УДК 539.3:534

© 1994 г. А.А. Ильюшин, И.А. Кийко

НОВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

В предположении, что избыточное давление со стороны потока газа на обтекаемую пологую оболочку может быть определено по линеаризованной (поршневой) теории несущей поверхности, приводится постановка задачи о панельном флаттере произвольной в плане и произвольно ориентированной по отношению к вектору скорости потока оболочки. Общая постановка конкретизируется на некоторых примерах.

Объектами исследований [1–5] по панельному флаттеру, за редким исключением [5], являлись прямоугольная пластина, цилиндрическая панель или замкнутая цилиндрическая оболочка. При этом использована достаточно частная постановка задачи при условии, что вектор скорости потока параллелен одной из сторон пластины либо образующей цилиндрической оболочки или панели. Многообразие задач обусловливалось разнообразием граничных условий, а также методов исследования – строгих аналитических, приближенных, численных. При тех же ограничениях в постановке исследовался флаттер вязкоупругих прямоугольных пластин [6–8]. Однако элементы обшивки летательных аппаратов представляют собой либо пологие оболочки различных очертаний в плане, либо не прямоугольные пластины, например, круглые и т.п.; с другой стороны, во многих практически важных случаях вектор скорости потока достаточно произвольно ориентирован по отношению к сторонам пластинки или панели. Решение подобного рода задач возможно на основе общей постановки проблемы панельного флаттера, которой до сих пор не дано; в предлагаемой работе этот пробел восполняется.

1. Рассмотрим оболочку в системе неподвижных декартовых координат $\{x, y, z\}$. Как геометрическая поверхность, оболочка (ее срединная поверхность) параметризуется криволинейными координатами x^1, x^2, а ее положение в пространстве определенно радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \{x(x^1, x^2),\ \ y(x^1, x^2),\ \ z(x^1, x^2)\}$$

Тем самым определены первая и вторая квадратичные формы

$$I_1 = g_{ik} dx^i dx^k,\ \ I_2 = b_{ik} dx^i dx^k,\ \ i, k = 1, 2$$

коэффициенты которых известным образом [9] выражаются через производные от $\mathbf{r}$ по x^k (в дальнейшем принимаются обозначения $\mathbf{r}_k = \partial \mathbf{r}/\partial x^k$). Вектор единичной нормали к недеформированной (начальной) поверхности оболочки определяется таким образом:

$$\mathbf{n} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2] / |[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]| \tag{1.1}$$

Представим себе, что внешняя поверхность оболочки, определяемая нормалью в соответствии с (1.1), обтекается сверхзвуковым потоком газа с вектором скорости $\mathbf{V} = \{\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\}$, при этом $|\upsilon_z / |\mathbf{V}|| \leqslant \varepsilon$, где ε – параметр, входящий в оценку точности при определении давления по закону плоских сечений [10, 11].

В дальнейшем рассматривается обтекание пологой оболочки, так что выполнено условие $|1 - \cos\gamma| \ll 1$, где γ – угол, образуемый нормалью к поверхности с осью z.

Это позволяет для определения давления на элемент поверхности воспользоваться линеаризованной (поршневой) теорией, согласно которой [11]

$$p - p_0 = \Delta p = \beta \upsilon(t), \quad \beta = \kappa p_0 / C_0 \tag{1.2}$$

здесь p_0 и C_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, κ – показатель политропы. Если же давление определяется на элементе обшивки, который находится за ударной волной, то, вообще говоря, вместо p_0, C_0 следует взять параметры p_1, C_1, определяемые как средние по объему, заключенному в прямом цилиндре, основания которого – оболочка и фронт ударной волны.

