

УДК 539.3: 534.1

© 1994 г. Е.И. Свешникова

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В СЛАБОУНИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ НЕСЖИМАЕМОМ МАТЕРИАЛЕ

Изучается влияние анизотропии на ударные волны в несжимаемой упругой среде. При этом не делается предположения о малости деформаций. Особое внимание уделено таким материалам, у которых нелинейная зависимость напряжений от деформаций имеет точку перегиба. Анизотропия считается малой по сравнению с проявлением нелинейных свойств среды, но и этого оказывается вполне достаточно для того, чтобы проявились новые качественные эффекты.

С использованием законов сохранения на разрыве найдено и исследовано множество состояний за ударной волной (ударная адиабата) при заданном состоянии перед ней, а также скорость движения фронта скачка для несжимаемой среды с малой анизотропией произвольного вида. Наглядно представлена ударная адиабата при простейшем конкретном виде анизотропии. На ней указаны участки, отвечающие требованиям эволюционности и неубывания энтропии.

1. Для описания движения упругой среды с плоскими волнами будем пользоваться лагранжевой декартовой системой координат x_i ($i = 1, 2, 3$) начального состояния, ось $x_3 = x$ выбрана по нормали к фронту волны, оси x_α ($\alpha = 1, 2$) – в плоскости фронта. Деформация в лагранжевом описании в общем случае характеризуется тензором градиентов перемещения $\partial w_i / \partial x_j$. При прохождении плоской волны в несжимаемой среде могут изменяться только две компоненты упомянутого тензора, а именно $\partial w_i / \partial x$, $i = 1, 2$ ($\partial w_3 / \partial x \equiv 0$ из-за несжимаемости среды), для которых примем обозначения $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$.

Известно, что гиперболическая система уравнений движения упругой среды [1] допускает разрывные решения. Их появление может быть вызвано разрывными начальными или граничными данными, а также в процессе деформации профиля волны при ее эволюции. Изучение плоских волн Римана в упругом теле [2] позволяет указать для каждого конкретного материала те процессы, которые ведут к опрокидыванию профиля волны и образованию разрыва.

На поверхности разрыва должны быть выполнены соотношения, следующие из интегральных законов сохранения массы, количества движения и энергии. Величины скачка любой физической величины на фронте разрыва будем обозначать $[a] = a^+ - a^-$, где a^- – ее значение непосредственно перед разрывом, a^+ (или a) – за ним. Когда на фронте не происходит выделения или поглощения массы, импульса, энергии, условия на разрыве в упругой среде имеют вид [1, 3]

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right] = \rho_0 W^2 [u_i], \quad [\Phi] - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \frac{\partial \Phi^-}{\partial u_i} \right) [u_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Здесь W – скорость распространения по лагранжевой координате фронта волны, $\Phi(u_i, S)$ – упругий потенциал среды (внутренняя энергия единицы начального объема), S – энтропия единицы массы, ρ_0 – плотность среды в начальном состоянии. В случае несжимаемого материала $i = 1, 2$ и $\rho_0 = \rho = \text{const}$. При заданном состоянии перед ударной волной система (1.1) определяет множество возможных состояний за скачком, каждое из которых соответствует своей величине W . Это однопараметрическое множество представляет кривую в фазовом пространстве u_i, S , называемую ударной адиабатой. Очевидно, ее вид и свойства зависят от конкретной функции $\Phi(u_i, S)$, задающей материал.

Ранее для сжимаемой среды были исследованы возможные состояния за скачком малой интенсивности в ненапряженной изотропной среде [1], в предварительно деформированной или естественно анизотропной среде [3, 4], а также за скачком конечной интенсивности в изотропном материале со специальным видом функции Φ [5, 6]. Для несжимаемой изотропной среды плоскополяризованные ударные волны (в которых меняется только одна из величин u_1, u_2) изучены в [7].

В изотропных средах упругий потенциал Φ зависит от компонент u_1, u_2 сдвиговых деформаций в плоскостях параллельных фронту волны симметричным образом. Тогда вместо компонент u_1, u_2 можно ввести модуль сдвиговой деформации ϵ_τ с помощью равенства $\epsilon_\tau^2 = u_1^2 + u_2^2 \equiv r^2$. В силу предполагаемой гладкости зависимости Φ от u_1 и u_2 в изотропном материале $\Phi = \Phi(r^2, S)$. Подобным свойством обладает внутренняя энергия среды с замороженным в нее электромагнитным полем в магнитной гидродинамике [8]. И в неизотропных средах направление распространения плоских волн может оказаться таким, что в плоскости фронта волны имеется симметрия зависимости Φ от u_1 и u_2 , т.е. опять $\Phi = \Phi(r^2, S)$. Такую ситуацию будем называть "волновой изотропией" и отличие именно от нее в дальнейшем называем анизотропией.

