

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В КУБИЧЕСКОМ МОНОКРИСТАЛЛЕ

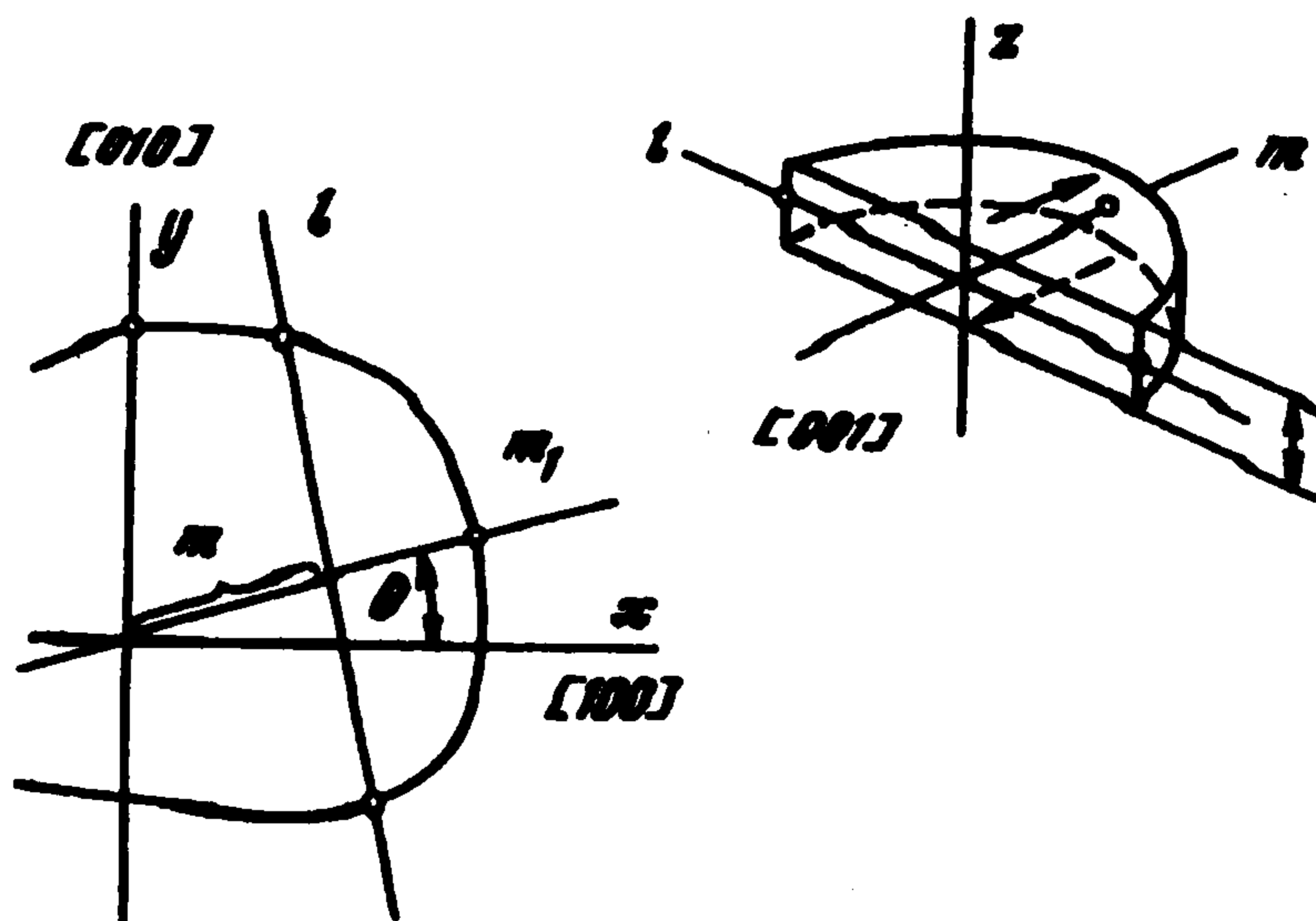
Дается математическое обоснование способа определения остаточных напряжений в длинных кубических монокристаллах, находящихся в состоянии плоской упругой деформации. В качестве исходной информации выступают значения абсолютной и относительной разностей хода лучей, измеренных томографическим методом в плоскости, ортогональной к оси образца.

Перспективным направлением разработки неразрушающих способов определения напряжений в монокристаллах является применение методов интегральной фотоупругости (ИФУ) [1]. Эти методы основаны на совместном решении задачи оптической томографии тензорного поля напряжений и возникающей при этом задачи теории упругости [2, 3]. По сравнению с изотропными объектами решение этих двух задач для монокристаллов существенно усложняется наличием естественной анизотропии [4]. В первой задаче это связано с несовпадением квазиглавных направлений тензора напряжений и тензора диэлектрической проницаемости [5]. Во второй – с тем, что даже в состоянии безградиентного распределения напряжений вдоль оси призмы уравнения кручения и плоской упругой деформации не разделяются. При просвечивании в плоскости упругой симметрии влияние анизотропии уменьшается [6]. Потенциальные возможности метода в этом случае продемонстрированы на конкретных примерах реконструкции осесимметричных напряжений в цилиндрах [6, 7].

