанкаре и Четаев рассматривали случай постоянных структурных коэффициентов $c_{ij}^s = \text{const}$. когда система операторов (1.2) есть группа Ли G. Если к тому же все $Q_i = 0$, $X_\alpha L = 0$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, k$), то функция Лагранжа будет зависеть лишь от параметров η_α, которые можно рассматривать как координаты в алгебре Ли g группы G; в этом случае уравнения Пуанкаре (1.9) будут замкнутой системой дифференциальных уравнений на алгебре g [8, 9].

Четаев [5] отметил, однако, что уравнения Пуанкаре имеют смысл и для случаев, когда c_{ij}^s могут быть переменными: $c_{ij}^s(t, x)$. В этом более широком смысле и будем далее рассматривать уравнения Пуанкаре.

Уравнения (1.9) при условии

$$X_0 = \partial / \partial t, \quad c_{0i}^s = 0, \quad \partial L / \partial t = 0, \quad Q_i \eta_i = 0 \quad (i, s = 1, \ldots, k) \tag{1.10}$$

имеют обобщенный интеграл энергии

$$\eta_i \partial L / \partial \eta_i - L = \text{const}$$

Рассматривая случай отсутствия непотенциальных сил Q_i, Четаев ввел важное понятие циклического перемещения X_i $(i = r+1, \ldots, k)$, удовлетворяющего условиям

$$1^0 [X_\alpha, X_i] = 0, \quad c_{\alpha i}^s = 0 \quad (\alpha, s = 0, 1, \ldots, k); \quad 2^0 \; X_i L = 0 \tag{1.11}$$

При существовании циклических перемещений уравнения (1.9) имеют первые интегралы

$$\partial L / \partial \eta_i = b_i = \text{const} \quad (i = r+1, \ldots, k) \tag{1.12}$$

Из (1.12) параметры $\eta_{r+1}, \ldots, \eta_k$ можно выразить в виде некоторых функций $t, x, \eta_1, \ldots, \eta_r$, $b_{r+1}, \ldots, b_k$ и образовать обобщенную функцию Рауса

$$R(t, x_1, \ldots, x_n, \; \eta_1, \ldots, \eta_r, \; b_{r+1}, \ldots, b_k) = L - \eta_i \partial L / \partial \eta_i \tag{1.13}$$

В силу равенств

$$X_s R = X_s L, \quad X_\alpha R = 0, \quad \partial R / \partial \eta_s = \partial L / \partial \eta_s, \quad \partial R / \partial b_\alpha = -\eta_\alpha \quad (s = 1, \ldots, r; \; \alpha = r+1, \ldots, k)$$

уравнения (1.9) для нециклических перемещений принимают вид обобщенных уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \eta_i} = c_{\alpha i}^s \eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_s} + c_{\alpha i}^j \eta_\alpha b_j + c_{0i}^s \frac{\partial R}{\partial \eta_s} + c_{0i}^j b_j + X_i R \quad (i, \alpha, s = 1, \ldots, r; \;\; j = r+1, \ldots, k) \tag{1.14}$$

после интегрирования которых значения η_α определяются соотношениями

$$\eta_\alpha = -\partial R / \partial b_\alpha \quad (\alpha = r+1, \ldots, k) \tag{1.15}$$

Первые элементарные интегралы вида (1.12) даны Чаплыгиным [10] (см. также [11]).

Четаев преобразовал уравнения Пуанкаре к каноническому виду введением вместо переменных η_i новых переменных

$$y_i = \partial L / \partial \eta_i \quad (i = 1,\dots,k) \tag{1.16}$$

и построением обобщенной функции Гамильтона

$$H(t, x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_k) = y_i \eta_i - L \tag{1.17}$$

Нетрудно установить равенства

$$X_i H = -X_i L, \quad \eta_i = \partial H / \partial y_i \quad (i = 1,\dots,k)$$

с помощью которых и (1.16) уравнения Пуанкаре (1.9) приводятся к каноническим уравнениям Пуанкаре – Четаева

$$\frac{dy_i}{dt} = c_{ri}^s \frac{\partial H}{\partial y_r} y_s + c_{0i}^s y_s - X_i H + Q_i, \quad \eta_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i, r, s = 1,\dots,k) \tag{1.18}$$

Второй группе канонических уравнений (1.18) можно придать другой вид

$$\frac{dx_j}{dt} = X_0 x_j + \frac{\partial H}{\partial y_r} X_r x_j \quad (j = 1,\dots,n;\quad r = 1,\dots,k) \tag{1.19}$$

Совместная система дифференциальных уравнений движения (1.18), (1.19) имеет порядок $k + n$ с таким же числом неизвестных $y_1,\dots,y_k,\ x_1,\dots,x_n$.

В случае, когда величины c_{ri}^s, c_{0i}^s, Q_i и H не зависят от координат x_i, система дифференциальных уравнений (1.18) будет замкнутой.

Уравнения (1.18) содержат в себе как частный случай канонические уравнения Гамильтона, когда переменные x_j ($j = 1, \dots, k = n$) независимы, а группа (1.2) сводится к перестановочным преобразованиям, причем за параметры действительных перемещений приняты лагранжевы обобщенные скорости $\eta_j = \dot{x}_j$, так что переменные x_j, $y_j = \partial \hat{L} / \partial \dot{x}_j$ будут каноническими координатами.

