УДК 539.3

© 1994 г. А.В. Шанин

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ К ЗАДАЧАМ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ КЛИНОВЫХ ВОЛН

Предлагается методика решения задачи об отражении клиновой волны от ребра остроугольного упругого клина, инвариантной относительно двухпараметрической группы преобразований. Представления этой группы используются для нахождения средних значений интенсивностей фиктивных источников, расположенных на ребре клина. Полученные средние значения используются для построения неизвестных функций с помощью разложения по полиномам Эрмита.

Трудность решения задачи возбуждения клиновых волн с торца остроугольного клина, а также задачи отражения волны, падающей на торец, связана со следующим. Во-первых, задача рассеяния на торце не имеет малых параметров, как, например, задача рассеяния на дефекте ребра [1], и поэтому не может быть решена методами возмущений. Во-вторых, собственные функции задачи распространения клиновых мод в остроугольном клине выражаются через специальные функции [2], и по ним не удается построить разложения Фурье. В-третьих, наличие пары граничных условий не допускает применения метода отражения к задаче рассеяния на торце.

Задача возбуждения клиновой волны обладает двухпараметрической группой симметрий. Как известно, наличие группы симметрий позволяет понизить порядок обыкновенных дифференциальных уравнений [3] и осуществить разделение переменных в уравнениях с частными производными [4]. В данной работе представления группы симметрий используются для построения обобщенного преобразования Фурье для интегрального уравнения, к которому исследуемая задача сводится с помощью теории потенциалов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу возбуждения колебаний в остроугольном упругом клине. Пусть клин имеет торец, к которому приложены сосредоточенные силы и моменты. Совместим ребро клина с осью $y$, а торец с осью $x$. Таким образом, клин занимает область $x > 0$, $y > 0$.

Для описания колебаний остроугольного упругого клина воспользуемся теорией тонких пластин [2]. Уравнение для поперечных антисимметричных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}-mx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{I(x,y,t)}{x} \tag{1.1}$$

$$M_x=-D_0x^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-D_0x^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy}=D_0(1-\nu)x^3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\quad D_0=\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad m=2\rho\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

где $w(x,y,t)$ – поперечное смещение точек клина, $E$ и $\nu$ – упругие постоянные, $\rho$ –

плотность материала, $\theta$ – угол раскрыва клина, $I(x, y, t)$ – вспомогательная функция, характеризующая фиктивные источники и равная нулю в области, занятой клином.

На ребре клина (при $x = 0$) выполняются граничные условия

$$M_x = 0, \ \partial M_x / \partial x - 2\partial M_{xy} / \partial y = 0 \tag{1.2}$$

которые в данной задаче сводятся к требованию конечности $w$ вблизи ребра. На торце клина определим операторы

$$\Gamma_1[w] \equiv x^{-1}M_y\big|_{y=0} = f_1(x,t)$$

$$\Gamma_2[w] \equiv (\partial M_y / \partial y - 2\partial M_{xy} / \partial x)\big|_{y=0} = f_2(x,t) \tag{1.3}$$

Здесь функциями $xf_1(x, t)$ и $f_2(x,t)$ являются сосредоточенные момент и сила, приложенные к торцу клина. Отметим, что множитель $x$ перед моментом $f_1$ выбран для обеспечения алгебраической однородности нулевой степени в обоих граничных условиях.

Задача отражения клиновой волны сводится к задаче возбуждения, если положить функции $f_1$ и $f_2$ в правой части (1.3) равными, соответственно $-f_1'$ и $-f_2'$, где $f_1'$ и $f_2'$ – значения операторов $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ для падающей волны.

Для решения граничной задачи (1.1) – (1.3) воспользуемся методами теории потенциала. Введем неоднородность $I$ на торце клина в виде суммы источников типа простого и двойного слоя и потребуем, чтобы решение уравнения (1.1), найденное в области ($-\infty < y < \infty$), удовлетворяло при $y = +0$ граничным условиям (1.3). Алгебраически однородную функцию $I$ выберем в виде

$$I(x,y,t) = \varphi_1(x,t)x^2\delta'(y) + \varphi_2(x,t)x\delta(y) \tag{1.4}$$

где $\delta$ – дельта-функция Дирака, $\delta'$ – ее производная, $\varphi_i$ – весовые коэффициенты.