Если оболочка жесткая (недеформируемая), то $\upsilon = np_n\mathbf{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{n})$, и (1.2) принимает вид

$$\Delta p = \beta(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \tag{1.3}$$

При проведении конкретных вычислений оболочку удобно параметризовать декартовыми координатами $x^1 = x$, $x^2 = y$, а поверхность описывать явным уравнением $z = f(x, y)$; тогда

$$\mathbf{r} = \{x, y, z = f(x, y)\}, \quad \mathbf{r}_1 = \{1, 0, f_x\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{0, 1, f_y\}, \quad \mathbf{n}^0 = \{-f_x, -f_y, 1\}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}^0 / |\mathbf{n}^0|$$

Подставим это в (1.3) и учтем, что для пологой оболочки квадратами производных f_x, f_y по сравнению с единицей можно пренебречь; получим окончательно

$$\Delta p = -\beta(f_x \upsilon_x + f_y \upsilon_y - \upsilon_z) \tag{1.4}$$

В декартовых координатах получаются сравнительно простые формулы для вычисления интегральных характеристик. Например, для проекции на ось z главного вектора сил аэродинамического взаимодействия найдем

$$P = \iint_\sigma \Delta p(x^1, x^2) \cos\gamma d\sigma = \iint_S \Delta p(x, y) dx dy$$

Здесь σ – несущая поверхность, S – ее проекция на плоскость x, y.

2. Допустим теперь, что оболочка деформируется. Чтобы вычислить избыточное давление в этом случае, необходимо определить положение нормали к деформированной поверхности. Обозначим $\mathbf{U} = u\mathbf{r}_1 + \upsilon\mathbf{r}_2 + w\mathbf{n}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности. Тогда деформированная поверхность определится радиус-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{U}$. Обозначив $\mathbf{R}_k = \partial\mathbf{R}/\partial x^k$ ($k = 1, 2$), для нового положения нормали будем иметь

$$\mathbf{n}' = [\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2]/|[\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2]| \tag{2.1}$$

Вычислим производные $\mathbf{R}_k$. Воспользовавшись правилами дифференцирования векторов $\mathbf{r}_k$ и нормали $\mathbf{n}$ [9], получим в результате

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_k = A_{k1}\mathbf{r}_1 + A_{k2}\mathbf{r}_2 + B_k\mathbf{n} \\ &A_{k1} = \partial u / \partial x^k + C_{k1}, \quad A_{k2} = \partial \upsilon / \partial x^k + C_{k2} \\ &B_k = \partial w / \partial x^k + b_{k1}u + b_{k2}\upsilon, \quad C_{kl} = G^l_{k1}u + G^l_{k2}\upsilon + b^l_k w \\ &k, l = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $b_{kl} = b_{ki}g^{il}$, G^k_{il} – символы Кристоффеля второго ряда, g^{il} – контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Далее, на основании (2.2) вычислим $[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2]$ и воспользуемся формулами $[\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2]=\sqrt{g}\mathbf{n}$, $\sqrt{g}[\mathbf{r}_k\times\mathbf{n}]=g_{k2}\mathbf{r}_1 - g_{k1}\mathbf{r}_2$, $\|[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2]\|=[(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_1)(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_2)-(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)^2]^{1/2}$. Представим все полученные выражения в (2.2) и в (2.1) и упростим окончательный результат, основываясь на гипотезах линейной теории оболочек; получим

$$\mathbf{n}'=\mathbf{n}-A_1\mathbf{r}_1-A_2\mathbf{r}_2,\quad A_k=g^{k1}B_1+g^{k2}B_2,\quad k=1,2 \tag{2.3}$$

Отметим, что в расчетные формулы следует внести разложение вектора перемещения $\mathbf{U}$ по единичным векторам основного базиса. Поскольку $\mathbf{r}_k=|\mathbf{r}_k|\mathbf{e}_k=\sqrt{g_{kk}}\mathbf{e}_k$, то получим $\mathbf{U}=u\sqrt{g_{11}}\mathbf{e}_1+\upsilon\sqrt{g_{22}}\mathbf{e}_2+w\mathbf{n}$, при этом $u^*=u\sqrt{g_{11}}$ и $\upsilon^*=\upsilon\sqrt{g_{22}}$ будут физическими компонентами вектора перемещений. Выразив отсюда u и υ, запишем выражения для B_k:

$$B_k=\frac{\partial w}{\partial x^k}+\frac{b_{k1}}{\sqrt{g_{11}}}u^*+\frac{b_{k2}}{\sqrt{g_{22}}}\upsilon^*$$

