УДК 532.5 + 539.3

© 1994 г. А.А. Космодемьянский (мл.)

О ВЫЧИСЛЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Получены формулы для вычисления нормальной производной решения задачи Дирихле и касательной производной решения задачи Неймана для уравнения Пуассона через параметры взаимно-однозначного и конформного отображения плоской области на единичный круг.

1. Основные формулы. Пусть u-решение уравнения Пуассона $\Delta u = -1$ в плоской области D, удовлетворяющее на границе Г этой области либо условиям Дирихле $u|_\Gamma = 0$ (задача 1), либо условиям Неймана $\partial u/\partial n|_\Gamma = A$ (задача 2), где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к Г.

Известно, что решение задачи 2 определено с точностью до постоянной, а константа $A = -|D|/|\Gamma|$, где $|D|$ – площадь области, а $|\Gamma|$ – периметр границы Г.

Цель работы – получить формулы для вычисления на границе нормальной производной решения задачи 1 и касательной производной решения задачи 2.

Известно, что решение задачи 1 пропорционально функции напряжений в задаче о кручении упругих призматических стержней, сечение которых – область D, а нормальная производная на границе пропорциональна величине касательного напряжения [1]. Оценкам u_n посвящено много работ ([2, 3] и др.). Важны, однако, не только значения функции $u_n(s)$ (s – натуральный параметр на Г), но и расположение максимумов этой функции (опасные точки). Сен-Венан получил аналитические решения задачи 1 для значительного числа областей (эллипс, правильный треугольник и др.). Для всех таких областей опасные точки располагаются в точках Г, наименее удаленных от центра симметрии области. Было показано [4], что при некоторых дополнительных предположениях о границе Г экстремумы u_n достигаются лишь в точках, лежащих на осях симметрии области D (правда, если таких осей две). Ниже получим выражение для u_n через коэффициенты конформного отображения области D на единичный круг, что позволит расширить список областей, для которых опасные точки находятся явно.

Задача 2 – это линеаризованная статическая задача о форме свободной поверхности жидкости в цилиндрическом капилляре, сечение которого – область D, под действием сил поверхностного натяжения. Зная производную $u'(s)$ на Г, можно получить полную информацию о колебании самого решения на границе, в частности найти точки Г, в которых жидкость поднимается на наибольшую высоту.

Прежде всего получим формулы, исследованию которых и будет посвящена работа. Будем использовать формулу Грина.

$$\iint_D (\Delta f \cdot g - f\Delta g)\,dx\,dy = \int_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial n} g - f\frac{\partial g}{\partial n}\right) ds \tag{1.1}$$

Теорема 1. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи 1. Пусть далее $\{\upsilon_{s,h}\}$ – семейство гармонических в области D функций, обладающих следующими свойствами: $\upsilon_{\Delta,h} > 0$ в области D, $\upsilon_{s,h} = 0$ на дуге $\Gamma\setminus(s - h, s + h)$ и $S_\Gamma \upsilon_{s,h} ds = 1$.

Тогда

$$u_n(s) = \lim_{h\to 0} I_h(s_0) \tag{1.2}$$

где

$$I_h(s_0) = \iint_D \upsilon_{s,h} dxdy$$

Доказательство. Положив в формуле (1.1) $f = u$, а $g = \upsilon_{s,h}$ и использовав формулировку задачи 1, получим

$$I_h(s_0) = \int_\Gamma u_n \upsilon_{s,h} ds \tag{1.3}$$

Применив теперь к контурному интегралу теорему о среднем и воспользовавшись свойствами семейства $\{\upsilon_{s,h}\}$, заключаем, что он равен $u_n(\tilde{s})$ $(\tilde{s} \in (s - h, s + h))$.

Переходя к пределу при $h \to 0$ в формуле (1.3), получим (1.2).

Теорема 2. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи 2. Пусть далее $\{\upsilon'_{s,h}\}$ – семейство гармонических в области D функции таких, что сопряженными к ним являются функции семейства $\{\upsilon_{s,h}\}$. Тогда

$$u^{\cdot}(s) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{|D|}{|\Gamma|} E_h(s_0) + J_h(s_0)\right) \tag{1.4}$$

где

$$E_h(s_0) = \int_\Gamma \upsilon'_{s,h} ds, \quad J_h(s_0) = -\iint_D \upsilon'_{s,h} dxdy$$

(смысл аргумента s_0 станет понятен в следующем пункте).

