Изложенный метод может быть также распространен на задачу дифракции произвольной акустической волны на цилиндре с поперечным сечением в виде многоугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Третьяков П.В.* Интегральные решения волнового уравнения и задача дифракции произвольной акустической волны на клине // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 250–255.
2. *Kay I.* The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge // Comm. on Pure and Appl. Math. 1953. V. 6. N 3. P. 419–434.
3. *Боровиков В.А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 455 с.
4. *Сагомонян А.Я., Поручиков В.Б.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1970. 120 с.
5. *Филиппов А.Ф.* Точные выражения для многократно дифрагированной волны с круговым фронтом // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1083–1091.
6. *Филиппов А.Ф.* Интегральные представления решений двумерного волнового уравнения и дифракционные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17. № 3. С. 718–728.

Калининград, Моск. обл.

Поступила в редакцию
26.XI.1993

УДК 539.3:534.222

© 1994 г. В.С. Поленов, А.В. Чигарев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В рамках трехмерной линеаризованной теории упругости [1] с использованием теории разрывов [2] строится замкнутая система определяющих уравнений для динамических и геометрических величин в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями. Геометрические характеристики фронта волны и луча в неограниченной среде с начальными напряжениями получены из принципа функционала Ферма [3].

Ранее [4, 5] рассматривалось распространение волн и был дан расчет интенсивности волновых фронтов в линейной неоднородной вязкоупругой среде с непрерывным изменением параметров среды, зависящими от пространственных координат, без учета начальных напряжений.

1. Связь между тензорами напряжений и деформаций для неоднородной вязкоупругой среды запишем в виде [6]

$$\sigma_{im} = \lambda_1 e_{kk}\delta_{im} + 2\mu_1 e_{im} \tag{1.1}$$

где λ_1 и μ_1 – линейные интегральные операторы, ядра которых зависят непрерывным образом от пространственных координат

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda(1+\Lambda), \quad \Lambda e = \int_0^\infty \Lambda(t', x_i)\, e(t-t')dt' \\ &\mu_1 = \mu(1+\mathrm{M}), \quad \mathrm{M}e = \int_0^\infty \mathrm{M}(t', x_i)\, e(t-t')dt' \end{aligned} \tag{1.2}$$

Соотношения (1.1) и (1.2) вместе с уравнениями движения, записанными в линеаризованной форме в эйлеровых координатах [1]

$$\sigma_{im,i} - \left(u_{m,n}\sigma^0_{in}\right)_{,i} = \rho\ddot{u}_m \quad (m \neq n) \tag{1.3}$$

и формулами Коши

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{1.4}$$

представляют замкнутую систему для описания процесса динамического деформирования неоднородной бесконечной вязкоупругой среды с начальными напряжениями.

В формулах (1.2)–(1.4) $\rho(x_i)$, $\lambda(x_i)$, $\mu(x_i)$ – функции пространственных координат, σ^0_{in} – компоненты тензора начальных напряжений, ρ – плотность среды в неограниченном ненапряженном состоянии, u_i – компоненты вектора перемещений.

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование от единицы до трех, по греческим – от единицы до двух.

Волна скачка напряжений в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями определяется изолированной поверхностью $\Sigma(t)$, на которой перемещения и параметры среды непрерывны, а напряжения, скорости перемещений и начальные напряжения терпят разрыв.

На волновой поверхности $\Sigma(t)$ при учете начальных напряжений должны выполняться динамические соотношения

$$\left[\sigma_{ij}\right]\nu_i = \rho G\left[v_j\right] + \left[u_{j,n}\sigma^0_{in}\right]\nu_i \tag{1.5}$$

Здесь ν_i – компоненты единичного вектора нормали к $\Sigma(t)$, $G(x_i)$ – нормальная скорость движения поверхности $\Sigma(t)$ в рассматриваемой среде при учете начальных напряжений, $[f] = f^+ - f^-$ означает разрыв функции f (f^+ – значение функции на передней, f^- – на задней стороне поверхности $\Sigma(t)$, где $f^- = 0$ в связи с тем, что часть среды, примыкающая к задней стороне поверхности $\Sigma(t)$, находится в покое и деформации в ней отсутствуют (волна разгрузки, т.е. в этом случае выражение в квадратных скобках сводится к значению рассматриваемой величины на передней стороне поверхности).

