

УДК 539.3

© 1994 г. И.И. Ворович, Д.А. Пожарский, М.И. Чебаков

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ О ДВИЖУЩЕМСЯ ШТАМПЕ ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Рассматривается контактная задача о движущемся штампе с учетом тепловыделения от трения между штампом и упругой полосой большой толщины. Ранее контактная задача теории упругости о движущемся штампе изучалась как без учета [1, 2], так и с учетом [3, 4] сил трения и тепловыделения. В отличие от [3, 4] здесь при решении несвязанной квазистационарной задачи термоупругости в подвижной системе координат предполагается зависимость коэффициента трения от температуры. Основное внимание уделяется вопросу о возможности теплового взрыва [5–11] или резкого изменения (бифуркации) контактных температур. Показано, что потеря квазистационарной термоупругой устойчивости происходит, если коэффициент трения линейно возрастает с увеличением температуры. Предлагаемая модель в первом приближении может объяснять лавинообразный износ различных движущихся деталей, например тонких поршневых колец, вызванный их перегревом.

1. Пусть по верхней границе $y = h$ упругой полосы толщины h движется с постоянной скоростью v в направлении оси x абсолютно жесткий штамп с плоским основанием ширины $2a$ (фигура). Нижняя граница полосы $y = 0$ лежит без трения на недеформируемом основании. Будем решать задачу в подвижной системе координат $x' = x - vt$, $y' = y$, связанной со штампом (штрихи далее опускаем). Штамп прижимается к полосе, приложенной с эксцентриситетом e силой P , отнесенной к единице длины штампа. В области контакта штампа с полосой возникают силы кулоновского трения $\tau_{xy} = kq$, где $q = q(x) = -\sigma_y(y = h, |x| \leq a)$ – контактное давление.

Вследствие трения в области контакта происходит выделение в единицу времени на единицу площади количества тепла [7]