В развитие метода ИФУ [8] ниже рассматривается задача определения остаточных напряжений в длинном кубическом монокристалле, ось которого совпадает с кристаллографическим направлением [001]. Предполагается, что образец получен при стационарных технологических условиях, так что в средней части образца распределение напряжений соответствует состоянию плоской упругой деформации $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$. Обычно влияние концевых эффектов становится незначительным на расстояниях одного-двух диаметров, а изменение напряжений по длине образца обуславливаются только нестабильностью процесса роста кристалла.

Ранее задача в такой постановке рассматривалась только в случае осесимметричного распределения напряжений [6, 7] или при условии, что тензор остаточных деформаций шаровой и может описываться одним параметром – фиктивной температурой [9]. Ниже, чтоб избежать этих ограничений, помимо относительной разности хода предполагается проводить измерение и абсолютной. Вопросы измерения этого параметра и его использования для реконструкции напряжений в изотропных телах неоднократно обсуждались в литературе [10–12].

1. Введем ортогональную систему координат x, y, z и направим ее оси вдоль кристаллографических направлений [100], [010], [001] так, чтобы направление оси z совпадало с образующей монокристаллического образца (фигура). Кроме того, введем подвижную ортогональную систему координат l, m, z , повернутую относительно первоначальной на угол θ так, что направление просвечивания совпадало с направлением оси



1. При просвечивании в плоскости $z = \text{const}$ отсутствует вращение квазиглавных направлений тензора диэлектрической проницаемости. Задача оптической томографии упрощается. Показатели преломления лучей, поляризованных вдоль плоскости просвечивания

$$n_m = n + \pi_{m1}\sigma_{mm} + \pi_{m2}\sigma_{ll} + \pi_{m3}\sigma_{zz} + \pi_{m6}\sigma_{ml}$$

и ортогонально ей

$$n_n = n + \pi_{z1}\sigma_{mm} + \pi_{z2}\sigma_{ll} + \pi_{z3}\sigma_{zz} + \pi_{z6}\sigma_{ml}$$

определяют абсолютную

$$K(m, \theta) = \frac{1}{2} \int (n_m + n_n) dl$$

и относительную

$$\delta(m, \theta) = \int (n_m - n_n) dl = A(m, \theta, z)$$

разности хода, измеренные на луче. Здесь n – показатель преломления кристалла в свободном от напряжения состоянии, π_{ik} – упругооптический тензор четвертого порядка [13]. Среда считается однородной, поэтому эти коэффициенты зависят только от угла θ и могут быть вынесены за знак интеграла. Выражения для абсолютной и относительной разностей хода преобразуются:

$$K(m, \theta) = n\Delta l + f_1(m, \theta), \quad \delta(m, \theta) = f_2(m, \theta) \quad (1.1)$$

$$f_k(m, \theta) = \pi_{k1} \int \sigma_{mm} dl + \pi_{k2} \int \sigma_{ll} dl + \pi_{k3} \int \sigma_{zz} dl + \pi_{k6} \int \sigma_{ml} dl, \quad k = 1, 2$$

$$\pi_{1i} = \pi_{mi} + \pi_{zi}, \quad \pi_{2i} = \pi_{mi} - \pi_{zi}$$

и выражаются только через лучевые интегралы от напряжений.

Здесь Δl – длина луча в кристалле. Дальнейшее упрощение задачи будем проводить на основе условия макростатики (интегрирование ведется по S – площади сечения призмы)

$$\int \sigma_{zz} ds = 0 \quad (1.2)$$

и уравнений равновесия. Удовлетворим последним введением функции Эйри F (δ_{ij} – символ Кронекера)

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \Delta F - \partial^2 F / \partial i \partial j$$

Из условия незагруженности боковой поверхности следует, что сама функция Эйри F и ее нормальная производная $\partial F / \partial n$ на контуре области равны нулю [14], поэтому лучевые интегралы

$$\int \sigma_{mm} dl = \int \frac{\partial^2 F}{\partial l^2} dl = \int \sigma_{lm} dl = - \int \frac{\partial^2 F}{\partial l \partial m} dl = 0$$

а выражения (1.1) содержат только интегралы от компонент тензора напряжений σ_{zz}, σ_{ll} .

Из условия макростатики (1.2) и соотношения $\int \sigma_{ll} ds = \int (\int \sigma_{ll} dm) dl = 0$ определяется показатель преломления кристалла

$$n = \int K(m, \theta) dm / S$$

а следовательно, по измерениям параметров $K(m, \theta)$ и $\delta(m, \theta)$ можно определить отдельно преобразование Радона от σ_{zz} и от инварианта $\sigma_{mm} + \sigma_{ll} = \Delta F$

$$\int \sigma_{ll} dl = \int \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} dl = \int \Delta F dl$$

Таким образом, как и в случае изотропной среды [8], значения σ_{zz} и

$$\Delta F = f(x, y) \quad (1.3)$$

находятся из обращения преобразования Радона линейной комбинации лучевых интегралов (1.1), а трансверсальные компоненты тензора напряжений – из решения уравнения Пуассона (1.3) с переопределенными условиями $F = \partial F / \partial n = 0$ на контуре. Переопределенность краевых условий можно использовать для уменьшения погрешностей реконструкции напряжений [8].

