

УДК 533.6.011:534.2

© 1994 г. П.В. Третьяков

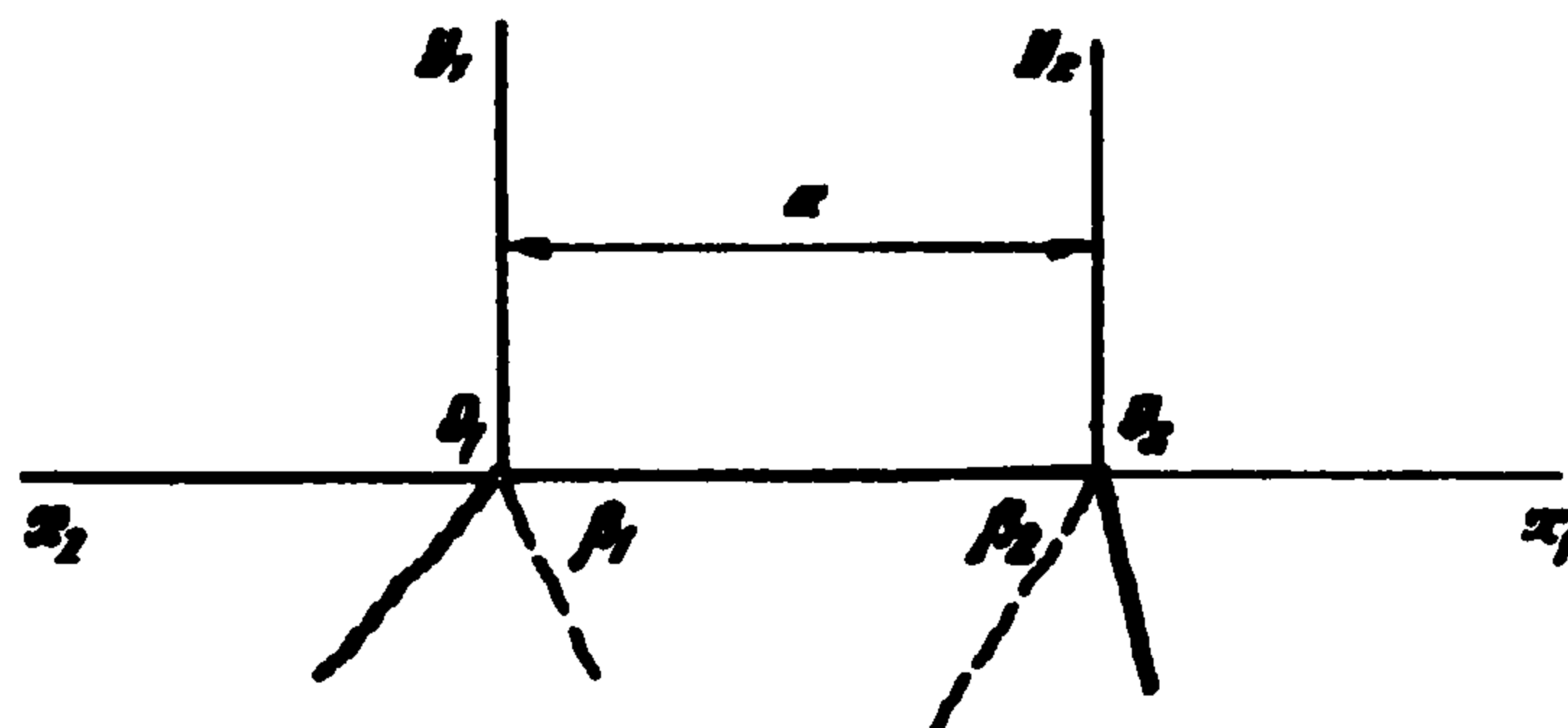
ДИФРАКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ТОРЦЕ

Рассматривается решение задачи дифракции произвольной акустической волны на торце (в том числе трехмерный случай). Используется тот же подход, что и при дифракции на клине [1].

Задача дифракции на торце рассматривалась многими авторами [2–6]. Однако наиболее подробно решение выписывалось только для первых из возникающих на углах торца дифракционных волн. При рассмотрении последующих волн (или падения неплоских волн) решение, получаемое при помощи как функций Грина [2], так и лучевого разложения [3], достаточно громоздко. Наиболее близкие к данной работе результаты получены [6] в двумерном случае.