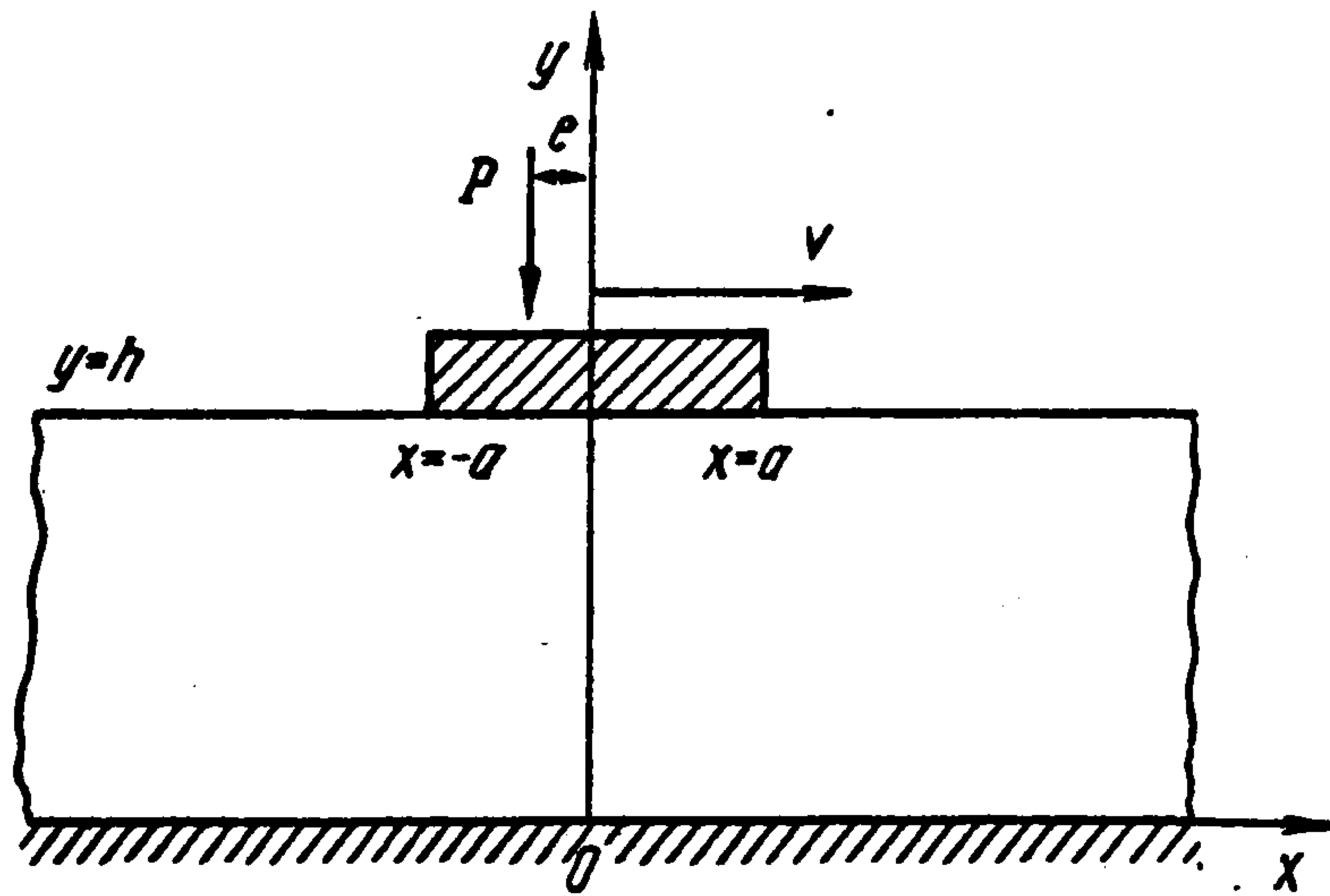
$$Q = v\tau_{xy} \quad (1.1)$$

которое приводит к нагреванию поверхности полосы, а также всего штампа до температуры $T_*(x) = T(x, h)$ ($|x| \leq a$), превышающей температуру нижней границы полосы $T_0 = 0$. При этом считаем, что на нижней границе полосы, а также вне зоны контакта поддерживается температура окружающей среды, которую и принимаем за начало отсчета температур. Таким образом, формируется поток тепла через полосу, равный при $y = h$ [12]

$$Q = \lambda_* \partial T / \partial y \quad (1.2)$$

где λ_* – коэффициент теплопроводности материала упругой полосы,.

Предполагая, что процесс теплопроводности является квазистационарным по отно-



пению к движущейся системе координат [13], приходим к уравнению теплопроводности

$$\Delta T + 2\omega \partial T / \partial x = 0, \quad \omega = v / 2a, \quad (1.3)$$

где a — коэффициент температуропроводности материала полосы, со следующими граничными условиями:

$$y = 0 : T = 0$$

$$y = h : T = 0, \quad |x| > a; \quad \partial T / \partial y = Q / \lambda_*, \quad |x| \leq a \quad (1.4)$$

Разыскивая решение краевой задачи (1.3), (1.4) в виде

$$T(x, y) = \frac{e^{-\omega x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha) \frac{\text{sh} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} y}{\text{sh} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} h} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.5)$$

$$U(\alpha) = \int_{-a}^a u(x) e^{i\alpha x} dx, \quad u(x) = e^{\omega x} T_*(x)$$

в предположении непрерывности функции $u(x)$ в точках $x = \pm a$ получим уравнение, связывающее функции $u(x)$ и $Q(x)$:

$$\int_{-a}^a u'(\xi) K_0(\xi - x) d\xi = -\pi e^{\omega x} Q(x) / \lambda_*, \quad |x| \leq a \quad (1.6)$$

$$K_0(t) \int_0^{\infty} \frac{L_0(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha t d\alpha, \quad L_0(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \text{cth} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} h$$

Для определения напряженно-деформированного состояния полосы (плоская деформация) воспользуемся, пренебрегая инерционными членами, уравнениями линейной несвязанной термоупругости Ламе–Неймана [12] в подвижной системе координат. Примем, что скорость v меньше скоростей c_1 , c_2 и c_p соответственно продольных, поперечных волн и волн Релея в упругой полосе, т.е. $v < c_p < c_2 < c_1$, причем $c_1^2 = 2G(1-\nu)[\rho(1-2\nu)]^{-1}$, $c_2^2 = G\rho^{-1}$, где ρ , G , ν — соответственно плотность, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полосы. Будем искать решение уравнений Ламе–Неймана в форме [2]

$$u_x = \partial \Phi / \partial x + \partial \Psi / \partial y, \quad u_y = \partial \Phi / \partial y - \partial \Psi / \partial x \quad (1.7)$$