Для канонических уравнений Пуанкаре – Четаева справедлива обобщенная [2–5] теорема Якоби: если известен полный интеграл

$$V(t, x_1,\dots,x_n,\ a_1,\dots,a_n) + a_{n+1}, \quad \|\partial^2 V / \partial x_i \partial a_j\| \neq 0, \quad a_j = \text{const} \tag{1.20}$$

уравнения в частных производных первого порядка

$$X_0 V + H(t, x_1,\dots,x_n,\ X_1 V,\dots,X_k V) = 0 \tag{1.21}$$

то решение уравнений (1.18), (1.19) определяется совокупностью их интегралов

$$\partial V / \partial a_j = b_j = \text{const}, \quad y_\alpha = X_\alpha V \quad (j = 1,\dots,n;\ \alpha = 1,\dots,k) \tag{1.22}$$

На первый взгляд кажется, что из первой группы интегралов (1.22) получим общее решение системы уравнений (1.18), (1.19), зависящее от $2n$ произвольных постоянных a_j, b_j, тогда как порядок этой системы равен $k + n$. В действительности же общее решение системы будет зависеть лишь от $k + n$ постоянных. В самом деле, так как связи, наложенные на систему, выражаются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа (1.8), то ее можно привести к виду $d\Phi_j = 0$ $(j = k+1,\dots,n)$. Согласно (1.3) из последних равенств будем иметь соотношения

$$X_\alpha \Phi_j = 0 \quad (\alpha = 0,1,\dots,k;\ j = k+1,\dots,n)$$

благодаря которым к полному интегралу (1.20) уравнения (1.21) можно добавить члены $c_j \Phi_j$ с произвольными $c_j = \text{const}$. Следовательно, из n существенных постоянных a_i, ни одна из которых не является аддитивной, $n - k$ постоянных будут именно коэффициентами $c_{k+1},\dots,c_n$, поэтому полный интеграл (1.20) имеет следующую структуру:

$$V = W(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k) + a_j \Phi_j + a_{n+1}, \quad \frac{\partial(X_1 W, \dots, X_k W)}{\partial(a_1, \dots, a_k)} \neq 0 \tag{1.23}$$

Из (1.23) следует, что интегралы (1.22) запишутся в виде

$$\frac{\partial V}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} = b_\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial a_j} = \Phi_j = b_j, \quad y_\alpha = X_\alpha V = X_\alpha W \quad (\alpha = 1, \dots, k; \; j = k+1, \dots, n) \tag{1.24}$$

Вторая группа интегралов (1.24) относится к определению постоянных b_j голономных связей, при добавлении которых к первой группе интегралов (1.24) решение полностью определяется: $x_i = x_i(t, a_1, \dots, a_k, \; b_1, \dots, b_k, \; b_{k+1}, \dots, b_n)$, а третья группа (1.24) определяет переменные y_α $(\alpha = 1, \dots, k)$.

2. Покажем, что канонические уравнения Пуанкаре – Четаева представляют собой в довольно общем случае гамильтоновы уравнения в неканонических переменных. Уравнения такого типа, имеющие в ряде случаев преимущества по сравнению с гамильтоновыми уравнениями в канонических координатах, изучаются в современной теории гамильтоновых систем [6–8].

Будем здесь предполагать, что в уравнениях (1.18) $Q_i = 0$, а в уравнениях (1.1) $\xi_i(t, x) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда $X_0 = \partial / \partial t$, $c^s_{\alpha 0} = 0$ $(\alpha, s = 1, \dots, k)$.

Рассматривая какие-либо две гладкие функции $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, x, y)$, определим обобщенную скобку Пуассона равенством

$$(f, \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha} X_\alpha f - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} X_\alpha \varphi + c^s_{\alpha i} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha} y_s \quad (i, \alpha, s = 1, \dots, k) \tag{2.1}$$

В частном случае канонических переменных x_i, $y_i = \partial \hat{L} / \partial \dot{x}_i$ $(i = 1, \dots, k = n)$ когда система (1.2) сводится к перестановочным преобразованиям, выражение (2.1) принимает вид классических скобок Пуассона

$$(f, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, k) \tag{2.2}$$

чем и обусловлен выбор знака выражения (2.1); Четаев [2–4] определил обобщенные скобки Пуассона с противоположным знаком в правой части (2.1). Канонические уравнения Гамильтона с помощью (2.2) записываются, как известно, в виде

$$\dot{x}_i = (x_i, H), \quad \dot{y}_i = (y_i, H) \Leftrightarrow \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, k) \tag{2.3}$$

где $H(t, x_i, y_i)$ – классическая функция Гамильтона.

Видно, что обобщенные скобки Пуассона обладают свойствами классических скобок Пуассона, а именно они

1) кососимметричны: $(f, \varphi) = -(\varphi, f)$,

2) билинейны: $(f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2)$ $(\lambda_i \in R)$,

3) удовлетворяют тождеству Якоби $((f, \varphi), \psi) + ((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) \equiv 0$,

4) удовлетворяют правилу Лейбница $(f_1 f_2, \varphi) = f_1 (f_2, \varphi) + f_2 (f_1, \varphi)$.