Ниже будут изучаться ударные волны в несжимаемых средах, у которых отличие от волновой изотропии считаем малым и упругий потенциал представляем в виде двух слагаемых

$$\Phi(u_i, S) = F(u_1^2 + u_2^2, S) + gp(u_i) \quad (1.2)$$

первое из которых содержит все основные нелинейные свойства среды, а второе добавляет малую анизотропию, причем $p(u_i)$ – функция произвольного вида, $g > 0$ – малый масштабный множитель. Будем, кроме того, считать, что зависимость Φ от энтропии S аддитивная. Упругий потенциал тогда представлен выражением

$$\Phi(u_i, S) = F(r^2) + gp(u_1, u_2) + \psi(S), \quad r^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad (1.3)$$

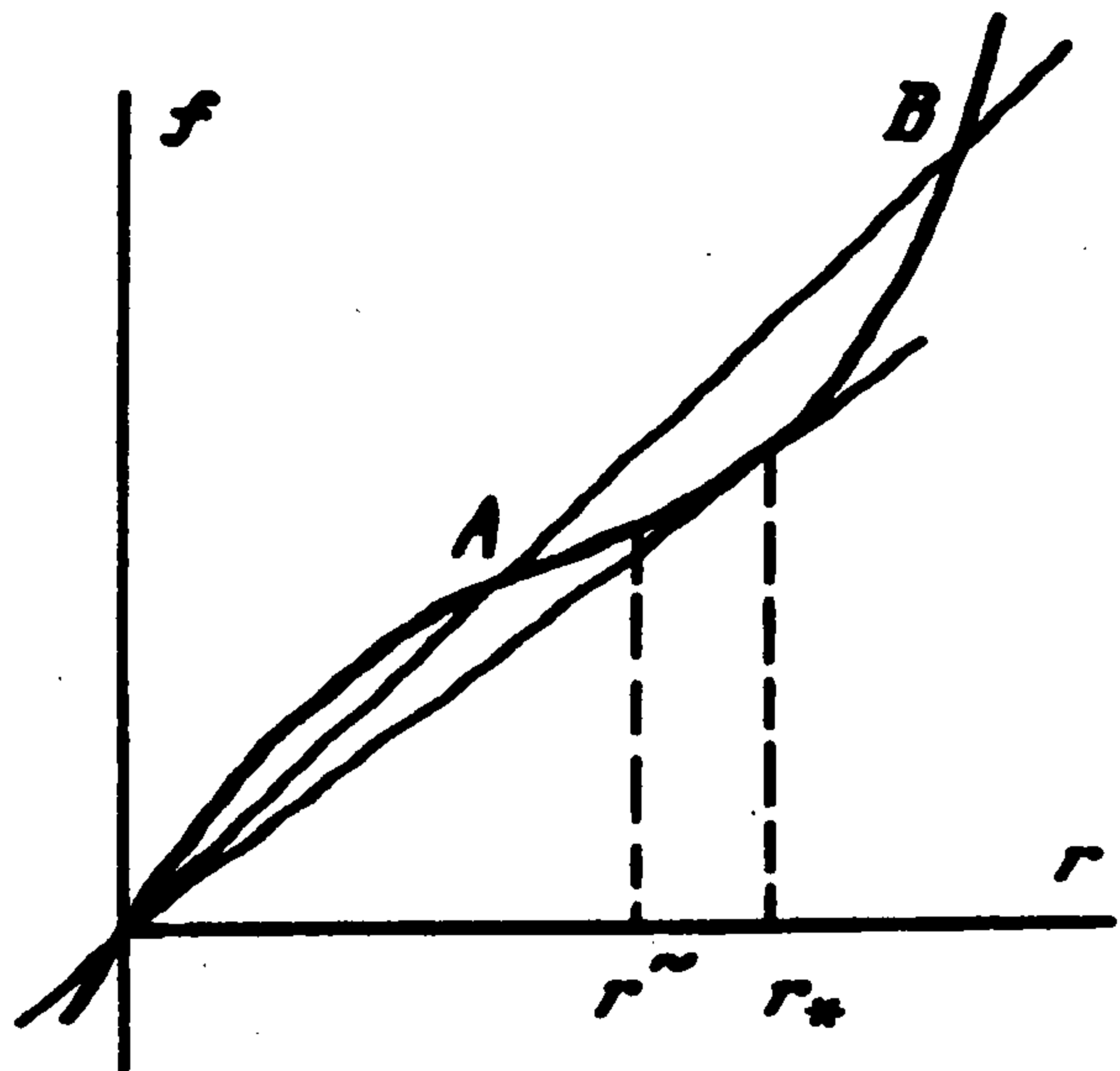
Вычисление напряжений по деформациям определяется производными от $\Phi(u_i, S)$ по u_i при $S = \text{const}$. Предположение об аддитивности энтропии при изучении ударных волн означает, что изменение энтропии в этих волнах оказывает пренебрежимо малое воздействие на зависимость напряжений от деформаций. В частности, это предположение справедливо, когда изменение энтропии в ударной волне мало, что, как будет видно далее, неплохо выполняется для тех ударных волн, на поведение которых существенно влияет малая анизотропия.