Тогда пренебрегая влиянием сил трения на нормальные перемещения под штампом

[6], имеем следующую краевую задачу:

$$\square_1^2 \Phi = \beta T, \quad \square_2^2 \Psi = 0$$

$$y = 0: u_y = \tau_{xy} = 0$$

$$y = h: \sigma_y = 0, |x| > a; \sigma_y = -q(x), |x| \leq a; \tau_{xy} = 0 \quad (1.8)$$

$$\square_n^2 = \varepsilon_n^2 \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \quad \varepsilon_n^2 = 1 - v^2 / c_n^2, \quad n = 1, 2$$

где $\beta = \alpha_*(1+v)/(1-v)$, α_* — коэффициент линейного расширения материала полосы.

Из закона Гука и уравнений (1.8) следует, что

$$\frac{\sigma_y}{G} = -(1 + \varepsilon_2^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\tau_{xy}}{G} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - (1 + \varepsilon_2^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

Решение краевой задачи (1.8), (1.9) представим в виде интегралов Фурье

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_0(\alpha, y) + \beta e^{-\omega x} \varphi_1(\alpha, y)] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.10)$$

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Из граничных условий (1.8) при $y = 0$ найдем, что

$$\varphi_1(\alpha, y) = \frac{U(\alpha)}{\kappa_2 \operatorname{sh} \kappa_1 h} \frac{\kappa_2 \operatorname{sh} \kappa_1 y - \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2 y}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2} \quad (1.11)$$

$$\kappa_1 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \kappa_2 = \varepsilon_1(\alpha - i\omega)$$

$$\varphi_0(\alpha, y) = A(\alpha) \operatorname{ch}(\varepsilon_1 \alpha y), \quad \psi_0(\alpha, y) = B(\alpha) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \alpha y)$$

Определяя из граничных условий (1.8) при $y = h$ неизвестные функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ и сдвигая при этом контур интегрирования в интеграле, содержащем функцию $\varphi_1(\alpha, y)$ (используется аналитичность соответствующих функций в полосе $-\omega < \operatorname{Im} \alpha < 0$), приходим к интегральному уравнению вида ($u_y = -\delta, y = h, |x| \leq a$)

$$\frac{1}{G} \int_{-a}^a q(\xi) K_1(\xi - x) d\xi - \alpha_* \int_{-a}^a u(\xi) e^{-\omega \xi} K_2(\xi - x) d\xi = \pi \delta, \quad |x| \leq a \quad (1.12)$$

$$K_n(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_n(\alpha)}{\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha, \quad n = 1, 2$$

$$L_1(\alpha) = \frac{\gamma_2 \operatorname{th}(\varepsilon_1 \alpha h) \operatorname{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}{\operatorname{th}(\varepsilon_1 \alpha h) - \gamma_1 \operatorname{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}, \quad \gamma_1 = \frac{(1 + \varepsilon_2^2)^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - \varepsilon_2^2}{4\varepsilon_2}$$

$$L_2(\alpha) = \frac{\beta(1 + \varepsilon_2^2) \gamma_2 \operatorname{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}{\varepsilon_2(\alpha(1 - \varepsilon_1^2) + i2\omega)\alpha_*} \frac{\kappa[\operatorname{cth}(\kappa h) - \operatorname{cosech}(\kappa h) \operatorname{sech}(\varepsilon_1 \alpha h)] - \varepsilon_1 \alpha \operatorname{th}(\varepsilon_1 \alpha h)}{\operatorname{th}(\varepsilon_1 \alpha h) - \gamma_1 \operatorname{th}(\varepsilon_2 \alpha h)} \quad (1.13)$$

$$\kappa = \sqrt{\alpha(\alpha + 2i\omega)}$$

При $\beta = 0$ интегральное уравнение (1.12), (1.13) совпадает с полученным ранее ([2], с. 289)]. Можно убедиться, что при $v < c_p$ знаменатель в выражениях (1.13) для $L_{1,2}(\alpha)$ положителен и регулярен при всех $\alpha > 0$, так как скорости волны Релея $v = c_p$ отвечает значение $\gamma_1 = 1$ [2].