Предположим, что $f(t, x, y)$ = const представляет собой первый интеграл канонических уравнений (1.18), (1.19). Тогда, используя определение (2.1) будем иметь тождество

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha f + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \left(c^s_{i\alpha} \frac{\partial H}{\partial y_i} y_s - X_\alpha H \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) \equiv 0 \tag{2.4}$$

Справедливо обобщение теоремы Пуассона [2–4]: если $\varphi(t, x, y) = a$ и $\psi(t, x, y) = b$ – два первых интеграла уравнений (1.18), (1.19), то $(\varphi, \psi) = c$ будет третьим первым интегралом этих уравнений.

Докажем теперь, что канонические уравнения Пуанкаре – Четаева (1.18), (1.19) можно представить в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = (y_i, H), \quad \frac{dx_j}{dt} = (x_j, H) \quad (i = 1,\dots,k; \; j = 1,\dots,n) \tag{2.5}$$

где $H(t, x, y)$ – обобщенная функция Гамильтона (1.17).

В самом деле согласно определению (2.1)

$$(y_i, H) = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha y_i - \frac{\partial y_i}{\partial y_\alpha} X_\alpha H + c^s_{\alpha j} \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} y_s = -X_i H + c^s_{\alpha i} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} y_s$$

$$(x_j, H) = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha x_j - \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} X_\alpha H + c^s_{\alpha i} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} y_s = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha x_j \tag{2.6}$$

так как $X_\alpha y_i = 0$, $\partial y_i / \partial y_\alpha = \delta_{i\alpha}$, $\partial x_j / \partial y_\alpha = 0$ в силу независимости переменных x_j от y_i ($i, \alpha = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$) и наоборот, а также независимости переменных y_i; $\delta_{i\alpha}$ – символ Кронекера.

Сравнивая правые части уравнений (1.18), (1.19) с выражениями (2.6), убеждаемся в справедливости уравнений (2.5). Они означают, что канонические уравнения Пуанкаре – Четаева являются гамильтоновыми уравнениями в неканонических переменных, для которых, следовательно, применимы результаты работ [2–5].

Пример 2.1. Выведем уравнения движения Пуанкаре – Четаева для тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, для которого кинетическая и потенциальная энергии имеют вид $T = \frac{1}{2} A_i \omega_i^2$ и $V = Mg x_i^0 \gamma_i$, где ω_i – проекция угловой скорости, γ_i – косинусы углов между вертикалью и главными осями инерции, x_i^0 – координаты центра масс.

За определяющие координаты x_i и параметры действительных перемещений η_i примем γ_i и ω_i соответственно ($i = 1, 2, 3$), причем γ_i удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$d\gamma_1 / dt = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3 \quad (1\ 2\ 3)$$

Рассмотрим гладкую функцию $f(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, производная которой

$$\frac{df}{dt} = \omega_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_2} \gamma_3 - \frac{\partial f}{\partial \gamma_3} \gamma_2 \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_3} \gamma_1 - \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} \gamma_3 \right) + \omega_3 \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_1} \gamma_2 - \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} \gamma_1 \right)$$

Отсюда получаем выражения операторов (1.2)

$$X_1 f = \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_3} \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.7}$$

коммутатор которых

$$[X_1, X_2] = X_3 f \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.8}$$

Следовательно, отличные от нуля структурные постоянные суть $c^3_{12} = c^1_{23} = c^2_{31} = 1$, $c^3_{21} = c^1_{32} = c^2_{13} = -1$. Уравнения Пуанкаре (1.9) принимают вид уравнений Эйлера

$$A_1 d\omega_1 / dt = (A_2 - A_3)\omega_2 \omega_3 + Mg(x_3^0 \gamma_2 - x_2^0 \gamma_3) \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.9}$$

к которым надо добавить уравнения Пуассона.

Введем вместо ω_i переменные $y_i = \partial T / \partial \omega_i$ и рассмотрим функцию $H = y_i^2 / (2A_i) + Mg\, x_i^0 \gamma_i$. Уравнения Пуанкаре – Четаева (1.18), (1.19) принимают вид гамильтоновых уравнений

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{A_2-A_3}{A_2A_3}y_2y_3+Mg(x_3^0\gamma_2-x_2^0\gamma_3),\quad \frac{d\gamma_1}{dt}=\gamma_2\frac{y_3}{A_3}-\gamma_3\frac{y_2}{A_2}\quad (1\ 2\ 3) \tag{2.10}$$

если принять во внимание, что их правые части представляются скобками Пуассона

$$(y_1,H)=-X_1H+c_{\alpha 1}^s\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}y_s,\quad (\gamma_1,H)=\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}X_\alpha\gamma_1\quad (1\ 2\ 3) \tag{2.11}$$

Отметим, между прочим, что представление скобок Пуассона в виде (2.1) для функций F, H переменных y_i, γ_i имеет более компактный вид по сравнению с ее представлением в виде суммы векторно-скалярных произведений [12] трех векторов

$$-y\cdot(\nabla_y F\times\nabla_y H)-\gamma\cdot(\nabla_y F\times\nabla_\gamma H+\nabla_\gamma F\times\nabla_y H)$$

где символы ∇_y, ∇_γ означают градиенты по y и γ, а F последовательно полагается равной проекциям y_i и γ_i соответственно.

3. Выведем обобщенные уравнения Лагранжа и Гамильтона в зависимых координатах.

