УДК 531.36:534.1

© 1994 г. Л.Д. Акуленко

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Исследуется класс динамических объектов общего вида, подверженных быстропеременным, в частности высокочастотным квазипериодическим внешним воздействиям. Получены условия приводимости системы уравнений движения к стандартной форме. Реализовано преобразование, обобщающее известные и допускающее асимптотический анализ на основе методов разделения движений (метода усреднения). Получена соответствующая система первого приближения, проведено качественное исследование автономной системы для медленных переменных. Разработанный подход иллюстрируется решением ряда задач для системы с одной степенью свободы с переменными параметрами. Рассмотрены системы типа нелинейного осциллятора и математического маятника. В качестве высокочастотных периодических воздействий взяты следующие: внешние моменты сил, кинематическое возбуждение с помощью вибраций точки подвеса и параметрическое возбуждение посредством изменения длины маятника; рассмотрены другие модели.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Рассмотрим нелинейную динамическую систему довольно общего вида. Предположим, что исследуемый механический объект находится под действием быстропеременных, в частности высокочастотных, внешних сил. Это обстоятельство будем отмечать скалярным числовым параметром λ, $\lambda \gg 1$, после того как в системе совершен переход к безразмерным переменным и параметрам. Для определенности рассмотрим задачу Коши с большим параметром λ:

$$X^{\cdot\cdot} = F(\lambda t, X, X^{\cdot}; \lambda), \quad X(t_0) = X^0, \quad X^{\cdot}(t_0) = V^0 \tag{1.1}$$

Здесь $X, X^{\cdot} = dX/dt$, F – векторы произвольной размерности $n \geq 1$; t_0, X^0, V^0 – начальные данные для $t, X, X^{\cdot}$ соответственно. Большой параметр λ характеризует относительную скорость изменения внешнего воздействия (сил, параметров системы и др.). Уточнение структуры и свойств гладкости функции F будет приведено ниже после соответствующих преобразований задачи (1.1).

Введем быстрое время $\theta = \lambda t$; тогда задача (1.1) преобразуется к виду задачи Коши с малым параметром $\varepsilon = \lambda^{-1} > 0$, см. [1–3]:

$$x'' = f(\theta, x, x', \varepsilon), \quad \theta \geq \theta_0, \quad x(\theta_0) = x^0, \quad x'(\theta_0) = \upsilon^0 \tag{1.2}$$

$$x(\theta) \equiv X(t), \quad x^0 = X^0, \quad \upsilon^0 = \varepsilon V^0, \quad f \equiv \varepsilon^2 F(\theta, x, \varepsilon^{-1}x', \varepsilon^{-1})$$

Далее будем рассматривать систему (1.2) при следующих предположениях относительно свойств функции f:

$$f(\theta, x, x', \varepsilon) \equiv \varepsilon p(\theta, x, x') + \varepsilon^2 q(\theta, x, \varepsilon^{-1}x', \varepsilon) \tag{1.3}$$

Здесь p, q – непрерывные ограниченные или допускающие равномерное среднее по θ функции аргумента $\theta \geqslant \theta_0$; это требование ниже уточняется и ослабляется. Относительно переменной x функции p, q предполагаются достаточно гладкими и регулярными в открытой ограниченной области $x \in D_x$. По аргументу производной $\upsilon = x'$ функция p считается гладкой в ε-окрестности значения $\upsilon = 0$. Функция q предполагается определенной и гладкой по $V = \varepsilon^{-1}\upsilon$ в открытой ограниченной области $V \in D_V(\mathrm{diam} D_V \sim 1)$; по ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ она считается непрерывной.

Итак, далее исследуется задача Коши (1.2), (1.3) на асимптотически большом интервале быстрого аргумента: $\theta - \theta_0 \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, где $\Theta \sim 1$. В общем случае применение метода усреднения затруднено, поскольку система не имеет стандартного вида (по терминологии Н.Н. Боголюбова [3]). Приведение системы с быстро вращающейся фазой [3, 4] вида $z^{\cdot} = g(\alpha, z)$, $\alpha^{\cdot} \sim \lambda$, где $z = (x, \upsilon)$, $\upsilon = x^{\cdot}$, к уравнению типа (1.2) дает выражение $f \equiv \varepsilon^2 q$ (без слагаемого εp). Заметим, что функция q может зависеть регулярным образом в $V = \varepsilon^{-1}\upsilon$ и от υ в соответствующих областях. В случае гладкой зависимости q от ε это свойство следует непосредственно из (1.3).

Исследование задач динамики механических объектов, подверженных быстропеременным воздействиям кинематического и силового типа, приводит к системам типа (1.2), (1.3), см., например, задачи о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [2–6]. Анализ периодических движений для колебательных или вращательно-колебательных систем (1.2), (1.3) при $q \equiv 0$, т.е. $x'' = \varepsilon p(\theta, x, x')$ проводился методами Ляпунова–Пуанкаре [1, 2]. Установлены конструктивные условия существования, единственности и устойчивости периодических движений $x(\theta, \varepsilon)$, обращающихся в $x_0 = \upsilon^*\theta + x^*$ при $\varepsilon = 0$, где υ^*, x^* – определенные постоянные. Для колеблющихся переменных x_i вектора x компоненты $\upsilon_i^* = 0$; по вращающимся компонентам x_j функция p должна быть периодической. Заметим, что метод усреднения позволяет исследовать такую систему на относительно коротком интервале времени $\theta - \theta_0 \sim \varepsilon^{-1/2}$ (с малым параметром $\varepsilon^{1/2}$). Соответствующая усредненная система первого приближения в медленном времени $\tau = \varepsilon^{1/2}\theta$ будет иметь вид: $x'' = p_0(x)$, где $p_0(x) \equiv \langle p(\theta, x, 0)\rangle_\theta$ – среднее по θ. Если $p \equiv 0$ в (1.3), что отвечает известному случаю быстровращающейся фазы [3, 4], то усредненная система первого приближения для (1.2), (1.3) имеет вид: $x'' = q_0(x, x')$, где штрих означает производную по медленному времени $\tau = \varepsilon\theta$, а q_0 – среднее по θ: $q_0(x, x') = \langle q(\theta, x, x', 0)\rangle_\theta$.