Доказательство. Положив в формуле (1.1) $f = u$, а $g = \upsilon'_{s,h}$ и использовав формулировку задачи 2, получим

$$-J_h(s_0) = \frac{|D|}{|\Gamma|} E_h(s_0) - \int_\Gamma u \frac{\partial \upsilon'_{s,h}}{\partial n} ds \tag{1.5}$$

Преобразуем последний интеграл в равенстве (1.5) при помощи условий Коши–Римана и интегрирования по частям. Тогда формула (1.5) примет вид

$$\int_\Gamma u^{\cdot} \upsilon_{s,h} ds = \frac{|D|}{|\Gamma|} E_h(s_0) + J_h(s_0) \tag{1.6}$$

Далее, как при доказательстве теоремы 1, воспользуемся свойствами семейства $\{\upsilon_{s,h}\}$ и перейдем к пределу в равенстве (1.6) при $h \to 0$. Получим формулу (1.4).

2. Вычисление нормальной производной в задаче 1 при помощи рядов. В формулах (1.2) и (1.4) фигурируют гармонические функции, поэтому естественно вычислять граничные производные при помощи ряда, реализующего конформное отображение области на единичный круг. Покажем как проводятся подобные вычисления в задаче 1.

Пусть $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\varphi}$. Пусть функция $z = f(\zeta)$ осуществляет взаимно-однозначное конформное отображение области D на единичный круг $B(|\zeta| < 1)$:

$$z = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots \equiv f(\zeta) \tag{2.1}$$

Везде в дальнейшем будем полагать, что сходится числовой ряд

$$|a_1| + 2|a_2| + \ldots + n|a_n| + \ldots < +\infty \tag{2.2}$$

В качестве элементов семейства $\{\upsilon_{s,h}\}$ возьмем решения задачи Дирихле со следующими граничными условиями: $\upsilon_{s,h} = 1/(2h)$ на дуге $(s - h, s + h)$ и $\upsilon_{s,h} = 0$ на остальной части Г. Заметим, что функции $w(\zeta) = \upsilon_{s,h}(f(\zeta))$ и $w^*(\zeta) = \upsilon'_{s,h}(f(\zeta))$ гармонические в круге B, причем функция $w(e^{i\varphi})$ равна нулю вне дуги окружности $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ и равна $1/(2h)$ на этой дуге. (Дуга $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ – прообраз дуги $(s - h, s + h)$ при отображении (2.1)).

Из элементарных вычислений следует, что

$$w(r,\varphi)=\frac{\varepsilon}{2\pi h}+\frac{1}{2\pi h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k\sin k\varepsilon}{k}\cos k(\varphi-s_0) \tag{2.3}$$

$$w^*(r,\varphi)=-\frac{1}{\pi h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k\sin k\varepsilon}{k}\sin k(\varphi-s_0) \tag{2.4}$$

Заметим также, что из сходимости ряда (2.2) вытекает существование предела

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon}{h}=C(s_0)=|f'(e^{is_0})|^{-1} \tag{2.5}$$

Теорема 3. Пусть в формуле (2.1) $a_n=|a_n|e^{i\theta_n}$, а $\theta_{ln}=\theta_l-\theta_n$. Тогда

$$|u_n(s)|=\tfrac{1}{2}(S_1+S_2)(S_3+S_4)^{-1/2} \tag{2.6}$$

где

$$S_1=\sum_{l=1}^{\infty} l|a_l|^2; \quad S_3=\sum_{l=1}^{\infty} l^2|a_l|^2$$

$$S_2=2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n<l} n|a_n||a_l|\cos(\theta_{ln}+(l-n)s_0)$$

$$S_4=2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n<l} nl|a_n||a_l|\cos(\theta_{ln}+(l-n)s_0)$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что достаточно вычислить интеграл

$$I_h(s_0)=\iint_B w(\zeta)|f'(\zeta)|^2\,d\xi d\eta \tag{2.7}$$

и перейти к пределу при $h \to 0$.

Для вычисления будем использовать известную методику [6]. Из формулы (2.1) получим

$$|f'(\zeta)|^2=f'(\zeta)\overline{f'(\zeta)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} nla_na_l\zeta^{n-1}\bar{\zeta}^{l-1} \tag{2.8}$$

Подставим выражения (2.3) и (2.8) в формулу (2.7), а затем используем равенства

$$\cos k(\varphi-s_0)=\tfrac{1}{2}(e^{ik(\varphi-s_0)}+e^{-ik(\varphi-s_0)}); \quad a_n=|a_n|e^{i\theta_n}$$

и условия ортогональности. Тогда:

$$I_h(s_0)=\frac{\varepsilon}{2\pi h}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 a_l\bar{a}_l r^{2l-1}l^2\,drd\varphi+$$

$$+\frac{1}{2\pi h}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{\sin k\varepsilon}{2k}(e^{ik(\varphi-s_0)}+e^{-ik(\varphi-s_0)})\times$$

$$\times nl|a_n||a_l|r^{n+l+k-1}e^{i\theta_{nl}}e^{i(n-l)}\,drd\varphi=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2h}S_1+\frac{1}{\pi h}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 nl|a_n||a_l|\times$$

$$\times\frac{\sin k\varepsilon}{2k}e^{i\theta_{nl}}r^{n+l+k-1}(e^{-iks_0}e^{i(n-l+k)\varphi}+e^{iks_0}e^{i(n-l-k)\varphi})drd\varphi=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2h}S_1+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n<l}\frac{n\sin(l-n)\varepsilon}{h(l-n)}|a_n||a_l|\cos(\theta_{ln}+(l-n)s_0) \qquad (2.9)$$