Пусть связи заданы дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_j=b_{j\alpha}(t,x)\dot{x}_\alpha+b_j(t,x) \tag{3.1}$$

представляющими вполне интегрируемую систему Пфаффа. Здесь и всюду далее в этом разд. $\alpha, i=1,\ldots,k$; $j=k+1,\ldots,n$.

Виртуальные перемещения определяются уравнениями

$$\delta x_j=b_{j\alpha}\delta x_\alpha \tag{3.2}$$

За параметры действительных и виртуальных перемещений примем [5] $\eta_\alpha=\dot{x}_\alpha$ и $\omega_\alpha=\delta x_\alpha$ соответственно. С помощью (3.1) находим выражения операторов группы (1.2)

$$X_0 f=\frac{\partial f}{\partial t}+b_j\frac{\partial f}{\partial x_j},\quad X_\alpha f=\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}+b_{j\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{3.3}$$

коммутатор которой равен нулю вследствие интегрируемости уравнений (3.1), (3.2). Следовательно, все структурные постоянные группы (3.3) $c_{\kappa\beta}^s=0$ $(\kappa,\beta,s=0,1,\ldots,k)$, т.е. операторы (3.3) представляют абелеву группу. Уравнения Пуанкаре (1.9) в данном случае принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\eta_\alpha}-X_\alpha L=Q_\alpha$$

или при учете (3.3)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}-b_{j\alpha}\frac{\partial L}{\partial x_j}=Q_\alpha\quad (L=L(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_k)) \tag{3.4}$$

Уравнения (3.4) и (3.1) образуют совместную систему дифференциальных уравнений порядка $n+k$ с таким же числом неизвестных $x_1,\ldots,x_n$, $\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_k$.

Уравнения (3.4) – обобщенные уравнения Лагранжа в зависимых (избыточных) координатах, не содержащие реакций связей. Эти уравнения имеют преимущество перед уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями λ_j

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial\hat{L}}{\partial x_i}=Q_i-b_{ji}\lambda_j,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}_j}-\frac{\partial\hat{L}}{\partial x_j}=Q_j+\lambda_j\quad \hat{L}=\hat{L}(t,x_1,\ldots,x_n,\ \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \tag{3.5}$$

порядок которых равен $2n > n + k$ и которые следует рассматривать вместе с уравнениями (3.1) порядка k. Правда, уравнения (3.5) и (3.1) позволяют определять не только $x_1, ..., x_n$, но и $\lambda_j (j = k + 1, ..., n)$, а вместе с ними и реакции связей (3.1), однако при большом числе n их исследование затруднительно.

Можно показать, однако, что исключение λ_j из уравнений (3.5) и использование (3.1) приведет к уравнениям (3.4), на чем не будем останавливаться.

Если вместо параметров $\eta_\alpha = \dot{x}_\alpha$ ввести переменные $y_\alpha = \partial L / \partial \dot{x}_\alpha$ и образовать функцию $H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = y_\alpha \dot{x}_\alpha - L$ (суммирование по повторяющемуся индексу α от 1 до k), то уравнения (3.4) преобразуются в канонические уравнения Пуанкаре – Четаева вида (1.18)

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} - b_{j\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_j} + Q_\alpha, \quad \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \tag{3.6}$$

представляющие собой обобщенные уравнения Гамильтона в зависимых координатах. К уравнениям (3.6) следует присоединить уравнения (3.1), переписанные в виде

$$\frac{dx_j}{dt} = b_{j\alpha} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} + b_j \tag{3.7}$$

в результате чего получаем совместную систему дифференциальных уравнений порядка $n + k$ с таким же числом неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_k$.

Таким образом, обобщенные уравнения Лагранжа и Гамильтона в избыточных координатах являются частными случаями уравнений Пуанкаре – Четаева.

Интересно сравнить с обобщенной теоремой Якоби теорему Суслова ([13], гл. XLIII). Суслов рассматривал уравнения Гамильтона с множителями, союзные уравнениям (3.5), и вместо (1.21) получил уравнение в частных производных ([13], формула (43.25)) вида

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} + H\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{3.8}$$

где $f_j(t, x) = c_j$ проинтегрированные уравнения связей (3.1), $\Lambda_j = -\int \lambda_j dt$ – импульсивные множители, и доказал, что если известен полный интеграл уравнения (3.8), то уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial a_s} = b_s, \quad \frac{\partial V}{\partial x_s} = p_s + \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \quad (s = 1, \ldots, n)$$

представляют собой интегралы уравнений Гамильтона, союзных уравнениям (3.5). Предлагая исключить импульсивные множители с помощью продифференцированных уравнений связей, Суслов в результате пришел к уравнению вида (1.21) с учетом (3.3) и интегралам (1.22), подобно тому, как исключение λ_j из уравнений (3.5) приводит к уравнениям (3.4).