При учете соотношения $Q(x) = kvq(x)$ ($|x| \leq a$) для определения функций $u(x)$ и $q(x)$ имеем систему двух интегральных уравнений (1.6), (1.12). Кроме того, очевидно, должны выполняться два интегральных условия равновесия штампа

$$\int_{-a}^a q(x)dx = P, \quad \int_{-a}^a xq(x)dx = Pe \quad (1.14)$$

2. Предположим, что коэффициент трения линейным образом зависит от контактной температуры $T_*(x)$ ($|x| \leq a$), т.е. при учете (1.5)

$$k = k(T_*) = k_1 + k_2\beta e^{-\alpha x} u(x) \quad (2.1)$$

где k_1, k_2 – некоторые постоянные, зависящие от материалов трущейся пары (штамп – полоса).

Тогда в новых безразмерных обозначениях

$$x' = x/a, \quad \xi' = \xi/a, \quad \omega' = \omega h, \quad \delta' = \delta/a, \quad \lambda = h/a$$

$$q'(x') = q(x)/G, \quad u_0(x') = \alpha_* u(x), \quad \alpha' = \alpha h, \quad \kappa' = \kappa h$$

$$L'_n(\alpha) = L_n(\alpha') \quad (n = 0, 1, 2), \quad \varepsilon = \alpha_* \nu Ga / \lambda_* \quad (2.2)$$

$$k'_1 = k_1 \varepsilon, \quad k'_2 = k_2 \varepsilon \beta / \alpha_*, \quad P' = P / Ga, \quad e' = e / a$$

интегральные уравнения (1.6), (1.12), (1.13) запишем в виде (штрихи в обозначениях (2.2) опускаем))

$$\frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 u'_0(\xi) K_0\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = -\pi(k_1 e^{\alpha x/\lambda} + k_2 u_0(x))q(x), \quad (|x| \leq 1) \quad (2.3)$$

$$\int_{-1}^1 q(\xi) K_1\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi - \int_{-1}^1 u_0(\xi) e^{-\omega\xi/\lambda} K_2\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi\delta, \quad (|x| \leq 1) \quad (2.4)$$

Систему нелинейных уравнений (2.3), (2.4) исследуем асимптотически при $\lambda \rightarrow \infty$, т.е. для случая относительно толстой полосы ($h/a \gg 1$). Используя известные интегралы [2]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u} - \cos ut}{u} du = \ln|t|, \quad \int_0^\infty \sin ut du = \frac{1}{t} \quad (2.5)$$

выделим главные сингулярные члены в ядрах $K_n(t)$ ($n = 0, 1, 2$) уравнений (2.3), (2.4). После дифференцирования по x уравнения (2.4) систему (2.3), (2.4) при $\lambda \rightarrow \infty$ можно представить в виде

$$\int_{-1}^1 \frac{u'_0(\xi)}{\xi-x} d\xi = -\pi(k_1 + k_2 u_0(x))q(x), \quad (|x| \leq 1) \quad (2.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{q(\xi) + C_* u_0(\xi)}{\xi-x} d\xi = 0, \quad C_* = \frac{\beta(1+\varepsilon_2^2)}{\alpha_*(1-\varepsilon_1^2)} \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) найдем, что [2]

$$q(x) + C_* u_0(x) = R / \sqrt{1-x^2} \quad (2.8)$$

где постоянная $R > 0$, очевидно, выражается через силу P и среднюю контактную температуру

$$u_* = \int_{-1}^1 u_0(x) dx, \quad R = (P + C_* u_*) / \pi \quad (2.9)$$

Выразим функцию $q(x)$ через $u_0(x)$ при помощи (2.8) и подставим в уравнение (2.6). Рассматривая теперь уравнение (2.6) как интегро-дифференциальное уравнение типа Прандтля относительно функции $u_0(x)$ и применяя известную методику ([2], с. 206), сведем его к эквивалентному интегральному уравнению Гаммерштейна

