УДК 531.36

© 1994 г. А.В. Карапетян

О СПЕЦИФИКЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ РАУСА К СИСТЕМАМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Обсуждается специфика применения теории Рауса к изучению стационарных движений систем с дифференциальными связями, обладающих первыми интегралами. Отмечается необходимость предварительного исключения всех зависимых переменных из выражений первых интегралов. Общие положения иллюстрируются на примере исследования стационарных движений динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Согласно теории Рауса [1–9] критическим (экстремальным) значениям одного из первых интегралов системы при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают (устойчивые) действительные движения системы, которые называются стационарными. При этом предполагается, что уравнения движения системы могут быть представлены в виде

$$\dot{x} = f(x) \quad (x \in R^n,\ f(x) \in C^1: R^n \to R^n) \tag{1}$$

а первые интегралы имеют вид

$$U(x) = c = \mathrm{const}\left(c \in R^m,\ U(x) \in C^2: R^n \to R^m\right) \tag{2}$$

Поскольку движение систем с дифференциальными связями нередко описывают уравнениями, содержащими реакции этих связей или неопределенные множители Лагранжа, применение теории Рауса к таким системам требует особой внимательности. Дело в том, что указанные выше уравнения систем с дифференциальными связями не могут быть представлены в виде (1), так как для реакций связей или неопределенных множителей Лагранжа нет соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому для применения теории Рауса необходимо предварительно исключить зависимые скорости из выражений всех первых интегралов указанных уравнений движения системы. При этом полученные функции будут представлять собой первые интегралы уравнений движения рассматриваемой системы, записанных в форме Чаплыгина, Воронца, Больцмана–Гамеля и др., которые не содержат реакции связей или неопределенные множители Лагранжа и представимы в виде (1), а сами первые интегралы примут вид (2).

Проиллюстрируем вышеизложенное на примере исследования задачи о стационарных движениях динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Пусть m – масса шара, I_1 и I_3 – его экваториальный и осевой центральные моменты инерции, r – радиус, a – расстояние от центра масс шара до его геометрического центра, g – ускорение свободного падения. Обозначим скорость центра масс шара и его угловую скорость вращения вокруг центра масс через $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ соответственно, а единичный вектор восходящей вертикали – через $\boldsymbol{\gamma}$.

Уравнения движения шара, отнесенные к его главным центральным осям инерции, можно представить в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} = -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R} \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Уравнения (3) и (4) выражают соответственно законы изменения количества движения и момента количества движения шара, а уравнения (5) и (6) – соответственно условия постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе координат и отсутствия скольжения шара. Здесь $\mathbf{R}$ – реакция опорной плоскости, $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$ – центральный тензор инерции шара, $\boldsymbol{\rho} = (-r\gamma_1, -r\gamma_2, -r\gamma_3 + a)$ – радиус-вектор точки касания шара с горизонтальной плоскостью по отношению к его центру масс.

Уравнения (3)–(6) замкнуты относительно переменных $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{R}$, но не имеют вида (1), поскольку среди них нет дифференциального уравнения для реакции плоскости, а уравнение (6) не является дифференциальным относительно указанных переменных.

Система (3)–(6) допускает первые интегралы энергии, Желле, Чаплыгина и геометрический:

$$2U_0 = m\mathrm{v}^2 + I_1\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + I_3\omega_3^2 - 2mga\gamma_3 = c_0 \tag{7}$$

$$U_1 = I_1\left(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2\right) + I_3\omega_3\left(\gamma_3 - a/r\right) = c_1 \tag{8}$$

$$U_2 = \left[I_1I_3 + mr^2\left(I_1\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right) + I_3\left(\gamma_3 - a/r\right)^2\right)\right]^{1/2}\omega_3 = c_2 \tag{9}$$

$$U_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{10}$$

Очевидно, выражение полной энергии шара U_0 содержит переменную $\mathbf{v}$, которую можно исключить с помощью уравнения (6). При этом функция U_0 примет вид

$$2U_0^* = m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 + I_1\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + I_3\omega_3^2 - 2mga\gamma_3 = c_0^* \tag{11}$$

и будет зависеть, как и функции U_1, U_2 и U_3, только от переменных $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Заметим, что соотношения (11), (8)–(10) представляют собой первые интегралы уравнений движения шара вида

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + m(\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega})] \times \boldsymbol{\rho} = mg\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma} + m\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \boldsymbol{\omega}). \\ &\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

(уравнение (12) получается из уравнения (4), если из последнего исключить реакцию $\mathbf{R}$ с помощью уравнений (3), (6) и $\dot{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$, которое получается из (6) дифференцированием по времени).