Пример 3.1. Рассмотрим пример 134 Суслова в его обозначениях [13]: в вертикальной плоскости yz движутся две весомые частицы масс m_1 и m_2 с координатами y_1, z_1 и y_2, z_2, подчиненные связям

$$m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 = 0, \quad (y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + (z_1 - z_2)(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \qquad (M = m_1 + m_2)$$

Положение системы определяется координатами y_c, z_c центра масс, а также величинами $\eta = y_1 - y_2$ и $\varphi = \operatorname{arctg}[(z_1 - z_2)/(y_1 - y_2)]$, в которых проинтегрированные уравнения связей принимают вид

$$y_c = c_1 = \text{const}, \quad \eta \sec\varphi = c_2 = \text{const}$$

Если принять за параметры действительных перемещений величины $\dot{z}_c$ и $\dot{\varphi}$, то операторами (1.2) будут

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial z_c}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta \operatorname{tg} \varphi)$$

и уравнением вида (1.21) будет уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{M}\left(\frac{\partial V}{\partial z_c}\right)^2 + \frac{M}{m_1 m_2} \frac{\cos^2 \varphi}{\eta^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \eta \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2\right] + Mg z_c = 0$$

совпадающее с уравнением вида (3.8) после исключения из него импульсных множителей связей ([13], с. 471).

4. Рассмотрим уравнения движения голономных систем в квазикоординатах, привлекавшие внимание исследователей на протяжении многих лет (например, [14–17]). Покажем, что такие уравнения представляют собой частный случай уравнений Пуанкаре – Четаева.

Пусть x_i и $\dot{x}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ – независимые лагранжевы координаты и скорости голономной системы, $t = x_0$ – время, $\dot{x}_0 = 1$. Примем за параметры действительных перемещений квазискорости η_s, связанные с $\dot{x}_i$ неинтегрируемыми уравнениями

$$\eta_s = a_{si}(x)\dot{x}_i \quad (s, i = 0, 1, \ldots, k), \quad \det(a_{si}) \neq 0 \tag{4.1}$$

Тогда [16]

$$\dot{x}_i = b_{is}(x)\eta_s \tag{4.2}$$

причем $\eta_0 = 1$, $a_{0i} = b_{0i} = \delta_{0i}$, $b_{i0} = -b_{is}a_{s0}$, $a_{si}b_{ir} = a_{is}b_{ri} = \delta_{sr}$ $(i, r, s = 0, 1, \ldots, k)$.

Введем в рассмотрение дифференциалы квазикоординат

$$d\pi_s = \eta_s dt = a_{si} dx_i \quad (i, s = 0, 1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

через которые дифференциалы координат x_i выражаются в виде

$$dx_i = b_{is} d\pi_s \quad (d\pi_0 = dt) \tag{4.4}$$

Примем условные обозначения для производных по квазикоординатам от функции $f(x) \in C^1$

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_s} = b_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_r}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_r} = a_{sr} \frac{\partial f}{\partial \pi_s} \quad (r, s = 0, 1, \ldots, k) \tag{4.5}$$

при учете которых и параметризации (4.2) строим операторы

$$X_s f = \frac{\partial f}{\partial \pi_s} = b_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_r} \quad (r, s = 0, 1, \ldots, k) \tag{4.6}$$

с коммутатором

$$[X_i, X_j]f = \frac{\partial^2 f}{\partial \pi_i \partial \pi_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial \pi_j \partial \pi_i} = c_{ij}^s \frac{\partial f}{\partial \pi_s} \quad (i, j, s = 0, 1, \ldots, k) \tag{4.7}$$

где структурные коэффициенты

$$c_{ij}^s = a_{sr}\left(\frac{\partial b_{rj}}{\partial x_\alpha} b_{\alpha i} - \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_\alpha} b_{\alpha j}\right) = \left(\frac{\partial a_{sr}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_{s\alpha}}{\partial x_r}\right) b_{ri} b_{\alpha j} \tag{4.8}$$

$(\alpha, i, j, r, s = 0, 1, \ldots, k)$

Очевидно, инфинитезимальные операторы (4.6) образуют замкнутую систему. Следовательно, уравнения Пуанкаре и в квазикоординатах сохраняют свой вид (1.9) при учете (4.6), (4.8), а именно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = c^s_{\alpha i}\eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_s} + c^s_{0i}\frac{\partial L}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L}{\partial \pi_i} + Q_i \quad (\alpha, i, s = 1,\dots,k) \tag{4.9}$$

К уравнениям (4.9) должны быть присоединены кинематические соотношения (4.2); имеем систему $2k$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка каждое относительно такого же числа неизвестных $\eta_1,\dots,\eta_k$, $x_1,\dots,x_k$.

Учитывая что трехиндексные символы Больцмана

$$\gamma^s_{ij} = c^s_{ji}, \quad \gamma^s_{0j} = \varepsilon^s_j = c^s_{j0} \quad (i, j, s = 1,\dots,k)$$

заключаем, что уравнения Эйлера – Лагранжа (8.1.5) [16] в квазикоординатах совпадают при $P_i = Q_i$ с уравнениями (4.9) при учете (4.6). Таким образом, уравнения Эйлера – Лагранжа представляют собой частный случай уравнений Пуанкаре, когда за параметры η_s действительных перемещений приняты квазискорости (4.1).