Приведем вычислительные формулы. Для пологой оболочки $|f_x|\ll 1$, $|f_y|\ll 1$, поэтому $g^{kk}\cong g_{kk}\cong 1$, $|g^{12}|\cong|g_{12}|\ll 1$, $|g|\cong 1$, что влечет за собой $A_k\cong B_k$, $|A_1f_x+A_2f_y|\ll 1$. Коэффициенты $b_{11}=f_{xx}/\sqrt{g}$, $b_{22}=f_{yy}/\sqrt{g}$, $b_{12}=f_{xy}/\sqrt{g}$ – это величины порядка главных кривизн и кручения, поэтому $B_k\cong\partial w/\partial x^k$. С учетом этих оценок из (2.3) получим

$$\mathbf{n}'\cong\left\{-\left(f_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right),-\left(f_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right),1\right\}$$
$$(\mathbf{V}',\mathbf{n}')=-\left(f_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\upsilon_x-\left(f_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\upsilon_z \tag{2.4}$$

Полное выражение для $\upsilon(t)$ определяется как сумма: $\upsilon(t)=\partial w/\partial t+(\mathbf{V},\mathbf{n}')$; подставив это вместе с (2.4) в (1.3), получим выражение для избыточного давления

$$\Delta p=\beta\left[\frac{\partial w}{\partial t}-\left(f_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\upsilon_x-\left(f_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\upsilon_y+\upsilon_z\right] \tag{2.5}$$

Уравнения линейной теории пологих оболочек имеют вид (см., например, [5])

$$D\Delta^2w-hL(\Phi)-q=0,\quad \Delta^2\Phi+EL(w)=0,\quad L(f)=k_x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{2.6}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, Φ – функция напряжений, k_x, k_y – главные кривизны оболочки, h – ее толщина, E – модуль Юнга материала. Поперечная нагрузка q складывается из сил инерции и избыточного давления: $q=-\Delta p-\rho h\partial^2w/\partial t^2$; подставив это в (2.6), получим систему, на основе которой могут быть исследованы колебания и динамическая устойчивость пологой оболочки. Система (2.6) замыкается добавлением к ней начальных и граничных условий.

Выделим в (2.6) "статическое" решение $w_0(x,y)$, $\Phi(x,y)$:$\Phi_0(x,y)$

$$D\Delta^2w_0-L(\Phi_0)-\beta(\boldsymbol{\upsilon},\operatorname{grad}w_0)=q_0$$

$$\Delta^2\Phi_0+EL(w_0)=-0,\quad \boldsymbol{\upsilon}=\{\upsilon_x,\upsilon_y\},\quad q_0=\beta[(\boldsymbol{\upsilon},\operatorname{grad}f)+\upsilon_z]$$

удовлетворяющее граничным условиям задачи; полагаем при этом, что под действием "статической" нагрузки q_0 оболочка не теряет устойчивости. Для "динамического" прогиба $W(x, y, t)$ и функции напряжений $\Phi_1(x, y, t)$ получим после этого однородную систему при тех же краевых и заданных начальных условиях:

$$D\Delta^2 W - hL(\Phi_1) + \rho h \frac{\Delta^2 W}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial W}{\partial t} - \beta(\mathbf{v}, gradW) = 0$$

$$\Delta^2 \Phi_1 + EL(W) = 0 \tag{2.7}$$

Колебания оболочек, в связи с проблемой устойчивости, будем исследовать в классе функций