Система (12), (5) замкнута относительно переменных $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, имеет вид (1) и первые интегралы (11), (8)–(10) вида (2). Следовательно, при изучении стационарных решений этой системы можно использовать теорию Рауса. При этом переменные $\mathbf{v}$ однозначным образом определяются из соотношения (6) после того, как найдены решения относительно $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ по методу Рауса.

Замечание. При изучении стационарных движений систем с дифференциальными связями необязательно каждый раз приводить уравнения движения системы, содержащие реакции связей или неопределенные множители Лагранжа к виду, не содержащему указанных величин. Система (3)–(6) приведена к виду (12), (5) из методических соображений. Приведение интеграла (7) к виду (11) необходимо было сделать, чтобы воспользоваться теорией Рауса, в противном случае формальное следование теории Рауса приводит к неточным результатам [10].

Будем искать критические точки функции U_0^* при фиксированных значениях постоянных интегралов (8)–(10). Для этого введем функцию

$$W = U_0^* - \lambda(U_1 - c_1) - \mu(U_2 - c_2) + \tfrac{1}{2}\nu(U_3 - 1)$$

где λ, μ, ν – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности:

$$\partial W / \partial\omega_1 \equiv -mv_2(r\gamma_3 - a) + mv_3 r\gamma_2 + I_1\omega_1 - I_1\lambda\gamma_1 = 0$$

$$\partial W / \partial\omega_2 \equiv mv_1(r\gamma_3 - a) - mv_3 r\gamma_1 + I_1\omega_2 - I_1\lambda\gamma_2 = 0$$

$$\partial W / \partial\omega_3 \equiv -mv_1 r\gamma_2 + mv_2 r\gamma_1 + I_3\omega_3 - I_3\lambda(\gamma_3 - a/r) - \mu I = 0$$

$$\partial W / \partial\gamma_1 \equiv mv_2 r\omega_3 - mv_3 r\omega_2 - \lambda I_1\omega_1 - (\mu / I) I_1 mr^2\omega_3\gamma_1 + \nu\gamma_1 = 0$$

$$\partial W / \partial\gamma_2 \equiv -mv_1 r\omega_3 + mv_3 r\omega_1 - \lambda I_1\omega_2 - (\mu / I) I_1 mr^2\omega_3\gamma_2 + \nu\gamma_2 = 0$$

$$\partial W / \partial\gamma_3 \equiv -mga + mv_1 r\omega_2 - mv_2 r\omega_1 - \lambda I_3\omega_3 - (\mu / I) I_3 mr^2\omega_3(\gamma_3 - a/r) + \nu\gamma_3 = 0$$

$$v_1 = (r\gamma_3 - a)\omega_2 - r\gamma_2\omega_3, \quad v_2 = r\gamma_1\omega_3 - (r\gamma_3 - a)\omega_1$$

$$v_3 = r\gamma_2\omega_1 - r\gamma_1\omega_2, \quad I = \left[I_1 I_3 + mr^2\left(I_1\left(1 - \gamma_3^2\right) + I_3(\gamma_3 - a/r)^2\right)\right]^{1/2}$$

Если постоянные интегралов Желле и Чаплыгина удовлетворяют соотношениям

$$\left[I_1 I_3 + mr^2 I_3(\pm 1 - a/r)^2\right]^{1/2} c_1 = I_3(\pm 1 - a/r)c_2$$

то система уравнений $\delta W = 0$ имеет соответственно однопараметрические решения вида

$$\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_3 = \Omega = \mathrm{const}, \quad \gamma_3 = \pm 1 \qquad (13)$$

(Ω – произвольно), которые представляют собой нульмерные инвариантные множества (точки покоя) системы (12), (5) и отвечают перманентным вращениям шара вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии с произвольной постоянной угловой скоростью при наинизшем ($\gamma_3 = +1$) или наивысшем ($\gamma_3 = -1$) расположении центра масс. При этом из (6) и (13) следует, что $\mathbf{v} = 0$, т.е. на решениях (13) центр масс шара неподвижен. Неопределенные множители Лагранжа для решений (13) имеют вид

$$\lambda \in R, \ \mu = I_3^{1/2}\left(I_1 + m(\pm r - a)^2\right)^{-1/2}(\Omega - \lambda(\pm 1 - a/r))$$

$$\nu = \pm\left(mga + I_3\Omega[I_1\lambda + mr(\pm r - a)\Omega]\right)\left(I_1 + m(\pm r - a)^2\right)^{-1}$$