Рассмотрим торец, поперечное сечение которого представлено на фиг. 1. Пусть ось z_1 декартовой системы координат $x_1y_1z_1$, связанной с первым из вновь образованных ребер O_1 , совпадает с этим ребром. Ось x_1 направлена от первого ребра ко второму, расстояние между ребрами равно a . И, наконец, ось y_1 перпендикулярна первым двум, образуя вместе с ними правую систему.

Систему координат $x_2y_2z_2$, связанную со вторым ребром O_2 , введем следующим образом: $x_2 = a - x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = -z_1$.



Фиг. 1

Пусть на торец набегают произвольная акустическая волна, избыточное давление за которой (или потенциал скорости) в координатах, связанных с соответствующим ребром, можно представить в виде

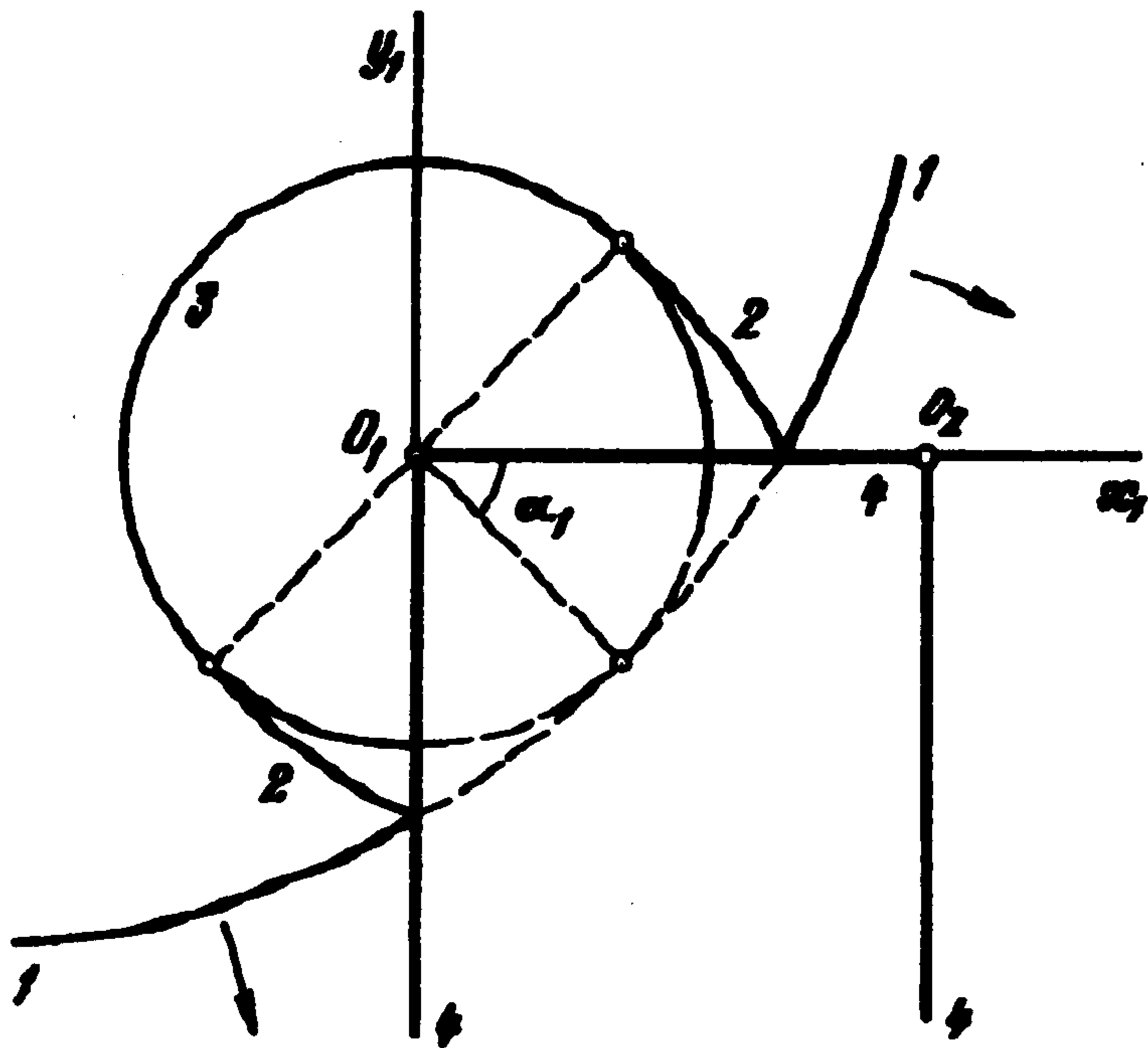
$$f_j(t_{j1}, r_j, z_j, \cos(\alpha_j + \vartheta_j)) H(\eta_{j1}(\alpha_j + \vartheta_j)) \tag{1}$$