При переходе от переменных η_i к переменным $y_i = \partial L / \partial \eta_i$ $(i = 1,\dots,k)$ уравнения движения (4.9) принимают вид уравнений Пуанкаре – Четаева (1.18), т.е.

$$\frac{dy_i}{dt} = c^s_{\alpha i}\frac{\partial H}{\delta y_\alpha} y_s + c^s_{0i} y_s - \frac{\partial H}{\partial \pi_i} + Q_i, \qquad \eta_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (\alpha, i, s = 1,\dots,k) \tag{4.10}$$

представляющий собой канонический вид уравнений Эйлера – Лагранжа. К уравнениям (4.10) следует присоединить уравнения (4.2), переписанные в виде

$$\dot x_i = b_{is}\partial H / \partial y_s \quad (i, s = 0, 1,\dots,k) \tag{4.11}$$

Таким образом, получаем систему $2k$ дифференциальных уравнений с $2k$ неизвестными $y_1,\dots,y_k$, $x_1,\dots,x_k$ (уравнение (4.11) для $i = 0$ сводится к тождеству 1 = 1, так как $\dot x_0 = b_{00} = \eta_0 = \partial H / \partial y_0 = 1$).

Очевидно, теория уравнений Пуанкаре – Четаева применима и к уравнениям Эйлера – Лагранжа в квазикоординатах.

Пример 4.1. Для тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой (пример 2.1) за лагранжевы координаты x_i и квазискорости η_i примем углы Эйлера $x_1 = \theta$, $x_2 = \psi$, $x_3 = \varphi$ и проекции $\omega_i (i = 1,2,3)$ угловой скорости на главные оси инерции, так что кинетическая и потенциальная энергии примут вид

$$T = \tfrac{1}{2} A_i \omega_i^2, \quad V = Mg(x_1^0 \sin\theta \sin\varphi + x_2^0 \sin\theta\cos\varphi + x_3\cos\theta)$$

Согласно соотношениям вида (4.2)

$$\dot\theta = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi, \quad \dot\psi = (\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)/(\sin\theta), \quad \dot\varphi = \omega_3 - \mathrm{ctg}\,\theta(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi) \tag{4.12}$$

строим операторы транзитивной группы Ли

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial \pi_1} = b_{r1}\frac{\partial f}{\partial x_r} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \psi} - \mathrm{ctg}\,\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial \pi_2} = b_{r2}\frac{\partial f}{\partial x_r} = -\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \psi} - \mathrm{ctg}\,\theta\cos\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ X_3 f &= \frac{\partial f}{\partial \pi_3} = b_{r3}\frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{4.13}$$

с коммутатором (2.8). Отличные от нуля структурные постоянные суть $c^3_{12} = c^1_{23} = c^2_{31} = 1$, $c^3_{21} = c^1_{32} = c^2_{13} = -1$, как и в примере 2.1.

Уравнения Пуанкаре имеют вид (2.9), в правых частях которых вместо γ_i следует подставить

$$\gamma_i = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = -\sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta \tag{4.14}$$

К уравнениям (2.9) надо добавить уравнения (4.12).

Канонические уравнения Пуанкаре – Четаева имеют вид первой группы уравнений (2.10) при учете (4.13) и уравнений (4.12) с заменой в последних ω_i на y_i / A_i $(i = 1, 2, 3)$, причем эти уравнения принимают вид гамильтоновых уравнений

$$\dot\theta = (\theta, H) = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha\theta, \quad \dot\psi = (\psi, H) = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha\psi, \quad \dot\varphi = (\varphi, H) = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha\varphi, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$H = y_\alpha^2 / (2A_\alpha) + Mg(x_1^0 \sin\theta\sin\varphi + x_2^0 \sin\theta\cos\varphi + x_3^0 \cos\theta)$$

5. В заключение рассмотрим кратко вопрос о применении уравнений Пуанкаре – Четаева в неголономной динамике. Ранее этот вопрос рассматривался [9, 18, 19], однако результаты разд. 4 позволяют по-новому подойти к этой задаче.

Уравнения Эйлера – Лагранжа в квазикоординатах объединяют в одной форме уравнения движения как голономных, так и неголономных систем [14–17]. Следовательно, этим качеством обладают и уравнения Пуанкаре – Четаева. В самом деле, сохраняя обозначения разд. 4, предположим, что рассматриваемая система стеснена неинтегрируемыми связями вида

$$\eta_s \equiv a_{sr}\dot x_r = 0, \quad a_{sr} = a_{sr}(x_j), \quad \mathrm{rank}(a_{sr}) = k - m \quad (r, j = 0,1,\ldots,k; \quad s = m+1,\ldots,k) \tag{5.1}$$

Дополним уравнения (1) произвольными линейными формами

$$\eta_i = a_{ir}x_r, \quad a_{ir} = a_{ir}(x_j) \quad (i = 1,\ldots,m) \tag{5.2}$$

но такими, чтобы $\det(a_{sr}) \neq 0$ $(r, s = 0,1,\ldots,k)$; в частности, величины η_i $(i = 1,\ldots,m)$ могут быть обобщенными скоростями $\dot x_i$. Добавляя $\eta_0 = 1$ к соотношениям (5.1), (5.2) и разрешая их относительно $\dot x_r$ $(r = 0,1,\ldots,k)$, получим равенства (4.2).

Виртуальные изменения квазикоординат $\pi_r = \eta_r dt$ будут определяться равенствами $\delta\pi_r = \omega_r = a_{rj}\delta x_j$ $(r = 1,\ldots,k)$, причем согласно уравнениям (5.1) связей $\delta\pi_s = 0$ ($s = m + 1, \ldots, k$). При этом из принципа Д'Аламбера – Лагранжа получаем, в отличие от результатов разд. 4, для неголономной системы m уравнений Пуанкаре вида (4.9)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = c_{\alpha i}^r \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_r} + c_{0i}^r \frac{\partial L}{\partial \eta_r} + \frac{\partial L}{\partial \pi_i} + Q_i \quad (i, \alpha = 1,\ldots,m; \quad r = 1,\ldots,k) \tag{5.3}$$

Здесь структурные коэффициенты c_{ij}^r также определяются равенствами (4.8), в которых, однако, индексы i, j изменяются в пределах от 0 до m.