Для решения уравнения (1.1), (1.4) введем функцию Грина $G(x, y, t, x', y', t')$, которая есть решение уравнения (1.1) при $I(x,y,t) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(t-t')$. Функция $G$ должна удовлетворять условиям излучения. Процедура вычисления $G$ приводится в Приложении. Решение уравнения (1.1) является сверткой функции Грина с (1.4)

$$w(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{0}^{\infty} G(x,y,t,x',y',t')I(x',y',t')dx'dy'dt' \tag{1.5}$$

Значения операторов $\Gamma_i[\omega]$ имеют при $y = 0$ разрывы, равные соответственно [5]

$$\Gamma_i[\omega]\big|_{y=+0} - \Gamma_i[\omega]\big|_{y=-0} = \varphi_i(x,t) \tag{1.6}$$

Принимая во внимание, что представление Фурье производных функции Грина (П.1) дает в точке разрыва среднее арифметическое значений справа и слева и что граничные условия ищутся при $y = +0$, получим

$$\Gamma_i[\omega]\big|_{y=+0} = \tfrac{1}{2}\varphi_i + \Gamma_i[\omega]\big|_{y=0} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.5) в (1.7) и используя четность $G$ по оси $y$, окончательно получаем

$$f_i(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} G_{ij}^{*}(x,t,x',t')\varphi_j(x',t')dx'dt' \tag{1.8}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование и

$$G^*_{11}=G^*_{22}=\tfrac{1}{2}\delta(x-x')\delta(t-t'),\ \ G^*_{12}=\Gamma_1[xG(x,y,t,x',0,t')]$$

$$G^*_{21}=\Gamma_2[x^2\frac{\partial}{\partial y}G(x,y,t,x',0,t')] \qquad (1.9)$$

Операторы $\Gamma_i$ действуют по переменным $x$ и $y$.

Таким образом, задача возбуждения клиновой волны сводится к интегральному уравнению (1.8) относительно $\varphi_i$.

**2. Группа симметрий.** В дальнейшем изложении координаты $x$ и $y$ считаются безразмерными. Непосредственной проверкой устанавливается, что уравнение (1.8) допускает двухпараметрическую группу $H$ преобразований координат, т.е. оно остается справедливым при одновременном применении преобразования $h\in H$ к аргументам функций $\varphi_i$ и $f_i$.

Группа $H$ порождается сдвигами во времени и гомотетией полуплоскости $x>0$ с произвольными положительными коэффициентами. Параметризуем группу $H$ следующим образом. Пусть в результате действия элемента группы $h(x_0, t_0)$ точка $(x, t)$ переходит в точку

$$h(x_0,t_0)\circ(x,t)=(xx_0,tx_0+t_0) \qquad (2.1)$$

Групповая операция задается формулой

$$h(x_2,t_2)h(x_1,t_1)=h(x_2x_1,x_2t_1+t_2) \qquad (2.2)$$

Введем на группе $H$ левоинвариантную меру

$$d\mu_L(h(x,t))=x^{-2}dxdt \qquad (2.3)$$

Очевидно, что ядро $\left\|G^*_{ij}\right\|$ представимо при помощи функции двух аргументов, инвариантных относительно преобразований группы $H$

$$G^*_{ij}(x,t,x',t')=(x')^{-2}G_{ij}(x/x',\ (t-t')/x') \qquad (2.4)$$

Поскольку параметры $x_0$ и $t_0$ группы $H$ определены на той же области, что и координаты $x$ и $t$, то можно считать все функции определенными на элементах группы $H$. В соответствии с формулами (2.3)–(2.4)

$$F_i(h_o)=\int_H G_{ij}(h_r^{-1}h_o)\varphi_j(h_r)d\mu_L(h_r) \qquad (2.5)$$

$h_o$ и $h_r$ – элементы группы, соответствующие точкам наблюдения и излучения сответственно.

Отметим, что правая часть (2.5) представляет собой свертку $\left\|G_{ij}\right\|$ и $\{\varphi_j\}$ на группе $H$ [6]. Следовательно, для решения уравнения (2.5) может быть применено обобщенное преобразование Фурье. Для этого вводится двухпараметрическое семейство представлений$T(h)$ группы $H$, уравнение (2.5) усредняется по группе $H$ с весовыми коэффициентами, определяемыми каждым из представлений $T$, и при этом появляется возможность выразить средние от $\varphi_i$ через средние от $f_i$. Из средних от $\varphi_i$ по всем представлениям синтезируются функции $\varphi_i(h)$.