Отметим, что упомянутая выше система для $z = (x, x^{\cdot})$ с быстро вращающейся фазой $\alpha^{\cdot} = \lambda\omega(z) + \mathrm{A}(\theta, z)$ приводится к виду (1.2), (1.3) с $p \equiv 0$.

Переходим к асимптотическому исследованию системы (1.2), (1.3), обобщающей рассмотренные ранее. Анализ подхода [3], разработанного для решения задачи о колебаниях маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса, позволяет обобщить примененную замену и при выполнении дополнительных условий на функцию $p(\theta, x, x')$ привести систему к стандартному виду с параметром ε.

2. Приведение системы к стандартной форме. На функцию $p = p(\theta, x, \upsilon)$ налагается дополнительное условие

$$p_0(x) = \langle p(\theta, x, 0)\rangle_\theta \equiv 0, \quad x \in D_x \tag{2.1}$$

Это равенство имеет определенное механическое содержание. Если в какой-то момент скорость $\upsilon = 0$, то ее среднее приращение, обусловленное p, равно нулю. При выполнении (2.1) будет равномерно ограниченной или допускающей равномерное среднее по θ функция $p^*(\theta, x)$, определяемая интегрированием $p(\theta, x, 0)$; имеем

$$p^*(\theta, x) = \int p(\theta, x, 0)d\theta, \quad |p^*| \leqslant C, \quad \theta \geqslant \theta_0, \quad x \in D_x \tag{2.2}$$

где $C = \mathrm{const}$. Интегрирование в (2.2) удобно производить в пределах от θ_0 до θ; эти или другие пределы не указываются для сокращения записи. Аналогично $p_0(x)$ (2.1) введем функцию $\overset{*}{p}_0(x)$, получающуюся усреднением $p^*(\theta, x)$ (2.2) по θ:

$$\overset{*}{p}_0(x) = \langle p^*(\theta, x)\rangle_\theta, \quad x \in D_x \tag{2.3}$$

При помощи функций $p^*, \overset{*}{p}_0$ (2.2), (2.3) определим равномерно ограниченную или имеющую равномерное среднее функцию $p^{**}(\theta, x)$, которая строится сходным с p^* (2.2) образом:

$$p^{**}(\theta, x) = \int[p^*(\theta, x) - \overset{*}{p}_0(x)]d\theta \tag{2.4}$$

Используем теперь построенные выше функции $p^*, \overset{*}{p}_0, p^{**}$ (2.2)–(2.4) для замены исходных переменных x, $\upsilon = x'$ в системе (1.2), (1.3) на новые переменные y, u следующим образом:

$$x = y + \varepsilon p^{**}(\theta, y), \quad \upsilon = \varepsilon u + \varepsilon[p^*(\theta, y) - \overset{*}{p}_0(y)] \tag{2.5}$$

Продифференцируем по θ выражение для x и приравняем υ согласно (2.5). Разрешая линейное уравнение относительно вектора y', получим

$$y' = \varepsilon Y(\theta, y, u, \varepsilon) \tag{2.6}$$

$$Y(\theta, y, u, \varepsilon) \equiv [I + \varepsilon P^{**}(\theta, y)]^{-1}u, \quad P^{**} = \partial p^{**}/\partial y$$

Здесь I – единичная $(n \times n)$-матрица, Y – допускающая равномерное среднее по θ функция. Для Y имеет место представление $Y = (I - \varepsilon P^{**} + \varepsilon^2 P^{**2} - ...)u$. Заметим, что при замене (2.5) для y получается уравнение, правая часть которого линейна по u, причем $y' = \varepsilon u + O(\varepsilon^2)$.

Продифференцируем по θ второе выражение (2.5) для υ в силу уравнений (1.2), (1.3) с учетом (2.2)–(2.5) и полученного выражения (2.6) для y':

$$\upsilon' = \varepsilon u' + \varepsilon p(\theta, y, 0) + \varepsilon^2[P^*(\theta, y) - \overset{*}{P}_0(y)]Y(\theta, y, u, \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon p(\theta, y + \varepsilon p^{**}, \quad \varepsilon u + \varepsilon(p^* - \overset{*}{p}_0)) + \varepsilon^2 q(\theta, y + \varepsilon p^{**}, u + p^* - \overset{*}{p}_0, \varepsilon) \tag{2.7}$$

Здесь зависимость известных функций $p^*, \overset{*}{p}_0, p^{**}$ от θ, y не указана для сокращения записи. Квадратные $(n \times n)$-матрицы $P^*(\theta, y)$, $\overset{*}{P}_0(y) = \langle P^*(\theta, y)\rangle_\theta$ определяются сходным с $P^{**}(\theta, y)$ образом: $P^* = p_y^{*\prime}$, $\overset{*}{P}_0 = \overset{*}{p}{}'_{0y}$.