При произвольных значениях постоянных интегралов Желле и Чаплыгина система уравнений $\delta W = 0$ может иметь также двухпараметрические семейства решений вида

$$\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = \omega\gamma_3 + \Omega, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma^2, \quad \gamma_3 = \gamma \qquad (14)$$

для которых три постоянные ω, Ω и γ удовлетворяют одному уравнению

$$\left[I_3\Omega + (I_3 - I_1)\omega\gamma\right]\omega + mr^2(\Omega + (a/r)\omega)\omega(1 - (a/r)\gamma) + mga = 0$$

Соотношения (14) определяют одномерные инвариантные множества системы (12), (5), на которых лежат регулярные прецессии шара. При этом из (6) и (14) следует, что

$\nu \neq 0$. Неопределенные множители Лагранжа для решений (14) имеют вид

$$\lambda = \omega - (\gamma - a/r)(\Omega + a/r\omega)mr^2 I_1^{-1}$$

$$\mu = \left[I_1 I_3 + mr^2\left(I_1\left(1-\gamma^2\right) + I_3(\gamma - a/r)^2\right)\right]^{1/2} I_1^{-1}(\Omega + (a/r)\omega)$$

$$\nu = I_1\omega^2 - mr^2(\Omega + (a/r)\omega)\left[(\omega\gamma + \Omega) + \omega(\gamma - a/r)\right]$$

Отметим, что в работе [10] разыскивались критические точки функции U_0 при фиксированных значениях постоянных интегралов (8)–(10). При этом на всех стационарных движениях шара, найденных в [10], центр масс шара должен был быть неподвижен, тогда как в общем случае на регулярных прецессиях центр масс шара описывает окружность, параллельную горизонтальной плоскости, и неподвижен лишь при условии $\Omega + (a/r)\omega = 0$ [11].

Согласно теории Рауса [1–9] стационарные движения (13) и (14) устойчивы, если функция U_0^* принимает минимальное значение на этих движениях при фиксированных значениях постоянных интегралов U_1, U_2 и U_3. Последнее заведомо имеет место, если вторая вариация функции W определенно положительна на линейном многообразии, определяемом соотношениями $\delta U_1 = \delta U_2 = \delta U_3 = 0$.

Для решений (13) последние соотношения приводятся к виду $\delta\omega_3 = \delta\gamma_3 = 0$. При этом вторая вариация

$$2\delta^2 W = A(\delta\omega_1)^2 - 2B(\delta\omega_1)(\delta\gamma_1) + C(\delta\gamma_1)^2 + A(\delta\omega_2)^2 - 2B(\delta\omega_2)(\delta\gamma_2) + C(\delta\gamma_2)^2$$

определенно положительна при условии $AC - B^2 > 0$. Здесь

$$A = I_1 + m(\pm r - a)^2 > 0, \quad B = I_1\lambda + mr(\pm r - a)\omega$$

$$C = \left\{I_1 mr\left[\lambda(\pm r - a) - r\omega\right] \pm I_3\left[I_1\lambda + mr(\pm r - a)\omega\right]\right\}\left[I_1 + m(\pm r - a)^2\right]^{-1}\omega + mr^2\omega^2 \pm mga$$

Учитывая произвольность λ, заключаем, что для устойчивости решения (13) достаточно существования хотя бы одного λ, при котором $AC - B^2 > 0$. Следовательно, вертикальные вращения шара устойчивы, если

$$\left[mr(\pm r - a) \pm I_3\right]^2\omega^2 \pm 4mga\left[I_1 + m(\pm r - a)^2\right] > 0 \qquad (15)$$

Заметим, что достаточное условие устойчивости перманентных вращений шара на шероховатой плоскости (15) с точностью до знака равенства совпадает с соответствующим необходимым условием [11], тогда как условие устойчивости [10] из требования минимума функции U_0 при фиксированных значениях постоянных U_1, U_2 и U_3 оказалось достаточно грубым и более жестким по сравнению с (15).

Для решений (14) вторая вариация фунции W принимает вид

$$2\delta^2 W = A_1(\delta\omega_1 - \omega\delta\gamma_1)^2 + A_2(\delta\omega_2 - \omega\delta\gamma_2)^2 + B_1(\delta\omega_3)^2 + 2B_{12}(\delta\omega_3)(\delta\gamma_3) + B_2(\delta\gamma_3)^2$$