Уравнения (5.3) вместе с уравнениями связей (5.1) и соотношениями (5.2) образуют совместную систему $k + m$ уравнений движения неголономной системы в квазикоординатах с таким же числом неизвестных $x_1,\ldots,x_k$, $\eta_1,\ldots,\eta_m$. Следует подчеркнуть, что входящая в (5.3) обобщенная функция Лагранажа $L(t, x_1,\ldots,x_k, \eta_1,\ldots,\eta_k)$ зависит, вообще говоря, от всех k квазискоростей η_r, и использовать уравнения (5.1) связей $\eta_s = 0$ ($s = m + 1, \ldots, k$) нужно лишь после составления уравнений (5.3) [16, 17].

Отметим, что согласно изложенному в книге [5] способу определения реакций связей, остальные $k - m$ уравнений (4.9) с добавленными в их правые части слагаемыми $b_{ij}R_i$ позволяют найти реакции R_i связей (5.1). Если освободить систему от связей (5.1), заменяя их действие реакциями R_i ($i = 1, \ldots, k$), то система станет голономной, для которой справедливы уравнения вида (4.9). Так как связи предполагаются идеальными, то работа их реакций на виртуальных перемещениях равна нулю:

$$R_i\delta x_i = R_i b_{ij}\delta\pi_j = 0 \quad (i = 1,\ldots,k; \quad j = 1,\ldots,m)$$

Отсюда ввиду произвольности $\delta\pi_j$ следуют равенства [9] $R_i b_{ij} = 0$ ($j = 1, ..., m$), вследствие чего первые m уравнений движения "освобожденной" системы будут уравнениями (5.3), а остальные $k - m$ уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_s} = c^r_{\alpha s}\eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_r} + c^r_{0s}\frac{\partial L}{\partial \eta_r} + \frac{\partial L}{\partial \pi_s} + Q_s + b_{is}R_i, \quad (s = m+1,\dots,k) \tag{5.4}$$

при учете (5.1) позволяют определить реакции R_i при условии $\operatorname{rank}(b_{is}) \neq 0$.

Отметим, что уравнения (5.3) в случае $Q_i = 0$ эквивалентны уравнениям (3.14) [18] и (1.13) [19], но несколько проще их благодаря выбору квазискоростей η_s, обращающихся в нуль в силу уравнений неголономных связей (5.1). Заменим входящую в функцию $L(t, x, \eta)$ в уравнениях (5.3) кинетическую энергию $T(t,x,\eta_1,\dots,\eta_k)$ соответствующей голономной системы на кинетическую энергию $\theta(t,x,\eta_1,\dots,\eta_m)$ неголономной системы со связями (5.1). Очевидно,

$$\theta(t,x,\eta_1,\dots,\eta_m) = T(t,x,\eta_1,\dots,\eta_m,0,\dots,0).$$

Следовательно, при $\eta_s = 0$ $(s = m+1,\dots,k)$ справедливы равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \pi_i} = \frac{\partial(\theta + U)}{\partial \pi_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_r} = \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_r}\right)_{\eta_s = 0}, \quad (i = 1,\dots,m;\ r = m+1,\dots,k)$$

и (5.3) принимают вид уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial \eta_i} = (c^s_{\alpha i}\eta_\alpha + c^s_{0i})\frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} + (c^r_{\alpha i}\eta_\alpha + c^r_{0i})\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_r}\right)_{\eta_s = 0} + \frac{\partial(\theta + U)}{\partial \pi_i} + Q_i \tag{5.5}$$

$$(\alpha, i, s = 1,\dots,m;\ r = m+1,\dots,k)$$

в которые переходят уравнения (1.13) [19]. Здесь $(\partial T / \partial \eta_r)_{\eta_s = 0}$ означают выражения $\partial T / \partial \eta_r$ при $\eta_s = 0$ $(r, s = m+1,\dots,k)$.

В частном случае, когда за параметры η_i (5.2) принимаются обобщенные скорости $\dot{x}_i = \eta_i$ $(i = 1,\dots,m)$, т.е. когда $a_{ir} = \delta_{ir}$ $(i, r = 1,\dots,m)$, все структурные коэффициенты $c^r_{\alpha i} = 0$ для $r \leqslant m$ [14], и уравнения (5.3) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{x}_i} = c^r_{\alpha i}\dot{x}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_r} + c^r_{0i}\frac{\partial L}{\partial \eta_r} + \frac{\partial L}{\partial \pi_i} + Q_i \tag{5.6}$$

$$(i, \alpha = 1,\dots,m;\ r = m+1,\dots,k;\ L = L(t, x_1,\dots,x_k,\ \dot{x}_1,\dots,\dot{x}_m,\ \eta_{m+1},\dots,\eta_k))$$