Уравнение (2.7) после сокращения на $\varepsilon > 0$ элементарно разрешается относительно u':

$$u' = \varepsilon U(\theta, y, u, \varepsilon) \tag{2.8}$$

$$\varepsilon U \equiv p(\theta, y + \varepsilon p^*, \varepsilon u + \varepsilon(p^* - \overset{*}{p}_0) - p(\theta, y, 0) - \varepsilon(P^* - \overset{*}{p}_0)Y + \varepsilon q(\theta, y + \varepsilon p^{**}, u +$$

$$+ p^* - \overset{*}{p}_0, \varepsilon) = \varepsilon P_x p^{**} + \varepsilon P_\upsilon(u + p^* - \overset{*}{p}_0) - \varepsilon(P^* - \overset{*}{p}_0)u + \varepsilon q(\theta, y, u +$$

$$+ p^* - \overset{*}{p}_0, 0) + \varepsilon^2 ..., \quad P_{x,\upsilon} = p'_{x,\upsilon}(\theta, y, 0)$$

Отметим, что правая часть уравнения (2.8) оказывается уже нелинейной функцией u в первом приближении по ε вследствие принятой зависимости q от $\varepsilon^{-1}\upsilon$.

Итак, получена система $2n$ уравнений (2.6), (2.8) относительно новых неизвестных переменных y, u, имеющая стандартный вид [3–6]. Начальные значения $y(\theta_0)$, $u(\theta_0)$ получаются из формул замены (2.5). Будем полагать, что интегрирование в (2.2), (2.4) проводится в пределах от θ_0 до θ; тогда

$$y(\theta_0) = y^0 = X^0, \quad u(\theta_0) = u^0 = V^0 \tag{2.9}$$

Таким образом, искомая стандартная система уравнений с параметром ε и начальные условия полностью определены в виде (2.6), (2.8), (2.9). Она может быть подвергнута дальнейшему анализу на основе развитых методов разделения переменных ([3–6] и др.).

Изложенную выше схему приведения к стандартному виду можно обобщить и распространить на систему вида

$$X^{\cdot\cdot} = F(\lambda t, X, X^{\cdot}, Z; \lambda), \quad Z^{\cdot} = G(\lambda t, X, X^{\cdot}, Z; \lambda) \tag{2.10}$$

(Z – вектор произвольной размерности $m \geqslant 0$; начальные значения X^0, V^0, Z^0 заданы). Для этого введем в (2.10), аналогично изложенному, быстрое время – аргумент $\theta = \lambda t$, функции $x(\theta) \equiv X(t)$, $z(\theta) \equiv Z(t)$ и следующие представления для правых частей (штрих означает производную по θ):

$$f(\theta, x, x', z, \varepsilon) \equiv \lambda^{-2}F(\theta, x, \lambda x', z; \lambda), \quad \varepsilon = \lambda^{-1} \tag{2.11}$$

$$\varepsilon g(\theta, x, \varepsilon^{-1}x', z; \varepsilon) \equiv \lambda^{-1}G(\theta, x, \lambda x', z; \lambda)$$

В результате получается динамическая система вида (1.2), (1.3) с "медленно изменяющимся параметром" [3, 4]:

$$x' = \upsilon, \quad \upsilon' = f(\theta, x, \upsilon, z, \varepsilon), \quad z' = \varepsilon g(\theta, x, \varepsilon^{-1}\upsilon, z, \varepsilon) \tag{2.12}$$

$$f \equiv \varepsilon p(\theta, x, \upsilon, z) + \varepsilon^2 q(\theta, x, \varepsilon^{-1}\upsilon, z, \varepsilon)$$

При помощи замены типа (2.5) для x, υ на y, u, зависящей также от h ($z \to h$), получим уравнения в стандартной форме

$$\begin{aligned} &y' = \varepsilon Y(\theta, y, u, h, \varepsilon), \quad y(\theta_0) = y^0 = X^0 \\ &u' = \varepsilon U(\theta, y, u, h, \varepsilon), \quad u(\theta_0) = u^0 = V^0 \\ &h' = \varepsilon H(\theta, y, u, h, \varepsilon), \quad h(\theta_0) = h^0 = Z^0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Функции Y, U, H определены в рассматриваемой области $\theta \geqslant \theta_0$, $y \in D_x$, $u \in D_V$, $h \in D_Z$ для достаточно малых ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и имеют равномерное среднее по θ. Они будут гладкими, если таковыми являются функции p, q, g. Правые части (2.13) определяются аналогично (2.6), (2.8) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varepsilon Y \equiv \varepsilon(I + \varepsilon P_y^{**})^{-1}(u - P_h^{**}g_*), \quad P_{y,h}^{**} \equiv p_{y,h}^{**\prime} \\ &\varepsilon U \equiv p_* - \overset{0}{p_*} - \varepsilon(P_y^* - \overset{*}{P}_{0y})Y - \varepsilon(P_h^* - \overset{*}{P}_{0h})g_* + \varepsilon q_* \\ &\varepsilon H \equiv \varepsilon g_*, \quad P_{y,h}^* \equiv p_{y,h}^{*\prime}, \quad \overset{*}{P}_{0y,h} = \overset{*\prime}{p}_{0y,h} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Выражения p_*, q_*, g_* означают, что в p, q, g (2.12) для переменных x, υ, z поставлены их представления согласно замене:

$$x = y + \varepsilon p^{**}(\theta, y, h), \quad \upsilon = \varepsilon u + \varepsilon[p^*(\theta, y, h) - \overset{*}{p}_0(y, h)], \quad z = h \tag{2.15}$$

Функция $\overset{0}{p_*}$ есть p_* при $\varepsilon = 0$, т.е. $x = y$, $\upsilon = 0$, $z = h$. Таким образом, $p_* - \overset{0}{p_*} = O(\varepsilon)$, см. (2.8). Функции p^*, $\overset{*}{p}_0$, p^{**} строятся по схеме (2.1)–(2.4) с учетом зависимости функции p от $z = h$ согласно (2.12). Отметим, что матрицы с индексом y внизу имеют размеры $n \times n$, а с индексом h – размеры $n \times m$. Выражения для функций (2.14) в первом приближении по ε приведены ниже, см. (3.6).