а линейное многообразие, определяемое соотношениями $\delta U_1 = \delta U_2 = \delta U_3 = 0$ приводится к виду:

$$\alpha_1(\delta\omega_1 - \omega\delta\gamma_1) + \alpha_2(\delta\omega_2 - \omega\delta\gamma_2) + \alpha_3(\delta\omega_3) + \alpha_4(\delta\gamma_3) = 0$$

$$\beta_3(\delta\omega_3) + \beta_4(\delta\gamma_3) = 0$$

$$A_1 = I_1 + m(a - r\gamma)^2 + mr^2\gamma_2^2 > 0, \quad A_2 = I_1 + m(a - r\gamma)^2 + mr^2\gamma_1^2 > 0$$

$$B_1 = I_3 + mr^2\left(1-\gamma^2\right) > 0, \quad B_{12} = -\left[I_3 + mr^2\left(1-\gamma^2\right)\right]\omega + mr^2\gamma(\Omega + (a/r)\omega)$$

$$B_2=\left[I_1+mr^2\left(1-\gamma^2\right)\right]\omega^2-mr^2(\Omega+(a/r)\omega)\times$$

$$\times\left\{\omega(\gamma-a/r)+\left[I_3^2+mr^2\left[I_3\left(1-(2a/r)\gamma+\gamma^2\right)-I_1\gamma^2\right]\right]\right\}\times$$

$$\times\left[I_1I_3+mr^2\left[I_1\left(1-\gamma^2\right)+I_3(\gamma-a/r)\right]\right]^{-1}(\omega\gamma+\Omega)\}$$

$$\alpha_1=I_1\gamma_1,\quad \alpha_2=I_1\gamma_2,\quad \alpha_3=I_3(\gamma-a/r),\quad \alpha_4=I_3(\omega\gamma+\Omega)-2I_1\omega\gamma$$

$$\beta_3=I_1I_3+mr^2\left[I_1\left(1-\gamma^2\right)+I_3(\gamma-a/r)^2\right],\quad \beta_4=mr^2\left[I_3(\gamma-a/r)-I_1\gamma\right](\omega\gamma+\Omega)$$

Функция $\delta^2 W$ определенно положительна на указанном линейном многообразии относительно переменных $\delta\omega_1-\omega\delta\gamma_1$, $\delta\omega_2-\omega\delta\gamma_2$, $\delta\omega_3$, $\delta\gamma_3$, если положительны главные диагональные миноры пятого и шестого порядков определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 & B_1 & B_{12} \\ \alpha_4 & \beta_4 & 0 & 0 & B_{12} & B_2 \end{vmatrix}$$

Учитывая, что $\Delta_5\equiv I_1^2\left(A_1\gamma_2^2+A_2\gamma_1^2\right)\beta_3^2>0$, заключаем, что регулярные прецессии шара на шероховатой плоскости устойчивы по отношению к переменным $\omega_1-\omega\gamma_1$, $\omega_2-\omega\gamma_2$, ω_3 и γ_3 при условии

$$\Delta_6\equiv\Delta\equiv A_1A_2\left(\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3\right)^2+\left(A_1\alpha_2^2+A_2\alpha_1^2\right)\left(B_1\beta_4^2-2B_{12}\beta_3\beta_4+B_2\beta_3^2\right)>0 \tag{16}$$

явный вид которого весьма громоздок и потому не выписан.

Заметим, что условие (16) с точностью до знака равенства совпадает с соответствующим необходимым условием [11].

В заключение отметим, что динамически симметричный шар представляет собой частный случай тела вращения, стационарные движения которого на шероховатой плоскости хорошо изучены различными способами [11]. Приведенные выше результаты полностью согласуются с известными, чего нельзя сказать о результатах [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16242).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* A treatise on the stability of a given state of motion. London: McMillan, 1877. 108 p.
2. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.
3. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Харьков: Изд-е Харьковск. мат. о-ва, 1888. 54 с.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Изд-е Харьковск. мат. о-ва, 1892. 251 с.
5. *Volterra V.* Sur la thèorie des variations des lattitudes // Acta math. 1899. T. 22. № 3. P. 257–273.
6. *Levi-Civita T.* Sur la recherche des solutions particulières des systèmes differentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace mat.-fis. 1906. T. 17. P. 1–40.
7. *Salvadori L.* Un osservazione su di un oriteria di stabilità del Routh // Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli (4). 1953. V. 20. P. 269–272.

8. *Salvadori L.* Sulla stabilità del movimento // Matematiche. Catania. 1969. V. 24. № 1. P. 218–239.
9. *Karapetyan A.V.* The Routh theorem and its extensions // Colloq. math. societ. Jànos Bolyai. 53. Qualitative theory of differential equations Szeged, 1988. Amsterdam; New York: North-Holland, 1990. P. 271–290.
10. *Войчулис В.В., Иртегов В.Д.* Особые стационарные движения шара на абсолютно шероховатой плоскости // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С. 52–58.
11. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. С. 5–132.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.1993