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2, \quad \vartheta_j = \arctg(y_j / x_j)$$

Здесь t_{j1} – время, отсчитываемое с момента прихода волны на ребро O_j , $\alpha_j = \text{const}$ – угол, который составляет нормаль к фронту волны в момент $t_{j1} = 0$ с плоскостью, проходящей через ребра торца, в точке O_j (фиг. 2), $H(x)$ – функция Хевисайда. Падающая волна (1) удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

Этому же уравнению должно удовлетворять и решение задачи дифракции.



Фиг. 2

В момент времени $t_{j1} = 0$ начинается дифракция на ребре O_j . Поверхность дифракции описывается соотношением $\eta_{j1}(t_{j1}, r_j, z_j) = 1$.

До тех пор пока волна от одного ребра не достигнет другого, дифракция протекает так же, как и на клине. На фиг. 2 изображена картина дифракции в плоскости $z_1 = z_2 = 0$, соответствующая этому промежутку времени. Кроме падающей волны 1, в дифракции участвует и отраженная волна 2, причем вне зависимости от того, сколько отраженных волн существует в физической плоскости (см. [1]), в математическом смысле отраженная волна только одна. Дифракционная волна обозначена на фиг. 2 цифрой 3, а сам торец — цифрой 4. Для дифракции на клине было показано [1], что удобнее рассматривать вначале задачу дифракции отдельно для падающей и отраженной волны на римановой поверхности с периодичностью $4\pi - 4\beta_j$ по ϑ_j , где β_j — угол полураствора клина. Затем при помощи линейной комбинации полученных решений удовлетворить граничным условиям на поверхности клина. Такой же период будет использован ниже.

Рассмотрим риманово многообразие, соответствующее торцу. Для каждого из ребер (O_1 и O_2) есть своя риманова поверхность, причем эти поверхности при $\vartheta_j = 2\pi k / \lambda_j$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\lambda_j = 2\pi / (4\pi - 4\beta_j)$, $j = 1, 2$, сообщаются между собой, и переход на новый лист одной из них при указанном значении ϑ_j сопровождается переходом на новый лист и другой из них.

Для упрощения дальнейшего изложения (без ограничения общности) рассмотрим случай $\lambda_{1,2} = 2/3$, что соответствует торцу с прямыми углами, изображенному на фиг. 2. В этом случае поверхности связаны между собой при $\vartheta_j = 3\pi k$ ($j = 1, 2$), а периодичность решения на каждой из них будет 3π . Падающая волна на римановых поверхностях существует при $-\alpha_j + 3\pi k \leq \vartheta_j \leq -\alpha_j + 2\pi + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j = 1, 2$), что можно отразить, домножив выражение (1) для падающей волны на $H\left(\sin\left[\lambda_j(\alpha_j + \vartheta_j)/2\right]\sin\left[\lambda_j(2\pi - \alpha_j - \vartheta_j)/2\right]\right)$.

Решение задачи дифракции этой волны на римановой поверхности с периодичностью $4\pi - 4\beta_j$ по ϑ_j , добавляемое к потенциалу (1), имеет вид (см. [1])

$$\Phi_{jk} = -\frac{1}{\pi} \int_{R_{jk}}^1 f_j(t_{jk}, r_j, z_j, v) \left[g^+(u, \chi_j) + g^+(u, \mu_j) \right] du \quad (3)$$

$$v = (u^{1/\lambda} + u^{-1/\lambda})/2, \quad R_{jk} = \left(\eta_{jk} - \sqrt{\eta_{jk}^2 - 1} \right)^\lambda, \quad \lambda = 2/3, \quad j, k = 1, 2$$

$$\chi_j = \vartheta_j + \alpha_j, \quad \mu_j = 2\pi - \chi_j$$

$$g^+(u, v) = \sin \lambda v / \Delta(u, v), \quad \Delta(u, v) = 1 - 2u \cos \lambda v + u^2$$

В момент времени $t_{11} + t_{21} = \alpha$ дифракционные волны, возникающие на разных ребрах, пересекутся. Решение внутри области пересечения можно представить так:

$$\Phi = f_j(t_{j1}, r_j, z_j) \cos(\alpha_j + \vartheta_j) H\left(\sin(\chi_j/2)\sin(\mu_j/2)\right) H\left(\psi_{j1}(\alpha_j + \vartheta_j)\right) + \Phi_{11} + \Phi_{21}. \quad (4)$$

Наличие в (1) множителя в виде функции Хевисайда означает, что фронт падающей волны можно представить в виде

$$\psi_{j1}(\alpha_j + \vartheta_j) = \eta_{j1}(t_{j1}, r_j, z_j) - \cos(\alpha_j + \vartheta_j) = 0$$

На поверхности торца задается условие непротекания $\partial f / \partial n = 0$ (абсолютно жесткий экран) или $f = 0$ (абсолютно мягкий экран).