При введении вместо параметров η_i переменных $y_i = \partial L / \partial \eta_i$ $(i = 1,\dots,k)$ уравнения (5.3) движения неголономной системы принимают вид канонических уравнений Пуанкаре – Четаева

$$\frac{dy_i}{dt} = c^s_{\alpha i}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}y_s + c^s_{0i}y_s - \frac{\partial H}{\partial \pi_i} + Q_i$$

$$\eta_i = \partial H / \partial y_i \quad (i, \alpha = 1,\dots,m;\ s = 1,\dots,k) \tag{5.7}$$

к которым следует добавить уравнения связей (5.1) и соотношения (4.2), переписанные в виде

$$\frac{\partial H}{\partial y_s} = 0 \quad (s = m+1,\dots,k), \quad \dot{x}_i = b_{ij}\frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad (i = 1,\dots,k,\ j = 0,1,\dots,m) \tag{5.8}$$

Уравнения (5.7), (5.8) образуют систему $2k + m$ уравнений с таким же числом неизвестных $x_1,\dots,x_k$, $y_1,\dots,y_k$, $\eta_1,\dots,\eta_m$ [17].

Пример 5.1. Выведем из уравнений (5.6) уравнения движения в форме Воронца [20] для системы с лагранжевыми координатами $x_1,\ldots,x_n$ и неинтегрируемыми связями

$$\dot{x}_s = \alpha_{si}(t,x)\dot{x}_i + \alpha_s(t,x), \quad (i=1,\ldots,m;\ s=m+1,\ldots,n) \tag{5.9}$$

Положим $\eta_i = \dot{x}_i$, $x_0 = t$, $\dot{x}_0 = 1$, $\eta_s = \dot{x}_s - \alpha_{si}\dot{x}_i$, $\alpha_{s0} = \alpha_s$ $(i=0,1,\ldots,m;\ s=m+1,\ldots,n)$, так что $\dot{x}_i = \eta_i$, $\dot{x}_s = \eta_s + \alpha_{si}\eta_i$ и при учете равенств (4.1), (4.2) будем иметь соотношения

$$a_{ij} = b_{ij} = \delta_{ij},\quad a_{is} = b_{is} = 0,\quad b_{si} = -a_{si} = \alpha_{si},\quad a_{sr} = b_{sr} = \delta_{sr}$$

$$(i,j=0,1,\ldots,m;\quad s,r=m+1,\ldots,n)$$

согласно которым по формулам (4.8) находим

$$c^r_{ji} = \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial\alpha_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial x_k}\alpha_{kj} - \frac{\partial\alpha_{rj}}{\partial x_k}\alpha_{ki}.$$

$$c^r_{0i} = \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial t} - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_i} + \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial x_k}\alpha_k - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_k}\alpha_{ki} \tag{5.10}$$

$$(i,j=1,\ldots,m;\quad k,r=m+1,\ldots,n)$$

При учете (5.9), (5.10) заключаем, что уравнения (5.6) принимают вид уравнений Воронца [20]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{x}_i} = \frac{\partial(\theta+U)}{\partial x_i} + \alpha_{ri}\frac{\partial(\theta+U)}{\partial x_r} + (c^r_{ji}\dot{x}_j + c^r_{0i})\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_r}\right) + Q_i \tag{5.11}$$

$$(i,j=1,\ldots,m;\quad r=m+1,\ldots,n)$$

Уравнения (5.11) и (5.9) образуют совместную систему n дифференциальных уравнений, общее решение которой зависит от $n + m$ произвольных постоянных.

В частном случае, когда функция $L(t,x,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_m,\ \eta_{m+1},\ldots,\eta_n)$, силы Q_i, а также коэффициенты связей (5.9) не зависят явно от координат x_r $(r=m+1,\ldots,n)$, уравнения (5.11) принимают вид замкнутой системы m уравнений Чаплыгина [17] с неизвестными $x_1,\ldots,x_m$.

Автор благодарит Л.М. Мархашова за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mecanique // C.R. Acad. sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.
2. *Chetaev N.* Sur les équations de Poincaré // C.R. Acad. sci. Paris. 1927. V. 185. P. 1577–1578.
3. *Chetaev N.* Sur les équations de Poincaré // Докл. АН СССР. 1928. № 7. С. 103–104.
4. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
5. *Четаев Н.Г.* Уравнения Пуанкаре // Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. С. 287–322.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
7. *Marsden J.E.* Lectures on Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1992. 272 p. (London Math. Soc. Lecture Note Series. 174).
8. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
9. *Мархашов Л.М.* Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 43–55.
10. *Чаплыгин С.А.* О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров. Собр. соч., М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 26–56.
11. *Богоявленский А.А.* Циклические перемещения для обобщенного интеграла площадей // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 774–777.

12. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys. Repts. 1985. V. 123. № 1/2. P. 1–116.
13. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
14. *Hamel G.* Die Lagrange-Eulersche Gleichungen der Mechanik // Z. Math. und Phys. 1904. Bd. 50. S. 1–57.
15. *Добронравов В.В.* Аналитическая динамика в неголономных координатах // Учен. зап. МГУ. Механика. 1948. Вып. 122. Т. 2. С. 77–182.
16. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.; Физматгиз, 1961. 824 с.
17. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
18. *Фам Гуен.* Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 253–259.
19. *Фам Гуен.* К уравнениям движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 804–814.
20. *Воронец П.В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Мат. сб. 1902. Т. 22. Вып. 4. С. 659–686.

Москва

Поступила в редакцию
12. I. 1994