3. Анализ системы первого приближения. Рассмотрим задачу Коши (2.6), (2.8), (2.9) в первом приближении по ε. Отбрасывая члены $O(\varepsilon^2)$, получим

$$\begin{aligned} &y' = \varepsilon \overset{*}{u}, \quad u' = \varepsilon P_x p^{**} + \varepsilon P_\upsilon(u + p^* - \overset{*}{p}_0) - \\ &- \varepsilon(P^* - \overset{*}{P}_0)u + \varepsilon q(\theta, y, u + p^* - \overset{*}{p}_0, 0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $P_{x,\upsilon}$, P^*, $\overset{*}{P}_0$, p^*, $\overset{*}{p}_0$, p^{**} не зависят от u. Усредняя по явно входящему аргументу θ и вводя исходное время $t = \varepsilon\theta$, получим усредненную систему первого приближения по ε, не содержащую явно аргумент t:

$$y^{\cdot} = u,\ u^{\cdot} = r(y) + N(y)u + q_0(y, u), \quad y(t_0) = y^0, \quad u(t_0) = u^0 \tag{3.2}$$

$$r(y) \equiv \langle P_x p^{**} \rangle + \langle P_\upsilon(p^* - \overset{*}{p}_0) \rangle, \quad N(y) \equiv \langle P_\upsilon \rangle$$

$$q_0(y, u) \equiv \langle q(\theta, y, u + p^* - \overset{*}{p}_0, 0) \rangle$$

При $n = 1$ она может быть исследована методами фазовой плоскости [3]. Система (3.2) имеет структуру, позволяющую представить ее в виде векторного уравнения второго порядка

$$y^{\cdot\cdot} = r(y) + N(y)y^{\cdot} + q_0(y, y^{\cdot}), \quad y(t_0) = y^0, \quad y^{\cdot}(t_0) = u^0 \tag{3.3}$$

Сравнение уравнений (1.2) и (3.3) показывает их нетривиальное различие.

Рассмотрим стационарные точки системы (3.2). Нетрудно установить, что они таковы:

$$y^* = \mathrm{Arg}[r(y) + q_0(y, 0)], \quad u^* = 0 \quad (0 \equiv D_V) \tag{3.4}$$

Если допустимый корень $y^* \in D_x$ существует, то устойчивость или неустойчивость стационарного решения системы (3.2) или (3.3) определяется вещественными частями характеристических показателей системы в вариациях [1]. Соответствующее характеристическое уравнение представимо в формах

$$\Delta(\chi) = \det \begin{Vmatrix} -I\chi & I \\ r'(y^*) + q'_{0y}(y^*, 0) & N(y^*) + q'_{0u}(y^*, 0) - I\chi \end{Vmatrix} =$$

$$= \det \| I\chi^2 - (N(y^*) + q'_{0y}(y^*, 0))\chi - r'(y^*) - q'_{0y}(y^*, 0) \| = 0 \tag{3.5}$$

Разрешая алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно χ (3.5), получим

$$\chi_k = \mathrm{Arg}\Delta(\chi), \quad \chi_k = \sigma_k + i\gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n$$

Условие асимптотической устойчивости решения (3.4) усредненной системы (3.2) имеет вид: $\sigma_k < 0$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n$); неустойчивость имеет место, если хотя бы одно из чисел $\sigma_k > 0$. Выполнение условия асимптотической устойчивости обеспечивает близость, в частности ε-близость, решений исходной и усредненной систем для $t \in [t_0, \infty)$, см. [3, 4].

Уравнения в оскулирующих переменных первого приближения по ε для системы с переменными параметрами (2.12) согласно (2.13), (2.14) получаются отбрасыванием в (2.14) величин $O(\varepsilon^2)$:

$$y' = \varepsilon(u - \overset{**}{P_h} \overset{0}{g}_*), \quad h' = \varepsilon \overset{0}{g}_* \tag{3.6}$$

$$u' = \varepsilon P_x p^{**} + \varepsilon P_\upsilon(u + p^* - \overset{*}{p}_0) + \varepsilon(\overset{*}{P}_y - \overset{*}{P}_{0y})(u - \overset{**}{P_h} \overset{0}{g}_*) - \varepsilon(\overset{*}{P}_h - \overset{*}{P}_{0h})\overset{0}{g}_* + \varepsilon \overset{0}{q}_*$$

Выражения $\overset{0}{g}_*$, $\overset{0}{q}_*$ означают, что в случае гладкой зависимости функций g_*, q_* от ε можно положить $\varepsilon = 0$ без потери точности. Усредненная система будет автономной и иметь порядок $2n + m$; ее структура будет довольно общей. Стационарные точки и их устойчивость определяются обычным образом, см. разд. 4. Отметим, что в ряде задач зависимость параметров h от времени t может быть определена явно в виде $h = h(t)$ или $h^{\cdot} = g_0(h)$; это может также означать, что в уравнение (1.1) время t входит двояко: $F = F(t, \lambda t, X, X^{\cdot}; \lambda)$.

4. Примеры.

4.1. Нелинейный осциллятор с переменными параметрами. Рассмотрим динамическую, в частности вращательно-колебательную систему с одной степенью свободы, подверженную высокочастотным воздействиям [2, 6]

$$x^{\cdot\cdot} + Q(x, z) = P(\nu t, x, x^{\cdot}, z; \nu), \quad z^{\cdot} = Z(\nu t, x, x^{\cdot}, z; \nu) \tag{4.1}$$

Здесь x – скалярная переменная (смещение или угол), z – вектор параметров (массо-инерционная характеристика, жесткость, длина маятника и др.). Начальные значения предполагаются заданными. Большой параметр ν ($\nu \to \infty$) характеризует частоту внешнего воздействия кинематического или силового типа. При $P \equiv 0$, $Z \equiv 0$ система (4.1) для x консервативна и допускает полное интегрирование в квадратурах.