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi, x) \left\{ -k_2 C_* u_0^2(\xi) + \left[\frac{k_2 P}{\sqrt{1-\xi^2}} - k_1 C_* \right] u_0(\xi) + \frac{k_1 R}{\sqrt{1-\xi^2}} \right\} d\xi, \quad (2.10)$$

$$|x| \leq 1$$

$$F(\xi, x) = \ln \frac{1 - \xi x + \sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2)}}{1 - \xi x - \sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2)}} \quad (2.11)$$

Изучим возможность "ответвления" решений от известного решения $u_*(x)$ уравнения (2.10) (точки бифуркации) [14]. Для этого произведем в (2.10) замену искомой функции по формуле $u_0(x) = y(x) + u_*(x)$ и возьмем дифференциал Фреше при $y(x) \equiv 0$ оператора Гаммерштейна в интегральном уравнении относительно функции $y(x)$. Получим линейное однородное интегральное уравнение

$$h(x) - \frac{k_2}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi, x) \gamma(\xi) h(\xi) d\xi = 0, \quad |x| \leq 1 \quad (2.12)$$

$$\gamma(\xi) = \frac{R}{\sqrt{1-\xi^2}} - 2C_* u_*(\xi) - C_* \frac{k_1}{k_2} \quad (2.13)$$

Пусть $k_1 = \mu k_2$, $\mu = \text{const}$, а сила P так велика, что для функции (2.13) выполняется условие $\gamma(\xi) > 0$ ($|\xi| < 1$). Тогда уравнение (2.12) можно рассматривать в пространстве $L^2_\gamma(-1, 1)$ с весом $\gamma(\xi)$, где оно представляет собой интегральное уравнение с ядром Гильберта-Шмидта, которое, более того, является положительно определенным ядром. Следовательно, все характеристические числа $k_2 = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$), отвечающие уравнению (2.12), положительны. Каждое такое нечетно-кратное (в частности, простое) число λ_n будет искомой точкой бифуркации [14].

Аппроксимируем теперь функцию $q(x)$ выражением $P / (\pi \sqrt{1-x^2})$, подобно тому, как это сделано в [6], т.е. положим $C_* = 0$. Учитывая спектральное соотношение [15]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi, x) U_{n-1}(x) dx = \sqrt{1-\xi^2} \frac{U_{n-1}(\xi)}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

где $U_{n-1}(x)$ – полиномы Чебышева второго рода, решение уравнения (2.10) при $C_* = 0$ представим в виде

$$u_0(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_{n-1}(x) \quad (2.15)$$

Свободный член в (2.10) также разложим в ряд по полиномам Чебышева

$$\frac{k_1 P}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{F(\xi, x)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_{n-1}(x) \quad (2.16)$$

причем коэффициенты a_n можно найти из условия

$$\int_{-1}^1 U_{n-1}(\xi) U_{m-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi/2 & n = m \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

Неизвестные постоянные b_n в разложении (2.15) находятся по формулам

$$b_n = \pi n a_n / (\pi n - k_2 P) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

Из формул (2.17) следует, что осуществление квазистационарного режима теплопроводности становится невозможным при $k_2 P = \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$). Отсюда переходя к размерным величинам, найдем критические скорости движения штампа

$$v_n = \pi n \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\lambda_*}{R \alpha_* k_2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.18)$$

Таким образом, тепловой взрыв может происходить лишь при $k_2 > 0$, т.е. когда коэффициент трения линейно возрастает с увеличением температуры. Аналогичный результат получен при рассмотрении других задач [6–9]. Из (2.18) видно, что чем хуже теплопроводность упругой полосы и чем больше сила, прижимающая движущийся штамп, тем ниже порог первой критической скорости v_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980. 303 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986, 329 с.
3. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 494–501.
4. Barber J.R. Thermoelastic displacements and stresses due to a heat source moving over the surface of a half plane // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1984. V. 51. N 3. P. 636–640.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей // ПМТФ. 1985. № 3. С. 129–131.
7. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 1. С. 24–28.
8. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.
9. Александров В.М. Осесимметричная контактная задача термоупругости с учетом износа // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 73–80.
10. Евтушенко А.А., Коваленко Е.В. Контактная задача об износе оплавлением вкладыша подшипника скольжения // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 148–156.
11. Коваленко Е.В., Евтушенко А.А. Износ подшипника скольжения с учетом тепловыделения от трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 2. С. 259–269.
12. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 239 с.
13. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз. 1963. 251 с.
14. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.