Из реологических соотношений (1.1), записанных на разрывах, динамических (1.5) и кинематических условий совместности первого порядка [2]

$$\left[u_{i,j}\right] = \left[v_i\right]\nu_j / G, \quad \left[v_i\right] = \left[\partial u_i / \partial t\right] \tag{1.6}$$

следует, что в рассматриваемой среде существуют продольные и поперечные волны, для которых

$$\omega_i^{(p)} = \omega^{(p)}\nu_i, \quad \omega_i^{(t)}\nu_i = 0 \tag{1.7}$$

где $\omega_i^{(l)}$ ($l = p, t$) – компоненты вектора амплитуды $[v_i]$. Локальные скорости распространения этих волн соответственно таковы:

$$G_p^2 = c_p^2\left(1-\lambda_p^2\right), \quad G_t^2 = c_t^2\left(1-\lambda_t^2\right) \tag{1.8}$$

$$\lambda_p^2 = \left[\sigma^0_{in}\right]\nu_i\nu_n / \Lambda_p, \quad \lambda_t^2 = \left[\sigma^0_{in}\right]\nu_i\nu_n / \Lambda_t$$

$$\Lambda_p = \lambda + 2\mu, \quad \Lambda_t = \mu, \quad \rho c_p^2 = \Lambda_p, \quad \rho c_t^2 = \Lambda_t$$

Здесь c_p и c_t – скорости продольной и поперечной волн в неоднородной вязкоупругой среде без начальных напряжений.

Дифференцируя соотношения (1.1) по t и взяв их разность на разных сторонах поверхности разрыва, находим

$$\left[\dot\sigma_{ij}\right] = \lambda\left[\dot e_{kk}\right]\delta_{ij} + 2\mu\left[\dot e_{ij}\right] - \lambda\Lambda(0,x_i)\left[e_{kk}\right]\delta_{ij} - 2\mu M(0,x_i)\left[e_{ij}\right] \tag{1.9}$$

Запишем в разрывах уравнения движения (1.3)

$$\left[\sigma_{ij,i}\right] - \left[u_{j,ni}\sigma^0_{in}\right] - \left[u_{j,n}\sigma^0_{in,i}\right] = \left[\rho\frac{dv_j}{dt}\right] \tag{1.10}$$

Учитывая условия совместности первого порядка, формулы Коши (1.4) и условие

$$\left[u_{j,ni}\right] = G^{-3}\left(\left[v_j\right]\delta G/\delta t - G\delta\left[v_j\right]/\delta t - G^2 L_j\right)\nu_i\nu_n \tag{1.11}$$

запишем выражения (1.9) и (1.10) следующим образом:

$$\delta\left[\sigma_{ij}\right]/\delta t - M_{ij}G = \lambda\delta_{ij}\left(L_k\nu_k + g^{\alpha\beta}\left[v_k\right]_{\alpha}x_{k,\beta}\right) + \mu\left(L_i\nu_j + L_j\nu_i\right) +$$

$$+\mu g^{\alpha\beta}\left(\left[v_i\right]_{\alpha}x_{j,\beta} + \left[v_j\right]_{\alpha}x_{i,\beta}\right) + \lambda G^{-1}\Lambda(0,x_i)\left[v_k\right]\nu_k\delta_{ij} + \mu G^{-1}M(0,x_i)\left(\left[v_i\right]\nu_j + \left[v_j\right]\nu_i\right) \tag{1.12}$$

$$M_{ij}\nu_i + g^{\alpha\beta}\left[\sigma_{ij}\right]_{,\alpha} x_{i,\beta} + G^{-1}L_j\left[\sigma_{in}^0\right]\nu_i\nu_n + G^{-1}\left[\sigma_{in,i}^0\right]\left[v_j\right]\nu_n +$$

$$+G^{-3}\left(G\delta\left[v_j\right]/\delta t - \left[v_j\right]\delta G/\delta t\right)\left[\sigma_{in}^0\right]\nu_i\nu_n = \rho\left(\delta\left[v_j\right]/\delta t - GL_j\right)$$

Величины M_{ij} и L_i определены на поверхности $\Sigma(t)$ и характеризуют скачки первых производных напряжений и скоростей перемещений соответственно, $g^{\alpha\beta}$ – контрвариантные коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы, $x_{i,\beta}$ – производные декартовых координат x_i по криволинейным координатам y_β поверхности ($\beta = 1, 2$), $\delta/\delta t - \delta$ – производная по времени [2].