Введем быстрое время $\theta = \nu t$ – фазу внешнего воздействия; когда $x^{\cdot} = \nu x'$, $z^{\cdot} = \nu z'$ и система (4.1) преобразуется к виду (2.12):

$$x'' = f(\theta, x, x', z, \varepsilon), \quad f \equiv \varepsilon^2(P - Q), \quad \varepsilon = \nu^{-1} \tag{4.2}$$

$$z' = \varepsilon g(\theta, x, \varepsilon^{-1}x', z, \varepsilon), \quad g \equiv Z$$

Согласно разд. 1 (см. (1.2)), регулярная зависимость функций f, g от $\upsilon = x'$ может не иметь места. Предположим, что определенная в (4.2) функция f имеет структуру (1.3)

$$f \equiv \varepsilon p(\theta, x, \upsilon, z) + \varepsilon^2 q(\theta, x, \varepsilon^{-1}\upsilon, z, \varepsilon) \tag{4.3}$$

где p, q регулярны по своим аргументам. Заметим, что функции q, g регулярны по отношению к переменной $V = \varepsilon^{-1}\upsilon$, причем гладкая зависимость от υ также допускается.

Рассмотрим частные случаи (4.3). Пусть функция Q достаточно произвольна, $P = P(\nu t, z; \nu)$, $Z \equiv 0$; тогда $z = \text{const}$, а усредненные переменные y, u изменяются согласно автономной системе уравнений

$$y^{\cdot} = u, \quad u^{\cdot} = -Q(y, z) + a(z), \quad z = \text{const}$$

Согласно (4.2) предполагалось $f = \varepsilon b(\theta, z) + \varepsilon^2 a(z) - \varepsilon^2 Q(x, z)$, где $\langle b(\theta, z)\rangle \equiv 0$. Система может иметь стационарные точки $u^* = 0$, $y^*(z) = \text{Arg}(a - Q)$. Если $\rho = -Q'_y > 0$ при некотором $y = y^*$, то $\chi_{1,2} = \pm\rho^{1/2}$ и данная точка y^*, u^* экспоненциально неустойчива; при $\rho \leq 0$ имеет место критическая ситуация. Пусть система содержит диссипативное воздействие $-\varepsilon k(\theta, x, \varepsilon^{-1}\upsilon, z)\upsilon$, такое, что

$$k_0^* = \langle k(\theta, y, u + b^* - b_0^*, z)(u + b^* - b_0^*)\rangle \equiv \kappa(y, u, z)u + \delta(y, u, z),$$

$$\kappa_0 = \kappa(y^*, 0, z) \neq 0, \quad \delta(y, u, z) = O(u^2)$$

Тогда усредненная система будет допускать указанные стационарные точки y^*, u^*. Если для некоторой точки y^*, u^* величина $\rho > 0$ или (и) $\kappa_0 < 0$, то она экспоненциально неустойчива; при $\rho < 0$, $\kappa_0 > 0$ – экспоненциально устойчива; ситуация $\rho = 0$, $\kappa_0 > 0$ является критической. Отметим, что согласно (3.6) параметрическое возбуждение системы (4.1)–(4.3) возможно также в случае, когда $\langle Z\rangle \equiv 0$, т.е. $z = \text{const}$ в первом приближении по ε.

4.2. Математический маятник переменной длины. Рассмотрим уравнения движения математического маятника переменной длины с учетом моментов сил вязкого трения и внешнего воздействия

$$Ml^2 x^{\cdot\cdot} + Mgl\sin x = -2MlDx^{\cdot} - K(l)x^{\cdot} + A(t, l) + B(t, \nu t, l; \nu) \tag{4.4}$$

$$l^{\cdot} = D(t, \nu t, x, x^{\cdot}, l; \nu)$$

Здесь x – угол отклонения от нижнего положения равновесия, M – масса, l – длина, g – ускорение сил тяжести, K – коэффициент трения; A – медленная, B – быстро осциллирующая составляющие внешнего момента; D – функция скорости изменения длины; в функциях A, B, D допущена зависимость от t. Преобразуем систему (4.4) вида (4.1) к форме (4.2), (4.3). Введем быструю фазу $\theta = \nu t$ и разделим первое уравнение (4.4) на $Ml^2\nu^2$, а второе на ν; получим

$$x'' = \varepsilon l^{-2}[b - (2dl + k)x'] + \varepsilon^2 l^{-2}(a - gl\sin x) \equiv \varepsilon l^{-2}b + \varepsilon^2 l^{-2}[a - gl\sin x - (2dl + k)\varepsilon^{-1}x']$$

$$l' = \varepsilon d(t, \theta, x, \varepsilon^{-1}x', l, \varepsilon), \quad t' = \varepsilon, \quad \varepsilon = \nu^{-1} \tag{4.5}$$

$$a = AM^{-1}, \quad b = \nu^{-1}BM^{-1}, \quad k = KM^{-1}, \quad d \equiv D$$

Поскольку по предположению $\langle b\rangle_\theta \equiv 0$, то согласно разд. 2 система (4.5) приводится к стандартной форме (2.13), (2.14) посредством замены (2.15). В первом приближении по ε получим

$$y' = \varepsilon[u - (l^{-2}b^{**})'_l d_*^0 - l^{-2}b_t^{**}]$$

$$u' = \varepsilon l^{-2}[a - gl\sin y - (2d_*^0 l + k)(u + l^{-2}(b^* - b_0^*))] -$$

$$-\varepsilon[(l^{-2}(b^* - b_0^*))'_l d_*^0 + l^{-2}(b^* - b_0^*)'_t] \tag{4.6}$$

$$l' = \varepsilon d_*^0 \equiv \varepsilon d(t, \theta, y, u + l^{-2}(b^* - b_0^*), l, 0)$$

Усредненная система первого приближения получается согласно разд. 3 усреднением по θ; "медленное" время t считается параметром. Отметим, что заведомо равны нулю средние от $b^* - b_0^*$ и $(b^* - b_0^*)'_t$, т.е. два последних слагаемых в уравнении для u' (4.6). Рассмотрим некоторые частные случаи функций a, b, d_*^0.