Пусть $T$-$n$ – мерное представление группы $H$. Определим $\Phi_i$ и $F_i$ как векторы-столбцы в $n$-мерном пространстве представления $T$, причем одна из координат $\Phi_i$ и $F_i$ в некотором базисе равна соответственно $\varphi_i(h)$ и $f_i(h)$, а остальные $n$–1 координат равны нулю. Отметим, что в этом пространстве оператор $\|G_{ij}\|$ является скалярным.

Пользуясь перестановочностью оператора $\|G_{ij}\|$ с любой матрицей, не зависящей от $h_r$, запишем выражения для средних от

$$\langle T,F_i\rangle_k = \int\limits_H T_{kl}(h_o^{-1})\int\limits_H G_{ij}(h_r^{-1}h_o)\Phi_{jl}(h_r)d\mu_L(h_r)d\mu_L(h_o) =$$

$$= \iint\limits_H G_{ij}(h_r^{-1}h_o)T_{km}(h_o^{-1}h_r)T_{ml}(h_r^{-1})\Phi_{jl}(h_r)d\mu_L(h_r^{-1}h_o)d\mu_L(h_r) =$$

$$= \int\limits_H G_{ij}(\tau)T_{kl}(\tau^{-1})\langle T,\Phi_j\rangle_l d\mu_L(\tau), \;\; \tau = h_r^{-1}h_o \tag{2.6}$$

Средние от $\langle T, F_i\rangle_k$ и $\langle T, \Phi_i\rangle_k$ определяются выражениями

$$\langle T,F_i\rangle_k \equiv \int\limits_H T_{kl}(h^{-1})F_{il}(h)d\mu_L(h), \;\; \langle T,\Phi_i\rangle_k \equiv \int\limits_H T_{kl}(h^{-1})\Phi_{il}(h)d\mu_L(h)$$

где $T_{kl}$ – матрица представления $T$, индексы $k$ и $l$ указывают на компоненты в пространстве представления.

Отметим, что вектор $\langle T, \Phi i\rangle$ не зависит от координат. Его компоненты могут быть определены следующим образом. Определим матрицы $\|G_{ijkl}\|$ и $\|G_{ijkl}\|^{-1}$ как:

$$G_{ijkl}\int\limits_H G_{ij}(\tau)T_{kl}(\tau^{-1})d\mu_L(\tau), \;\; G_{ijkl}^{-1}G_{j\upsilon lm} = \delta_{i\upsilon}\delta_{km} \tag{2.7}$$

Тогда

$$\langle T,F_i\rangle_k = G_{ijkl}\langle T,\Phi_j\rangle_l, \;\; \langle T,\Phi_i\rangle_k = G_{ijkl}^{-1}\langle T,F_j\rangle_l \tag{2.8}$$

в случае невырожденной матрицы $\|G_{ijkl}\|$.

**3. Построение представлений $H$ и синтез решения.** Группа $H$ не имеет двухпараметрического семейства одномерных представлений [7]. Такое семейство представляло бы возможность непосредственного построения разложения Фурье. Данная группа $H$ допускает двухпараметрическое семейство приводимых неразложимых представлений $T^{\alpha,n}$, где $\alpha$ – непрерывный комплексный параметр, а $n$ = 0, 1, 2.... Размерность каждого из представлений $T^{\alpha,n}$ равна $n$ + 1.

Базисом представления $T^{\alpha,n}$ является множество функций

$$\mathbf{e}_k = t^k x^\alpha, \;\; k = 0,1,\ldots,n, \;\; \alpha \in \mathrm{C} \tag{3.1}$$

определенных на полуплоскости $x > 0$. Найдем матрицу $T_{kl}^{\alpha,n}$, обладающую свойством

$$h(x_0,t_0)\circ \mathbf{e}_l = T_{kl}^{\alpha,n}\mathbf{e}_k$$

Анализируя действие элементов группы $H$ на функции (3.1) и используя биномиальное разложение, получим

$$T_{kl}^{\alpha,n}(h(x,t)) = (-1)^{l-k}C_l^k x^{-\alpha+l}t^{l-k}, \;\; T_{kl}^{\alpha,n}(h^{-1}(x,t)) = C_l^k x^{\alpha+k}t^{l-k} \tag{3.2}$$

При $l < k$ соответствующее значение $C_l^k$ полагается равным нулю.