Для исключения из уравнений (1.12) величины M_{ij}, первое из них умножим на ν_i, второе на G и результаты сложим, а затем используем динамические соотношения (1.5). Получим:

$$(\lambda+\mu)L_k\nu_k\nu_m + \left(\mu-\rho G^2\right)L_m + 2\rho G\delta\omega_m/\delta t - 2(\lambda+\mu)\Omega\omega_k\nu_k\nu_m + (\lambda+\mu)g^{\alpha\beta}x_{m,\beta}\left(\omega_k\nu_k\right)_{,\alpha} -$$

$$-2\mu\Omega\omega_m + \rho(\delta G/\delta t)\omega_m + g^{\alpha\beta}\left(\lambda_{,\alpha}x_{m,\beta}\omega_k\nu_k + \mu_{,\alpha}x_{i,\beta}\omega_i\nu_m\right) + G^{-1}\left(\delta\left[\sigma_{in}^0\right]/\delta t\right)\omega_m\nu_i\nu_n +$$

$$+G^{-1}\left[\sigma_{in}^0\right]\left(\left(\delta\nu_n/\delta t\right)\omega_m\nu_i - G_{,\alpha}g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}\omega_m\nu_n\right) - L_m\left[\sigma_{kn}^0\right]\nu_k\nu_n -$$

$$-\left[\sigma_{in,i}^0\right]\omega_m\nu_n + G^{-1}\left(\lambda\Lambda\left(0,x_i\right)\omega_k\nu_k\nu_m + \mu M\left(0,x_i\right)\left(\omega_m + \omega_k\nu_k\nu_m\right)\right) = 0 \tag{1.13}$$

При выводе учитывались соотношения

$$\nu_{k,\alpha} = -g^{\sigma\tau}b_{\sigma\alpha}x_{k,\tau}, \quad g^{\alpha\beta}g^{\sigma\tau}b_{\alpha\tau}x_{j,\tau}x_{j,\beta} = 2\Omega$$

$$x_{k,\alpha}\nu_k = 0, \quad \nu_i\delta\nu_i/\delta t = 0$$

где Ω – средняя кривизна волновой поверхности, $b_{\sigma\alpha}$ – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $\Sigma(t)$.

Умножая равенство (1.13) на ν_m и суммируя по повторяющемуся индексу, а затем учитывая первые формулы (1.7), (1.8), получим дифференциальное уравнение для продольной волны. Для поперечной волны, на которой $\omega_i^{(t)}\nu_i = 0$, при учете второй формулы (1.8) преобразуем соотношение (1.13). Переходя затем к переменной $s \geqslant 0$, означающей расстояние вдоль нормалей к поверхности $\Sigma(t_0)$, получим уравнения для изменения амплитуды продольной и поперечной волн в процессе их распространения

$$\frac{d\omega^{(l)}}{ds} = \left\{\Omega_l - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(c_l\left(1-\lambda_l^2\right)^{1/2}\right) + \frac{\left[\sigma_{in}^0\right]\nu_i\nu_n}{\rho c_l^2\left(1-\lambda_l^2\right)}\Omega_l - \frac{B_l}{2\rho c_l^3\left(1-\lambda_l^2\right)^{3/2}}\right\}\omega^{(l)} \quad (l = p, t) \tag{1.14}$$

$$B_p = \lambda\Lambda(0,s) + 2\mu M(0,s), \quad B_t = \mu M(0,s)$$

В качестве неизвестной функции уравнения (1.14) содержат геометрический инвариант Ω_l – среднюю кривизну фронта волны, и следовательно, они незамкнуты. Согласно полученным ранее результатам [7, 8] и формулам (1.8) получим уравнение для Ω_l в лучевой системе координат

$$d\Omega_l/ds = 2\Omega_l^2 - K_l - {}^1\!/_2\left(Q_1 - Q_2 - R_1\right)$$

$$Q_1 = c_l^{-1}g^{\alpha\beta}\left(1-\lambda_l^2\right)^{-1}c_{l,\alpha\beta}, \quad Q_2 = g^{\alpha\beta}\lambda_l\left(c_l\left(1-\lambda_l^2\right)\right)^{-1}\left(\lambda_l c_l\right)_{,\alpha\beta} \tag{1.15}$$

$$R_1 = g^{\alpha\beta}\lambda_l^2\left(1-\lambda_l^2\right)^{-2}\left(\ln\lambda_l\right)_{,\alpha}\left(\ln\lambda_l\right)_{,\beta}$$