2. В случае слабого вращения квазиглавных направлений на луче (плавного изменения напряжений вдоль оси образца) по измеренным характеристической разности фаз δ и параметру изоклины ψ можно определить лучевые интегралы [4, 15, 16]

$$\delta \cos 2\psi = \int (n_m - n_z) dl = A(m, \theta, z), \quad \delta \sin 2\psi = \int n_{mz} dl = C \int \sigma_{mz} dl = CH(m, \theta, z) \quad (2.1)$$

Непосредственно из условия равновесия элемента S в направлении z получаем интегральное соотношение [3]

$$\int \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial m} H(m, \theta, z) \quad (2.2)$$

сводящее задачу нахождения $\partial \sigma_{zz} / \partial z$ к стандартной процедуре обращения преобразования Радона.

Определение компонент тензора напряжений будем проводить послойно, двигаясь вдоль образца от сечения с известным распределением напряжений. При такой методике значения интеграла (2.2) позволяют восстановить σ_{zz} во всем образце и исключить эту компоненту тензора напряжений из интегралов K и A . Следовательно, используя линейную комбинацию лучевых интегралов $K(m, \theta, z)$, $A(m, \theta, z)$ и условие равновесия элемента S в направлении m [3]

$$\int \sigma_{mm} dl = \frac{\partial}{\partial z} \int_m^{m_1} H(k, \theta, z) dk \quad (2.3)$$

определение компонент $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ можно свести к стандартной процедуре обращения преобразования Радона. Верхний предел m_1 в интеграле является значением проекции одной из крайних точек контура на ось m . Напомним, что вышеуказанные компоненты тензора напряжений являются линейной комбинацией компонент $\sigma_{ii}, \sigma_{im}, \sigma_{mm}$, входящих в лучевые интегралы (2.1), (2.3).

Приращения касательных компонент после этого определяются из уравнений равновесия

$$-\partial \sigma_{iz} / \partial z = \partial \sigma_{ij} / \partial j + \partial \sigma_{ii} / \partial i; \quad i, j = x, y$$

Таким образом, рассматриваемая методика позволяет определить напряжения в кубическом монокристалле полностью не только в случае плоской деформации, но и при наличии слабого изменения напряжений вдоль оси образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абен Х.К.* Интегральная фотоупругость. Таллинн: Валгус, 1975. 218 с.
2. *Aben H., Idnurm S., Puro A.* Integrated photoelasticity in case of weak birefringence // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. 1990. Т. 39. Вып. 3. С. 268–275.
3. *Пуро А.Э.* Интегральная фотоупругость линейно деформируемых цилиндрических образцов // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 41–48.
4. *Aben H., Brosman E.* Integrated photoelasticity of cubic single crystals // VDI – Berichte. 1978. N. 313. P. 45–51.
5. *Иднурм С., Иозепсон Ю.* К исследованию напряжений в трехмерных кубических кристаллах методом фотоупругости // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. 1985. Т. 34. № 2. С. 191–197.
6. *Aben H.* Integrated photoelasticity axisymmetric of cubic single crystals // Photoelasticity in engineering practice / Ed. by S.A. Paipetis, G.S. Holister. London: Elsevier, 1985. P. 103–132.
7. *Иднурм С.* Определение напряжений в цилиндре из кубического монокристалла с помощью инверсии Абея // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. 1986. Т. 35. № 2. С. 172–179.
8. *Puro A., Kell K.-J.* Complete determination of stress in fiber preforms of arbitrary cross-section // J. Lightwave Technology. 1992. V. 10. N 8. P. 1010–1014.
9. *Пуро А.Э.* К интегральной фотоупругости монокристаллов // Оптика и спектроскопия. 1992. Т. 72. Вып. 5. С. 1127–1131.
10. *Абен Х.К., Келл К.-Ю.Э.* Интегральная градиентная фотоупругость тел вращения // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 9. С. 11–15.
11. *Пуро А.Э.* Оптическая томография внутренних напряжений // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 51–55.
12. *Andrienko Yu.A., Dubovikov M.S., Gladun A.D.* Optical tomography of a birefringent medium // J. Optical Society of America Ser. A. 1992. V. 9. № 10. P. 1761–1764.
13. *Александров А.Я., Ахметзянов М.Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
14. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
15. *Aben H.K., Josepson J.I., Kell K.-J., E.* The case of weak birefringence in integrated photoelasticity // Optics and lasers in engineering. 1989. V. 11. № 3. P. 145–157.
16. *Келл К.-Ю.Э., Пуро А.Э.* Приближение очень слабой оптической анизотропии в теории интегральной фотоупругости // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 70. Вып. 2. С. 390–399.