Определим векторы $\Phi_i$ и $F_i$ как

$$\Phi_{ik} = \delta_{kn}\varphi_i, \;\; F_{ik} = \delta_{kn}f_i, \;\; k = 0,1,\ldots,n \tag{3.3}$$

т.е., ненулевыми являются последние координаты. Компоненты $\langle T,\Phi_i\rangle$, $\langle T,F_i\rangle$ и $\|G_{ijkl}\|$ выражаются формулами

$$\langle T,\Phi_i\rangle_k = C_n^k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty x^{\alpha+k} t^{n-k} \varphi_i(x,t) x^{-2} dtdx \tag{3.4}$$

$$\langle T,F_i\rangle_k = C_n^k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty x^{\alpha+k} t^{n-k} F_i(x,t) x^{-2} dtdx \tag{3.5}$$

$$G_{ijkl} = C_l^k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty x^{\alpha+k} t^{l-k} G_{ij}^*(x,t,1,0) x^{-2} dtdx \tag{3.6}$$

При этом $\langle T, F_i\rangle$ вычисляется из граничных условий задачи (1.1) – (1.3), а $\langle T, \Phi_i\rangle$ находится по формуле (2.8).

Интегралы, входящие в (3.4) – (3.6), следует понимать как действие на функции $\varphi_i$, $F_i$, $\overset{*}{G}_{ij}$ обобщенных функций $x^\alpha t^n$, регуляризованных как, например, в [8].

Синтез функций $\varphi_i(x, t)$ осуществляется следующим образом. Положим $k = 0$, $\alpha = -i\omega + 1$. Интегралы по $x$ представляют собой преобразование Фурье по переменной $\ln x$ и могут быть обращены обычным образом. По переменной $t$ допустимо построение разложения по системе ортогональных полиномов, например, полиномов Эрмита. Пусть $H_n^m$ – коэффициенты ортонормированных полиномов Эрмита, т.е. [9]

$$H_n(t) = \sum_0^n H_n^m t^m, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt = \delta_{mn} \tag{3.7}$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty H_n(t)\varphi_i(x,t) x^{\alpha-2} dxdt = \sum_{m=0}^n H_n^m \langle T^{\alpha,m},\ \Phi_i\rangle_0 \tag{3.8}$$

Формулы преобразования Фурье по переменной $\ln x$, а также соотношения ортогональности полиномов Эрмита (3.7) дают разложение

$$\varphi_i = \frac{e^{-t^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty x^{i\omega} \sum_{n=0}^\infty H_n(t) \sum_{m=0}^n H_n^m \langle T^{\alpha,m},\ \Phi_i\rangle_0 d\omega \tag{3.9}$$

Формула (3.9), где $\langle T, \Phi i\rangle$ определены из (2.8), представляет решение уравнения (1.8).

**4. Обсуждение результатов.** Предложена методика решения задачи излучения клиновых акустических волн, суть которой сводится к следующему.

Вычисляется функция Грина $G(x, y, t, x', y', t')$ (см. Приложение). По формулам (1.9) строится функция $\overset{*}{G}_{ij}$. Для всех действительных $\omega$ и целых неотрицательных $k$ и $l$ вычисляется $G_{ijkl}$ с помощью (3.6). Осуществляется обращение матрицы $\|G_{ijkl}\|$.

2. Синтезируются функции $f_i$ в соответствии с (1.3). Вычисляются средние $\langle T, F_i\rangle$ по формуле (3.5) и $\langle T, \Phi_i\rangle$ из (2.8) с помощью $\|G_{ijkl}\|^{-1}$.

3. По формуле (3.9) находятся функции $\varphi_i(x, t)$. Решение определяется сверткой (1.5), (1.4).

Техника вычисления интегралов и рядов (3.4)–(3.9) требует дальнейшего развития.