где K_l – гауссова кривизна поверхности $\Sigma(t)$, которая определяется из уравнения

$$dK_l/ds = 2\Omega_l K_l + 2\Omega_l\left(Q_1 - Q_2 - R_1\right) - P_1 + P_2 + R_2$$

$$P_1 = c_l^{-1}b^{\alpha\beta}c_{l,\alpha\beta}(1-\lambda_l^2)^{-1}, \quad P_2 = b^{\alpha\beta}\lambda_l(c_l(1-\lambda_l^2))^{-1}(\lambda_l c_l)_{,\alpha\beta} \tag{1.16}$$

$$R_2 = b^{\alpha\beta}\lambda_l^2\left(1-\lambda_l^2\right)^{-2}\left(\ln\lambda_l\right)_{,\alpha}\left(\ln\lambda_l\right)_{,\beta}$$

Уравнения траектории луча находим из принципа функционала Ферма при учете соотношений (1.8)

$$d\nu_i / ds = -g^{\alpha\beta}\chi_{l,\alpha}x_{i,\beta}, \quad \nu_i = dx_i / ds$$

$$dx_{i,\alpha} / ds = \chi_{l,\alpha}\nu_i - g^{\delta\gamma}b_{\delta\alpha}x_{i,\gamma}, \quad \chi_l = \ln\left(c_l\left(1-\lambda_l^2\right)^{1/2}\right)$$

Ковариантные и контрвариантные компоненты первой и второй квадратичных форм поверхности при учете начальных напряжений удовлетворяют уравнениям [2, 8]

$$db_{\alpha\beta} / ds = \chi_{l,\alpha\beta} + \chi_{l,\alpha}\chi_{l,\beta} - g^{\eta\delta}b_{\alpha\eta}b_{\beta\delta}$$

$$db^{\alpha\beta} / ds = g^{\alpha\eta}g^{\beta\delta}\left(\chi_{l,\eta\delta} + \chi_{l,\eta}\chi_{l,\delta}\right) + 3g_{\eta\delta}b^{\alpha\eta}b^{\beta\delta}$$

$$dg_{\alpha\beta} / ds = -2b_{\alpha\beta}, \quad dg^{\alpha\beta} / ds = 2b^{\alpha\beta}$$

При заданных функциях c_l, λ_l и начальных значениях ω_0, Ω_0, K_0, $b^0_{\alpha\beta}$, $b_0^{\alpha\beta}$, $g^0_{\alpha\beta}$, $g_0^{\alpha\beta}$ система имеет единственное решение.

Исключая из уравнений (1.15), (1.16) гауссову кривизну K, получим

$$\ddot{\Omega} - 6\Omega\dot{\Omega} + 4\Omega^3 = -3\Omega\left(Q_1 - Q_2 - R_1\right) + \tfrac{1}{2}\left(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 - \dot{R}_1\right) + P_1 - P_2 - R_2 \quad \left(\dot{\Omega} = d\Omega / ds\right) \qquad (1.17)$$

Решая уравнения (1.16) и (1.17) методом последовательных приближений при $n = 0, 1, 2, \ldots$, получим, что нулевое приближение соответствует однородной среде [2]. Решение уравнений первого приближения при нулевых начальных условиях будет $\Omega^{(1)} = K^{(1)} = 0$. Решения уравнений для $\Omega^{(2)}$ и $K^{(2)}$ имеют довольно громоздкий вид, поэтому рассмотрим случай, когда $\Omega_0 = K_0 = 0$, т.е. волна в начале является плоской. В этом случае $\Omega^{(0)} = K^{(0)} = \Omega^{(1)} = K^{(1)} = 0$, и во втором приближении получим

$$\Omega = \Omega^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^s \left(Q_1(s) - Q_2(s) - R_1(s)\right) ds - \int_0^s K^{(2)}(s)ds \qquad (1.18)$$

$$K = K^{(2)} = -\int_0^s \left(P_1(s) - P_2(s) - R_2(s)\right) ds$$

Определим уровень амплитуды ω, удовлетворяющий уравнению (1.14). Для этого в качестве параметра, определяющего порядок приближений, берем величину градиента $G_l = c_l\left(1-\lambda_l^2\right)^{1/2}$. Тогда $d\chi_l/ds$ имеет первый, а $\chi_{l,\alpha}$ и $\chi_{l,\beta}$ – второй порядок. Нулевому приближению соответствует однородная среда. В первом приближении учитывается скорость изменения неоднородности вязкоупругой среды с начальными напряжениями вдоль луча, а во втором – скорость изменения неоднородности вязкоупругой среды с начальными напряжениями поперек луча.