Пусть $d_*^0 \equiv 0$, коэффициенты a, b не зависят от t; тогда имеем в исходном времени t:

$$y' = u, \quad u' = l^{-2}[a(l) - gl\sin y - k(l)u], \quad l = l^0 \tag{4.7}$$

Система (4.7) при $|r| \leqslant 1$, $r = a(gl^0)^{-1}$ имеет стационарные точки $u^* = 0$, $y^* = \arcsin r$. Уравнения в вариациях имеют один нулевой характеристический показатель, отвечающий переменной l. Два остальных определяются корнями квадратного уравнения $\chi^2 + (l^0)^{-2}k\chi + g(l^0)^{-1}\cos y^* = 0$. Для одного из значений $y^*(\mathrm{mod}\,2\pi)$ величина $\cos y^* > 0$ и оба корня имеют отрицательные вещественные части; для другого значения $\cos y^* < 0$ и один из показателей положителен. Отсюда следует, что для маятника постоянной длины ($d \equiv 0$, $l = \mathrm{const}$), в рассмотренной системе при $|r(l)| < 1$ одно из положений равновесия асимптотически устойчиво, а другое – неустойчиво; для случая $|r| = 1$ имеет место критическая ситуация.

Предположим, что функция d_*^0 в (4.6) не зависит явно от фазы θ; тогда усредненные уравнения существенно упрощаются. В медленном времени t имеем

$$y' = u - d_*^0(l^{-2}b_0^{**})'_l - l^{-2}(b_0^{**})'_t \tag{4.8}$$

$$u' = l^{-2}[a - gl\sin y - (2d_*^0 l + k)u], \quad l' = d_*^0$$

Если при этом функции a, b, d_*^0 не зависят явно от t, то стационарные точки системы (4.8) определяются обычным образом. Возьмем для определенности функцию $d_*^0 = c(l_0 - l)$, где $c > 0$, $l > 0$ – заданные постоянные. Тогда $l \to l_0$ по экспоненте с показателем $-c < 0$. Стационарные точки системы (4.8) определяются аналогично (4.7): $y^* = \arcsin r(l_0)$, $u^* = 0$, $l^* = l_0$ при условии $|r(l_0)| \leqslant 1$. Один из характеристических показателей равен $-c$, а два других есть корни приведенного выше квадратного уравнения, взятого при $l^0 = l_0$. Условия экспоненциальной устойчивости и неустойчивости определены ранее.

Отметим эффект влияния на движение маятника, обусловленный быстропеременным изменением длины. Пусть функции $b = b(\theta)$, $d_*^0 = d_*^0(\theta)$ и не зависят от t, l; тогда после усреднения (4.6) по θ получим

$$y' = u + 2l^{-3}\langle b^{**}d_*^0\rangle, \quad l' = \langle d_*^0\rangle \tag{4.9}$$

$$u' = l^{-2}(a - gl\sin y - ku)$$

Даже в случае $\langle d_*^0\rangle = 0$ ($l \simeq l^0$) остается в первом уравнении для y слагаемое $2\langle b^{**}d_*^0\rangle$, в общем случае отличное от нуля. При этом в системе могут быть стационарные точки, которые изучаются стандартным образом. Отметим, что для рассмотренной выше или более общей модели могут быть поставлены и приближенно исследованы задачи управления колебаниями и вращениями посредством параметрического управления – периодического изменения длины [6].

4.3. Пластическая модель изменения длины маятника. Рассмотрим квазистационарную модель изменения длины l маятника, вызванного пластической деформацией материала "нити" вследствие ее натяжения [4], величину которого примем равной $E = Mg\cos x + Mlx'^2$. Будем полагать, что скорость деформации пропорциональна натяжению: $l' = \kappa E$, где $\kappa > 0$ – коэффициент, возможно, зависящий от l. Связь будем считать удерживающей как для положительных, так и для отрицательных E.

Усредненные уравнения первого приближения согласно (4.6) примут вид

$$y' = u - \kappa E_0^*(l^{-2}b_0^{**})'_l, \quad l' = \kappa E_0^* \tag{4.10}$$

$$u' = l^{-2}[a - gl\sin y - (2\kappa E_0^* l + k)u] - 2\kappa l^{-3}M(2\langle\Delta b^{*2}\rangle u + l^{-2}\langle\Delta b^{*3}\rangle)$$

$$E_0^* = M(g\cos y + lu^2 + l^{-3}\langle\Delta b^{*2}\rangle), \quad \Delta b^* = b^* - b_0^*$$

Здесь для простоты полагаем, что коэффициенты a, b не зависят от времени t.

Система (4.10) может быть исследована численными и качественными методами. Для определения стационарных точек y^*, u^*, l^* рассмотрим более простой случай $a = \mathrm{const}$, $b_0^{**} = 0$, $\langle\Delta b^{*3}\rangle = 0$. Тогда получим соотношения

$$u^* = 0, \quad a - gl\sin y = 0, \quad g\cos y + l^{-3}\langle\Delta b^{*2}\rangle = 0$$

Второе равенство есть условие равновесия, а третье – среднее постоянство длины, т.е. отсутствие натяжения. После исключения l для неизвестной y получим трансцендентное уравнение $\sin^3 y = -e\cos y$, где параметр $e = a^3(g^2\langle\Delta b^{*2}\rangle)^{-1}$ может быть произвольным. Это уравнение сводится к кубическому вида $\xi^3 - e^2(1 - \xi) = 0$, $1 \geqslant \xi \geqslant 0$ относительно неизвестной $\xi = \sin^2 y$. Графический анализ трансцендентного уравнения для y показывает, что независимо от величины и знака $e \neq 0$ на интервале $0 \leqslant y < 2\pi$ имеется два корня $y^*_{1,2}$, $0 \leqslant y^*_1 < \pi$, $y^*_2 = y^*_1 + \pi$. В результате получаются две стационарные точки: $y^*_{1,2}$, 0, $l^*_{1,2}$, из которых должна быть выбрана та, которая отвечает положительному значению длины $l^*_{1,2} = a(g \sin y^*_{1,2})^{-1}$. А именно, полагаем $y = y^*_{1,2}$ $(\sin y^*_{1,2} \gtrless 0)$, если $a \gtrless 0$.