В двумерном случае в подобной постановке, а также с граничным условием Леонтовича на поверхности клина ($\partial f / \partial n = c \partial f / \partial t$) задача решалась в [5, 6], причем решение задачи дифракции на угле (клине) представлялось в виде двойного интеграла, ядро которого $m(\beta, \varphi)$ расположено под знаком внутреннего интеграла. В данной работе используется представление в виде однократного интеграла типа интеграла Дюамеля, что упрощает построение решения в случае многократной дифракции; кроме того, решение обобщается на трехмерный случай.

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}(t_{jk}, r_j, z_j, \vartheta_j) H(\eta_{jk} - 1)$$

причем ввиду того, что f_2 и f_1 совпадают, в дальнейшем будет выбираться $j = 2$ или $j = 1$ в зависимости от того, какое представление удобнее для рассмотрения.

В момент времени $t_{11} = \alpha$ волна дифракции, возникшая на первом ребре, достигает второго ребра, и начинается вторичная дифракция. Решение Φ_{11} можно представить в координатах, связанных со вторым ребром, в виде

$$\Phi_{11} = \bar{\Phi}_{11}(t_{22}, r_2, z_2, \vartheta_2 + \pi) H(\psi_{22}(\vartheta_2 + \pi))$$

(t_{22} — время, отсчитываемое с момента возникновения вторичной дифракции).

Как уже отмечалось выше, римановы поверхности сообщаются друг с другом при $\vartheta_j = 3\pi k$, поэтому волна Φ_{11} будет присутствовать не на каждом листе, как в случае дифракции на полосе конечной ширины, а только при $-\pi + 3\pi k \leq \vartheta_2 \leq \pi + 3\pi k$. Следовательно, все рассуждения проделанные для волны (1) будут справедливы и для Φ_{11} , однако в качестве аргумента в последнем случае фигурирует $\vartheta_2 + \pi$, а не $\cos(\vartheta_2 + \pi)$, и вид решения в этом случае (см. [1]) будет более сложным:

$$\Phi_{22} = \Phi_{22}^+ - i\Phi_{22}^-, \quad \Phi_{22}^\pm = -\frac{1}{2\pi} \int_{R_{22}} X_{22}^\pm(i\lambda^{-1} \ln u) [g^\pm(u, \vartheta_2 + \pi) + g^\pm(u, \pi - \vartheta_2)] du \quad (5)$$

Здесь

$$g^-(u, v) = (\cos \lambda v - u) / \Delta(u, v), \quad X_{22}^\pm(i\lambda^{-1} \ln u) = \bar{\Phi}_{11}(t_{22}, r_2, z_2, -i\lambda^{-1} \ln u) \pm \bar{\Phi}_{11}(t_{22}, r_2, z_2, i\lambda^{-1} \ln u) \quad (6)$$

если $\Phi_{11}(t, r, z, v)$ — аналитическая функция относительно последнего аргумента, то в правой части равенства (5) будут стоять действительные функции, в противном случае необходимо оставить только действительную часть.

Полное решение внутри волны вторичной дифракции на втором ребре складывается из суммы решений для всех волн, прошедших через эту область, т.е.

$$\Phi = f_j(t_{j1}, r_j, z_j, \cos(\alpha_j + \vartheta_j)) H(\sin(\lambda \chi_j / 2) \sin(\lambda \mu_j / 2)) H(\psi_{j1}(\alpha_j + \vartheta_j)) + \Phi_{11} K_1 + \Phi_{21} K_2 + \Phi_{j2}$$

$$K_m = H(\sin[\lambda(\vartheta_m + \pi) / 2] \sin[\lambda(\pi - \vartheta_m) / 2]), \quad j = 2$$

Точно так же строится решение, добавляемое к Φ_{21} , при вторичной дифракции на первом ребре. Только в этом случае решение строится в координатах, связанных с первым ребром, а в качестве подынтегральной функции в (5) используется $\bar{\Phi}_{12}(t_{12}, r_1, z_1, v)$.