*Приложение.* Найдем функцию Грина задачи (1.1)–(1.2). Принимая во внимание, что $G = G(x, y-y', t-t', x')$ и считая $y' = 0$, $t' = 0$, можно записать

$$G(x,y,t,x',0,0) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_{k,\omega}(x,x')e^{i(ky+\omega t)}dkd\omega \tag{П.1}$$

Уравнение (1.1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению ($x'$ – параметр)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[-D_0x^3\left(\frac{d^2\overline{G}}{dx^2} - \nu k^2\overline{G}\right)\right] + k^2x^3D_0\left(-k^2\overline{G} + \nu\frac{d^2\overline{G}}{dx^2}\right) +$$

$$+2D_0(1-\nu)k^2\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{d\overline{G}}{dx}\right) + mx\omega^2\overline{G} = \frac{1}{(2\pi)^2x'}\delta(x-x') \tag{П.2}$$

В области $0 < x < x'$ существуют два решения, ограниченные при $x \to 0$ [2, 9]:

$$w_1 = M(-\xi, 2;\ 2kx)e^{-kx},\quad w_2 = M(2+\xi, 2;\ 2kx)e^{-kx}$$

$$\xi = -1 + \tfrac{1}{2}[6\nu - 2 + 3(1-\nu^2)\rho E^{-1}\mathrm{tg}^{-2}(\theta/2)(\omega/k)^2]^{1/2}$$

Здесь $M(a, b; z)$ – функция Куммера. В области $x > x'$ существуют два решения, ограниченные при $x \to \infty$:

$$w_3 = U(-\xi, 2;\ 2kx)e^{-kx},\quad w_2 = U(2+\xi, 2;\ 2kx)$$

где $U(a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Решение уравнения (П.2), есть

$$\overline{G}(x) = -(a_1w_1 + a_2w_2),\ \ 0 < x < x';\ \ \overline{G}(x) = (a_3w_3 + a_4w_4),\ \ x > x' \tag{П.3}$$

где $a_i$ – постоянные, определяемые из уравнений

$$\sum_{i=1}^{4} a_iw_i^{(j-1)} = -\delta_{j4}D_0^{-1}(2\pi)^{-2}(x')^{-4},\ \ j = 1,\dots 4$$

Пусть $W_{kl}$ – матрица, обратная к $w_j^{(i-1)}$. Тогда $a_i(x') = -D_0^{-1}(2\pi)^{-2}(x')^{-4}W_{i4}(x')$.

Возвращаясь к (П.3), (П.1), получим искомое представление $\overline{G}$.

Такое представление $\overline{G}$ не является единственным. Может оказаться более удобным представление $\overline{G}$ в виде ряда по полиномам Лагерра. Пусть $L[w]$ – оператор, стоящий в левой части (П.2). Справедливы равенства [12]

$$L[L_n^1(2k_nx)e^{-k_nx}] = 0,\ \ k_n = \omega/c_n$$

где $L_m^1$ – полиномы Лагерра первого рода, а $c_m$ – скорости клиновых волн. Очевидно, что при любых $\omega$ и $k$

$$L[L_n^1(2k_nx)e^{-k_nx}] = mx(\omega^2 - c_n^2k^2)L_n^1(2kx)e^{-kx}$$

Пользуясь соотношением ортогональности для полиномов Лагерра [9]

$$\int_0^{\infty} e^{-z}zL_m^1(z)L_n^1(z)dz = (n+1)\delta_{mn}$$

представим функцию $\overline{G}$ в виде ряда

$$\overline{G}_{k,\omega}(x,x') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^2e^{-k(x'+x)}L_n^1(2kx')L_n^1(2kx)}{m\pi^2x'(n+1)(\omega^2 - c_n^2k^2)}$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Крылов В.В., Шанин А.В.* Рассеяние клиновой акустической волны на неглубокой выемке. // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 292–298.
2. *McKenna J., Boyd G.D.,. Thurston R.N.* Plate theory solution for flexural acoustic waves along the tip of a wedge // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1974. V. 21. No 3. P. 178–186.

3. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
4. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 342 с.
5. *Шанин А.В.* К выводу граничных условий для уравнения колебаний тонкой пластины методом обобщенных функций. // ПММ. Т. 57. N 2. 1993. С. 161–163.
6. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978. 343 с.
7. *Наймарк М.А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976. 558 с.
8. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1993