Вопрос об устойчивости требует анализа корней характеристического уравнения, имеющего довольно громоздкий вид. В предельном случае $a = 0$ ($e = 0$) корни $y^*_1 = 0$, $y^*_2 = \pi$; из условия положительности l^* находим допустимое значение $y^* = y^*_2 = \pi$. Тогда $l^* = (\langle \Delta b^{*2} \rangle g^{-1})^{1/3}$, а характеристическое уравнение расщепляется на указанное выше квадратное и линейное. Из квадратного уравнения следует, что верхнее положение равновесия $y^* = \pi$ экспоненциально неустойчиво; аналогичная ситуация сохраняется для малых $a \neq 0$. Отметим, что верхнее положение равновесия может быть сделано асимптотически устойчивым посредством вибрации точки подвеса [3, 4, 6], см. ниже. Случай асимптотически больших a приводит к боковым положениям равновесия $y^*_{1,2} = \pm 1/2\pi + O(e^{-1})$, которые также оказываются экспоненциально неустойчивыми.

4.4. Маятник с вибрирующей точкой подвеса. Рассмотрим описанную в разд. 4.3 модель в предположении, что вместо осевого момента внешних сил $A + B$ на маятник действует кинематическое возбуждение, обусловленное плоскими колебаниями точки подвеса: $\xi = \xi(\nu t)$, $\eta = \eta(\nu t)$. Здесь ξ – горизонтальное, а η – вертикальное смещения. Уравнения движения типа (4.2)–(4.4) примут вид

$$Ml^2 \ddot{x} + Mgl \sin x = -2Ml\kappa E \dot{x} - K\dot{x} - Ml\nu^2 W \tag{4.11}$$

$$\dot{l} = \kappa E, \quad K = \mathrm{const}, \quad W = \xi'' \cos x + \eta'' \sin x$$

После введения аргумента $\theta = \nu t$ и деления на $Ml^2\nu^2$ и ν получим систему вида (4.5), в которой полагаем

$$\begin{gathered} p = l^{-1} W(\theta, x), \quad \xi'' = \varepsilon \xi''_*, \quad \eta'' = \varepsilon \eta''_* \\ q = -l^{-2}(gl \sin x + 2\kappa l E \varepsilon^{-1} \upsilon + k\varepsilon^{-1}\upsilon), \quad \upsilon = x' \\ d = \kappa E \equiv \kappa M[g \cos x + l(\varepsilon^{-1}\upsilon)^2] \end{gathered} \tag{4.12}$$

Введем вместо x, υ переменные y, u по формулам типа (2.5). Получим систему первого приближения, см. (3.6)

$$\begin{gathered} y' = \varepsilon[u + l^{-2} S(\theta, y)\kappa E], \quad S \equiv \chi_* \cos y + \eta_* \sin y \\ u' = \varepsilon l^{-2} (W'_x)^* S - \varepsilon l^{-1} V'_y (u + l^{-2} S\kappa E) + \\ + \varepsilon l^{-2} V\kappa E - \varepsilon l^{-2}[gl \sin y + (2l\kappa E + k)(u + l^{-1}V)] \\ l' = \varepsilon \kappa M[g \cos y + l(u + l^{-1}V)^2], \quad V = S'_\theta \end{gathered} \tag{4.13}$$

Система уравнений (4.13) имеет довольно громоздкий вид. После усреднения, используя периодичность S и равенство нулю средних от V и W по θ, получим существенно более простые уравения. Пусть для определенности точка подвеса совершает только вертикальные колебания по гармоническому закону $\eta_* = \eta_0 \sin \theta$ $(\xi_* \equiv 0)$. Отметим, что после введения параметра $\varepsilon = \nu^{-1}$ согласно (4.12) величины η_*, η_0 имеют размерность скорости. В медленном (исходном) времени t получим усредненную систему вида

$$\begin{gathered} \dot{y} = u, \quad \dot{l} = \kappa M(g \cos y + lu^2 + 1/2\, l^{-1}\eta_0^2 \sin^2 y) \\ \dot{u} = -1/2\, l^{-2}\eta_0^2 \sin y \cos y - gl^{-1} \sin y - l^{-2}ku - \\ -2\kappa M l^{-1} u(g \cos y + 3/2\, l^{-1} u \eta_0^2 \sin^2 + lu^2) \end{gathered} \tag{4.14}$$

Стационарные точки системы (4.14) определяются из уравнений ($u^* = 0$):

$$g \cos y + 1/2\, l^{-1}\eta_0^2 \sin^2 y = 0, \quad (1/2\, l^{-1}\eta_0^2 \cos y + g) \sin y = 0$$

Поскольку значения $y = 0, \pi$ не являются корнями, то после сокращения на $\sin y$ второго уравнения для определения y получаем соотношение $\sin^2 y = \cos^2 y$, из которого находим четыре значения $y^*_j = \pi/4 + 1/2\pi(j-1)$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Представляет интерес то обстоятельство, что стационарные значения y^*_j не зависят от параметров системы. Допустимое значение y^*_j определяется из условия $l^*_j > 0$, и, поскольку $l^*_j = -1/2\eta_0^2 g^{-1} \cos y^*_j$, принимаем $y^*_2 = 3\pi/4$ и $y^*_3 = 5\pi/4$; тогда $l^*_{2,3} = \eta_0^2 (2\sqrt{2}g)^{-1}$.