Подставляя $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \ldots$ в (1.14) и решая методом приближений, получим:

$$d\omega^{(0)} / ds = \Omega^{(0)}(s)\omega^{(0)}, \quad d\omega^{(1)} / ds = \Omega^{(0)}\omega^{(1)} + \left(\Omega^{(1)} - f^{(1)}\right)\omega^{(0)}$$

$$d\omega^{(2)} / ds = \Omega^{(0)}\omega^{(2)} + \left(\Omega^{(1)} - f^{(1)}\right)\omega^{(1)} + \left(\Omega^{(2)} - g^{(1)}\Omega^{(1)}\right)\omega^{(0)} \qquad (1.19)$$

$$f^{(1)} = \tfrac{1}{2}d\chi_l / ds + g_l^{(1)}\Omega^{(0)} + B_l\left(2\rho c_l^3\left(1-\lambda_l^2\right)^{3/2}\right)^{-1}$$

$$g_l^{(1)} = -\left(\rho c_l^2\left(1-\lambda_l^2\right)\right)^{-1}\left[\sigma^0_{in}\right]\nu_i\nu_n$$

Для уравнений (1.19) ставим начальные условия

$$\omega^{(0)}(0) = \omega_0^{(0)}, \quad \omega^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (1.20)$$

Решение уравнений (1.19) при учете (1.20) и $\Omega^{(1)}(0) = 0$ запишем в виде

$$\omega^{(0)} = \frac{\omega_0^{(0)}}{\sqrt{\Psi}}, \quad \omega^{(1)} = -\frac{\omega_0^{(0)}}{\sqrt{\Psi}}\int_0^s f^{(1)}(s_1)ds_1$$

$$\omega^{(2)} = \frac{\omega_0^{(0)}}{\sqrt{\Psi}}\left\{\int_0^s\int_0^s f^{(1)}(s_1)f^{(1)}(s_2)ds_1 ds_2 - \int_0^s \Omega^{(2)}(s_2)ds_2\right\} \qquad (1.21)$$

$$\Psi = 1 - 2\Omega_0 s + K_0 s^2$$

2. Рассмотрим слоистую вязкоупругую среду с начальными напряжениями, характеризующуюся упругими модулями $\lambda(x)$, $\mu(x)$, плотностью $\rho(x)$, ядрами релаксации $\Lambda(0,x)$, $M(0,x)$ и начальными напряжениями σ_{ij}^0.

В момент времени $t=0$ в плоскости y, z происходит расслоение среды. Волна разгрузки распространяется вдоль оси x. Тогда скорость распространения волны из (1.8) будет иметь вид

$$G_p(x) = c_p(x)\left(1-\lambda_p^2(x)\right)^{1/2}, \quad \lambda_p^2 = \left[\sigma_{xx}^0\right]/(\lambda+2\mu) \tag{2.1}$$

Так как $g_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}=0$ и при $x=0$, $\Omega_0=K_0=0$, то из уравнений (1.15), (1.16) получаем, что $\Omega=K=0$, а из уравнения (1.14) находим зависимость уровня интенсивности волны от скорости, ядер релаксации и начальных напряжений

$$\omega^{(p)} = \omega_0^{(p)}\left(c_p\left(1-\lambda_p^2\right)^{1/2}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\lambda\Lambda(0,x)+2\mu M(0,x)}{\rho c_p^3\left(1-\lambda_p^2\right)^{3/2}}dx\right\} \tag{2.2}$$

где $\omega_0^{(p)}$ – значение функции $\omega^{(p)}$ при $x=0$.

Задавая в (2.2) вид $c_p(x)$, $\Lambda(0,x)$, $M(0,x)$ и $[\sigma_{xx}^0]$, получаем характер изменения уровня интенсивности волны в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 373 с.; Т. 2. 535 с.
2. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
3. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
4. *Блитштейн Ю.М., Мешков С.И., Чигарев А.В.* Распространение волн в линейной вязко-упругой неоднородной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 40–47.
5. *Лимарев А.Е., Мешков С.И., Чигарев А.В.* К расчету интенсивности волновых фронтов в неоднородной вязко-упругой среде // Механика деформируемого твердого тела. Куйбышев: Изд. Куйбышевск. ун-та, 1975. Вып. 1. С. 104–107.
6. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
7. *Поленов В.С., Чигарев А.В.* О распространении волн в неоднородной вязкоупругопластической среде // Методы математической физики в механике структурных сплошных сред. Воронеж: Изд. Воронеж. гос. пед. ин-та, 1976. С. 93–94.
8. *Чигарев А.В.* К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 6. С. 905–912.

Воронеж

Поступила в редакцию
10.VIII.1993