Процесс возникновения новых дифракционных волн можно рассматривать до бесконечности, и каждую из вновь возникающих волн дифракции Φ_{jk} можно представить через предыдущую $\bar{\Phi}_{lk-1}$ (здесь $j = 1$ соответствует $l = 2$, а $j = 2$ соответствует $l = 1$), возникающую на противоположном ребре, по формуле, аналогичной (5), при замене индексов 22 на jk ; при этом в формуле (6) вместо $\bar{\Phi}_{11}$ нужно взять функцию Φ_{lk-1} , переписанную в координатах, связанных с ребром O_j , и времени t_{jk} , отсчитываемого с момента возникновения рассматриваемой волны дифракции.

Полное решение в каждой из возникающих областей дифракции складывается из решений для каждой из волн, прошедших через эту область.

Таким образом, задача дифракции произвольной акустической волны вида (1) на римановом многообразии, соответствующем торцу, полностью решена.

Для получения решения той же задачи для отраженной волны

$$f_j(t_{j1}, r_j, z_j, \cos(\alpha_j - \vartheta_j)) H(\psi_{j1}(\alpha_j - \vartheta_j))$$

необходимо во всех проведенных выше построениях заменить ϑ_j на $-\vartheta_j$ ($j = 1, 2$).

Для определения решения задачи дифракции на торце, в зависимости от вида граничных условий на его поверхности, необходимо проделать следующую процедуру.

Если выполняется условие непротекания $\partial f / \partial n = 0$, то к решению для падающей волны нужно добавить решение для отраженной волны. Если же на поверхности торца выполняется условие $f = 0$, то из решения для падающей волны необходимо вычесть решение для отраженной волны.

Не вызывает затруднений повторить весь изложенный путь решения задачи для торца с произвольными углами (в том числе неравновеликими), а также для произвольной акустической волны вида

$$f_j(t_{j1}, r_j, z_j, \alpha_j + \vartheta_j) H(\psi_{j1}(\alpha_j - \vartheta_j))$$

Изложенный метод может быть также распространен на задачу дифракции произвольной акустической волны на цилиндре с поперечным сечением в виде многоугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Третьяков П.В. Интегральные решения волнового уравнения и задача дифракции произвольной акустической волны на клине // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 250–255.
2. Kay I. The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge // Comm. on Pure and Appl. Math. 1953. V. 6. N 3. P. 419–434.
3. Боровиков В.А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 455 с.
4. Сагомонян А.Я., Поручиков В.Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1970. 120 с.
5. Филиппов А.Ф. Точные выражения для многократно дифрагированной волны с круговым фронтом // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1083–1091.
6. Филиппов А.Ф. Интегральные представления решений двумерного волнового уравнения и дифракционные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17. № 3. С. 718–728.

Калининград, Моск. обл.

Поступила в редакцию
26.XI.1993

УДК 539.3:534.222

© 1994 г. В.С. Поленов, А.В. Чигарев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В рамках трехмерной линеаризованной теории упругости [1] с использованием теории разрывов [2] строится замкнутая система определяющих уравнений для динамических и геометрических величин в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями. Геометрические характеристики фронта волны и луча в неограниченной среде с начальными напряжениями получены из принципа функционала Ферма [3].

Ранее [4, 5] рассматривалось распространение волн и был дан расчет интенсивности волновых фронтов в линейной неоднородной вязкоупругой среде с непрерывным изменением параметров среды, зависящими от пространственных координат, без учета начальных напряжений.

1. Связь между тензорами напряжений и деформаций для неоднородной вязкоупругой среды запишем в виде [6]

$$\sigma_{im} = \lambda_1 e_{kk} \delta_{im} + 2\mu_1 e_{im} \quad (1.1)$$

где λ_1 и μ_1 – линейные интегральные операторы, ядра которых зависят непрерывным образом от пространственных координат

$$\lambda_1 = \lambda(1 + \Lambda), \quad \Lambda e = \int_0^{\infty} \Lambda(t', x_i) e(t - t') dt' \quad (1.2)$$

$$\mu_1 = \mu(1 + M), \quad M e = \int_0^{\infty} M(t', x_i) e(t - t') dt'$$

Соотношения (1.1) и (1.2) вместе с уравнениями движения, записанными в линеаризованной форме в эйлеровых координатах [1]

$$\sigma_{im,i} - \left(u_{m,n} \sigma_{in}^0 \right)_j = \rho \ddot{u}_m \quad (m \neq n) \quad (1.3)$$

и формулами Коши

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (1.4)$$