Перейдем теперь к пределу в выражении (2.9) при $h\to 0$. Из сходимости ряда (2.2) следует, что такой предел существует и равен

$$I(s_0)=\lim_{h\to 0}I_h(s_0)=\frac{1}{2}C(s_0)(S_1+S_2) \qquad (2.10)$$

С другой стороны из формул (2.5), (2.8) и формул Эйлера следует, что

$$C(s_0)=|f'(e^{is_0})|^{-1}=(S_3+S_4)^{-1/2} \qquad (2.11)$$

Подставив выражение (2.11) в формулу (2.10) получим формулу (2.6).

Формула (2.6) дает возможность вычислить нормальную производную решения задачи 1 в любой точке границы Г. Однако решить вопрос об экстремумах $u_n(s)$ на основании этой формулы полностью не удается. С другой стороны, появляется возможность получить положение этих экстремумов в случаях, отличных от классических.

Пример. Пусть в формуле (2.1)

$$f(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2$$

Условие однолистности функции $f(\zeta)$ имеет вид $|a_1|/(2|a_2|)>1$. Для величин S_m в формуле (2.6) получим

$$S_1=|a_1|^2+2|a_2|^2,\quad S_2=2|a_1|a_2|\cos(\theta_{21}+s_0)$$

$$S_3=|a_1|^2+4|a_2|^2,\quad S_4=2S_2$$

Нетрудно найти экстремумы функции $|u_n(s)|$. Ее максимумы достигаются в точках границы Г таких, что $\sin(\theta_{21}+s_0)=0$, а минимумы – в таких, что $\cos(\theta_{21}+s_0)=-|a_2|/|a_1|$. Наибольший максимум достигается там, где $\cos(\theta_{21}+s_0)=-1$ (опасная точка). Наибольшее значение модуля нормальной производной равно

$$|u_n|_{max}=1/2(|a_1|^2+2|a_2|^2-2|a_1||a_2|)/(|a_1|-2|a_2|)$$

а наименьшее – $|u_n|_{min}=|a_1|/2$.

Формулу, подобную (2.6), можно получить и для $u'(s)$ в задаче 2. Нужно только при вычислении двойного интеграла, входящего в формулу (1.4), использовать функцию (2.4), а для вычисления контурного интеграла приходится считать известным разложение функции $|f'(e^{i\varphi})|$ в ряд Фурье. Эта форула здесь не приводится из-за ее громоздкости.

3. Вычисление граничных производных задач 1 и 2 для областей, близких к круговым. Пусть теперь область D близка к единичному кругу. Эту близость понимаем в следующем смысле: будем считать, что

$$|f'(\zeta)|=1+\alpha(r,\varphi),\quad \alpha(r,\varphi)\ll 1 \qquad (3.1)$$

Цель – получить приближенные (с точностью до α^2) выражения для граничных производных задач 1 и 2.

В такой постановке удается получить ответ, не содержащий бесконечных рядов. Итак, везде далее будем пренебрегать выражениями порядка α^2 и выше. Известно, что $\ln|f'(\zeta)|$ – гармоническая в круге B функция (поскольку производная $f'(\zeta)$ не равна нулю в B). С другой стороны, с точностью до α^2 справедливо равенство

$\ln|f'(\zeta)| = \alpha(r, \varphi)$

т.е. функция α – гармоническая в круге B и может быть разложена в ряд Фурье

$$\alpha(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty} r^l(a_l\cos l\varphi+b_l\sin l\varphi)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l r^{|l|}e^{il\varphi} \tag{3.2}$$

Коэффициенты a_l, b_l и A_l связаны известными соотношениями. Пусть $A_l = |A_l|e^{i\theta_l}$, тогда

$$A_{-l}=\overline{A}_l,\quad a_l=2|A_l|\cos\theta_l,\quad b_l=-2|A_l|\sin\theta_l\quad (l>0) \tag{3.3}$$

Обозначим

$$t_k=(a_k\cos ks_0+b_k\sin ks_0)/(k+1),\qquad \bar t_k=(a_k\sin ks_0-b_k\cos ks_0)/(k+1)$$