$W = \varphi(x, y)e^{\omega t}, \quad \Phi_1 = F(x, y)\, e^{\omega t}$

Подставив эти выражения в систему (2.7), получим

$$D\Delta^2\varphi - hL(F) - \beta(\mathbf{v}, \mathrm{grad}\,\varphi) - \lambda\varphi = 0$$

$$\Delta^2 F + EL(\varphi) = 0, \quad \lambda = -\rho h\omega^2 - \beta\omega \tag{2.8}$$

Вместе с граничными условиями система (2.8) составляет задачу, из которой должны быть найдены собственные значения λ и собственные функции φ, F.

Пусть $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ – первое собственное число. Устойчивыми будут колебания, которым отвечают частоты с отрицательной действительной частью. На основании равенства $\rho h\omega^2 + \beta\omega + \alpha_1 + \beta_1 i = 0$ условию $\mathrm{Re}\,\omega < 0$ отвечает неравенство $\alpha_1\beta^2 > \rho h\beta_1^2$. Поскольку α_1, β_1 зависят от υ_x, υ_y, написанное условие определяет на плоскости компонент вектора скорости υ_x, υ_y кривую, которая разделяет области устойчивых и неустойчивых колебаний.

Конкретизируем систему (2.8) на нескольких примерах. *Прямоугольная пластина*. В этом случае $k_x = k_y = 0$, $F = 0$, и из первого уравнения (2.8) следует

$$D\Delta^2\varphi - \beta(\mathbf{v}\ \mathrm{grad}\,\varphi) - \lambda\varphi = 0 \tag{2.9}$$

Авторами получены решения некоторых задач, основанные на этом уравнении, и обнаружены новые механические эффекты.

Круглая пластина. Если граничные условия одни и те же по всему контуру, естественно положить $\upsilon_y = 0$ и записать (2.9) в полярных координатах

$$D\Delta^2\varphi - \beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\sin\theta\right)\upsilon_x - \lambda\varphi = 0 \tag{2.10}$$

Цилиндрическая панель, прямоугольная в плане. Направим ось x по образующей. Тогда $k_x = 0$, $k_y = R^{-1}$, и из (2.8) будем иметь

$$D\Delta^2\varphi - \frac{h}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \beta(\mathbf{v}, \mathrm{grad}\,\varphi) - \lambda\varphi = 0$$

$$\Delta^2 F + \frac{E}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$$

Сферическая панель, прямоугольная в плане. Поскольку $k_x = k_y = R^{-1}$, из (2.8) следует

$$D\Delta^2\varphi - \frac{h}{R}\Delta F - \beta(\upsilon, \mathrm{grad}\,\varphi) - \lambda\varphi = 0$$

$$\Delta^2 F + \frac{E}{R}\Delta\varphi = 0$$

Круговая сферическая панель. Если граничные условия одинаковы по всему контуру, то полагаем $\upsilon_y = 0$

и получаем в полярных координатах

$$D\Delta^2\varphi - \frac{h}{R}\Delta F - \beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\sin\theta\right)v_x - \lambda\varphi = 0$$

$$\Delta^2 F + \frac{E}{R}\Delta\varphi = 0 \qquad (2.11)$$

В формулах (2.10), (2.11) оператор Лапласа следует записать в полярных координатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211–222.
2. *Мовчан А.А.* Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
3. *Степанов Р.Д.* О флаттере цилиндрических оболочек и панелей, движущихся в потоке газа // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 644–657.
4. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. *Огибалов П.М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1963. 419 с.
6. *Матяш В.И.* Флаттер упруговязкой пластинки // Механика полимеров. 1971. № 6. С. 1077–1083.
7. *Ларионов Г.С.* Нелинейный флаттер упруговязкой пластины // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4. С. 95–100.
8. *Огибалов П.М., Ломакин В.В., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1975. 528 с.
9. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 428 с.
10. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755.
11. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.IX.1993