Значения $y^*_{1,4}$ приводят к отрицательным $l^*_{1,4}$. Далее, как и выше, проводится анализ устойчивости найденных положений равновесия; обычно одно из них экспоненциально неустойчиво, а другое устойчиво.

Рассмотрим предельный случай $\kappa = 0$, т.е. $l = \mathrm{const}$. Тогда получаем хорошо изученную [3, 4] систему (4.14) для y, u. Стационарное значение $u^* = 0$, а для определения y^* имеем уравнение $\sin y(\frac{1}{2}\eta_0^2 \cos y + gl) = 0$. Отсюда следует, что $y_1^* = 0$, $y_2^* = \pi$, причем y_1^* – асимптотически устойчивое нижнее положение равновесия. Верхнее положение y_2^* экспоненциально неустойчиво, если $gl > \frac{1}{2}\eta_0^2$; оно становится асимптотически устойчивым при $\frac{1}{2}\eta_0^2 > gl$. Тогда между верхним y_2^* и нижним y_1^* устойчивыми положениями появляются два экспоненциально неустойчивых, определяемых корнями сомножителя в скобках: $y_{3,4}^* = \pm\arccos(-2gl\eta_0^{-2})$. Случай $\frac{1}{2}\eta_0^2 = gl$ является критическим; значение $y_1^* = 0$ отвечает асимптотически устойчивому равновесию; значениям $y_2^* = y_3^* = y_4^* = \pi$ отвечает один нулевой характеристический показатель (другой отрицателен). Аналогичный результат получается для случая переменного l, изменяющегося согласно уравнению $\dot{l} = c(l_0 - l)$ или сходным образом.

В заключение рассмотрим случай произвольных плоских вибраций точки подвеса при постоянной длине l. Из (4.13) следуют усредненные уравнения для y, u:

$$\dot{y} = u, \quad \dot{u} = l^{-2}[\tfrac{1}{2}(\langle\xi_*'^2\rangle - \langle\eta_*'^2\rangle)\sin 2y - \langle\xi_*'\eta_*'\rangle\cos 2y - gl\sin y - \kappa u] \qquad (4.15)$$

Положения равновесия системы (4.15) определяются корнями уравнения ($\dot{u}^* = 0$), которое приводится к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно неизвестной $\sin y$. При помощи элементарных тригонометрических преобразований его можно представить в виде трансцендентного соотношения $\sin y = \rho\sin(2y + \varphi)$, где $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ – постоянные, определяемые коэффициентами уравнения. Оно может быть исследовано и решено графическими и численными методами путем построения однопараметрического семейства кривых, например, вида $\rho^{-1} = \sin(2y + \varphi)/\sin y$, где $0 \leq y < 2\pi$ – аргумент, $0 \leq \varphi < 2\pi$ – параметр.

Пусть вибрации таковы, что $\langle\xi_*'\eta_*'\rangle = 0$; тогда имеет место ситуация, аналогичная рассмотренной. Значения y_j^* определяются уравнением $\sin y(1 + \alpha\cos y) = 0$, однако здесь величина $\alpha = (\langle\eta_*'^2\rangle - \langle\xi_*'^2\rangle)(gl)^{-1}$ может быть положительной, отрицательной или нулем. При $|\alpha| < 1$ имеется две стационарные точки: $y_1^* = 0$ – асимптотически устойчивая и $y_2^* = \pi$ – экспоненциально неустойчивая. Если $\alpha > 1$, то оба эти положения равновесия устойчивы, а дополнительные точки $y_{3,4}^* = \pm\arccos(-\alpha^{-1})$ – неустойчивы (экспоненциально). Далее, если $\alpha < -1$, то нижнее и верхнее положения $y_{1,2}^*$ будут неустойчивыми, а боковые $y_{3,4}^*$ – асимптотически устойчивыми. При $\alpha = 1$ нижнее положение равновесия y_1^* остается устойчивым (как и для $\alpha > 1$), а верхнее y_2^* – нет (критический случай). Наконец, если $\alpha = -1$, то верхнее положение y_2^* экспоненциально неустойчиво, а нижнему отвечает критическая ситуация.

Отметим, что равенство $\langle\xi_*', \eta_*'\rangle = 0$ имеет, в частности, место при $\xi_*' \equiv 0$ или $\eta_*' \equiv 0$. Случай $\xi_*' \equiv 0$ рассмотрен ранее; для него $\alpha = \langle\eta_*'^2\rangle(gl)^{-1} > 0$. Если происходят горизонтальные колебания ($\eta_*' \equiv 0$), то $\alpha = -\langle\xi_*'^2\rangle(gl)^{-1} < 0$. В общем случае это означает, что функции $\xi_*'(\theta)$, $\eta_*'(\theta)$ "ортогональны", например, ξ_*' – нечетная, а η_*' – четная функции θ. Можно для определенности взять движение точки подвеса по эллипсу: $\xi_* = \xi_0\cos\theta$, $\eta_* = \eta_0\sin\theta$, где ξ_0, η_0 – полуоси. Тогда $\langle\xi_*'\eta_*'\rangle = 0$, а параметр $\alpha = \frac{1}{2}(\eta_0^2 - \xi_0^2)(gl)^{-1}$ может принимать любые значения, см. выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. *Акуленко Л.Д.* О некоторых вращательно-колебательных системах, подверженных высокочастотным возмущениям // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 1133–1139.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
6. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.1.1993