Вычисление $u_n(s)$ в задаче 1. Как и в разд. 2, вычислим интеграл (2.7). Для этого подставим в него выражения (2.3) и (3.2), а затем преобразуем, используя условия ортогональности и формулы (3.3). Получим

$$I_h(s_0)=\frac{\varepsilon}{2h}+\frac{\varepsilon}{h}\frac{a_0}{2}+\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varepsilon}{k}t_k$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, используя формулу (2.5). Суммируя ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}t_k=\int_0^1\alpha(r,s_0)dr$$

а затем используя формулу (3.1) и теорему 1, получим

$$|u_n(s)|=(1+\alpha(1,s_0))^{-1}\left(\frac{1}{2}+\int_0^1\alpha(r,s_0)dr\right) \tag{3.4}$$

Вычисление $u'(s)$ в задаче 2. В соответствии с формулой (1.4) можно вычислить двойной и контурный интегралы. Двойной интеграл вычисляется аналогично предыдущему, только вместо формулы (2.3) следует использовать формулу (2.4). Тогда

$$J_h(s_0)=-\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varepsilon}{k}\bar t_k$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, используя формулу (2.5) и суммируя ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bar t_k=-\int_0^1\left(\int_0^r\frac{1}{\rho}\frac{\partial\alpha}{\partial s_0}d\rho\right)dr=-\int_0^1\overline{\alpha}(r,s_0)dr \tag{3.5}$$

Здесь $\overline{\alpha}(r,\varphi)$ – гармоническая функция, сопряженная к $\alpha(r, \varphi)$, и такая, что $\overline{\alpha}(0,\varphi) = 0$.

Окончательно получим

$$J(s_0)=-(1+\alpha(1,s_0))^{-1}\int_0^1\alpha(r,s_0)dr \tag{3.6}$$

Переходим к вычислению контурного интеграла. Используя выражения (2.4), (3.2), (3.3) и условия ортогональности, получим

$$E_h(s_0)=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varepsilon}{k}(k+1)\bar t_k$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, используя формулу (2.5), а затем применим формулу (3.5) и условия Коши–Римана. Получим

$$E(s_0) = \lim_{h\to 0} E_h(s_0) = -|f'(e^{is_0})|^{-1} \int_0^1 \frac{1}{r}\frac{\partial\alpha}{\partial s_0} dr = |f'(e^{is_0})|^{-1}\, \overline{\alpha}(1,s_0) \tag{3.7}$$

Используя формулу (3.1), теорему 2 и объединяя формулы (3.6) и (3.7), найдем

$$u^{\cdot}(s) = (1+\alpha(1,s_0))^{-1}\left(\frac{|D|}{|\Gamma|}\overline{\alpha}(1,s_0) - \int_0^1 \overline{\alpha}(r,s_0)dr\right) \tag{3.8}$$

Пример. Пусть область D – эллипс с полуосями $b = 1$ и $a = 1 + \varepsilon$. Известно ([7], с. 378), что с точностью до ε^2 отображение (2.1) имеет вид

$z = \zeta + {}^1/_2(\zeta + \zeta^3)$

Тогда с той же точностью из формулы (3.1) следует

$$\alpha(r,\varphi) = {}^1\!/_2\,\varepsilon + {}^3\!/_2\,\varepsilon r^2 \cos 2\varphi, \qquad \overline{\alpha}(r,\varphi) = {}^3\!/_2\,\varepsilon r^2 \sin 2\varphi \tag{3.9}$$

Подставив первое выражение (3.9) в формулу (3.4), получим решение задачи 1

$|u_n(s)| = {}^1/_2 - {}^1/_4\varepsilon(\cos 2s_0 - 1) + O(\varepsilon^2)$

известное еще Сен-Венану.

Чтобы получить решение задачи 2, заметим, что с точностью до ε^2 отношение $|D|/|\Gamma| = {}^1/_2 + {}^1/_4\varepsilon$. Подставив второе выражение (3.9) в формулу (3.8), получим

$u^{\cdot}(s) = {}^1/_4 \sin 2s_0 + O(\varepsilon^2)$

Таким образом, как для функции $|u_n(s)|$, так и для функции $u(s)$ наибольшие значения достигаются в концах малой оси эллипса, а наименьшие – в концах большой оси.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геккелер И.В.* Статика упругого тела. М., Л: Гостехиздат, 1934. 287 с.
2. *Payne L.E.* Bounds for the maximal stress in the Saint-Venant torsion problem // Indiana J. Mech. Math. Spec. issue. 1968. P. 51–59.
3. *Payne L.E., Philippin G.A.* Isoperimetric inequalities in the torsion and clamped membrane problems for convex plane domains // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. No. 6. P. 1154–1162.
4. *Kawohl B.* On the location of maxima of the gradient for solutions to quasilinear elliptic problems and a problem, raised by Saint-Venant // J. Elasticity. 1987. V. 17. No. 3. P. 195–206.
5. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 310 с.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1993