В отсутствии анизотропии ($g = 0$) зависимость касательного напряжения σ_τ от деформации сдвига $\epsilon_\tau = r$ дается формулой

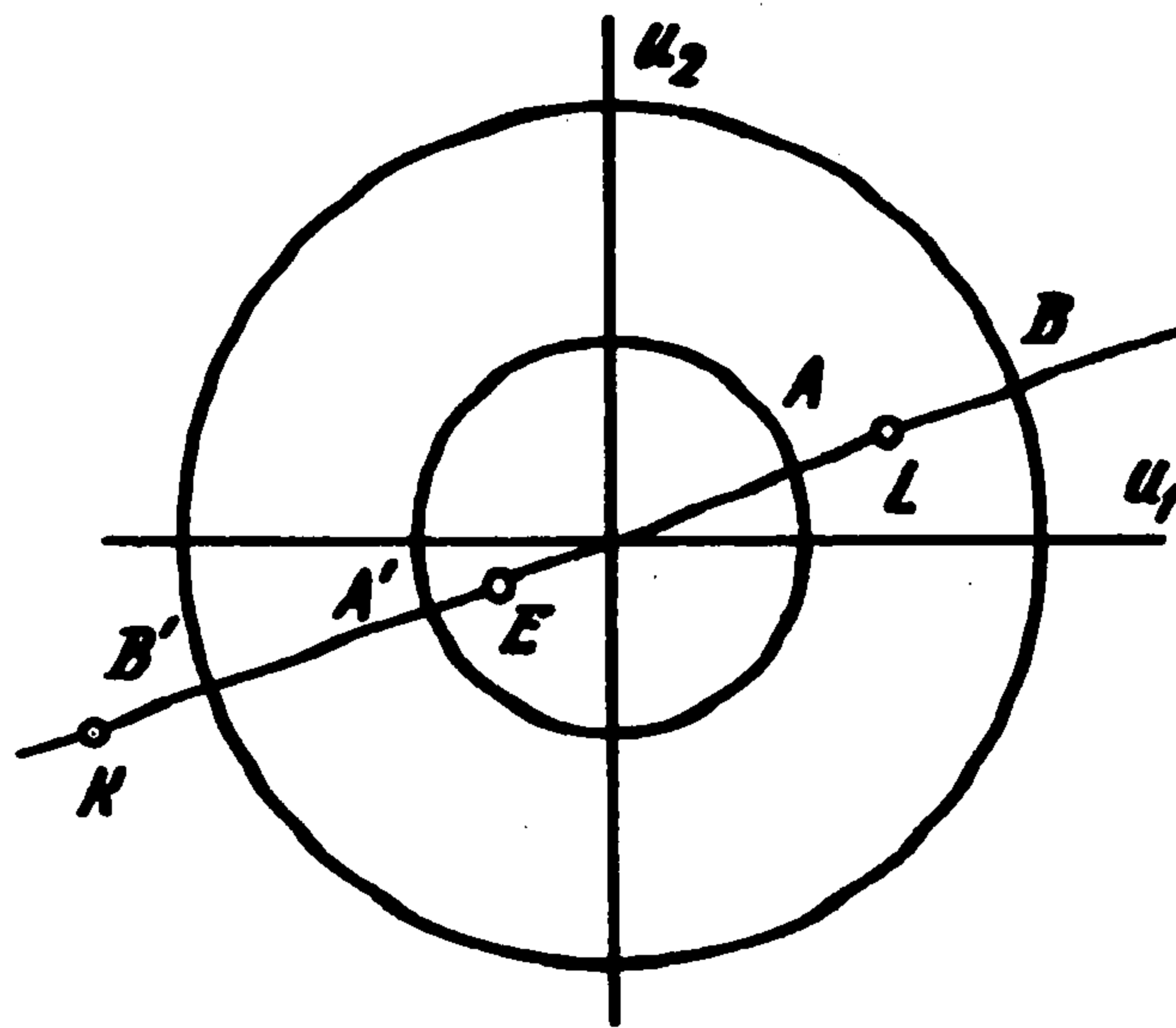
$$\sigma_\tau = [(\partial F / \partial u_1)^2 + (\partial F / \partial u_2)^2]^{1/2} = dF / dr$$

Примем обозначение $dF/dr = f(r)$. В некоторых случаях бывает удобно придавать r и отрицательные значения, считая, что $F(r) =$ четная функция. Тогда $f(r)$ – нечетная функция. Исследование ударных волн малой интенсивности [3] показало существенное

различие в их поведении в зависимости от направления выпуклости графика $f(r)$, представляющего связь между касательными напряжениями и деформацией сдвига. На подобные различия указывает и процесс образования ударных волн из волн Римана [2]. Чтобы охватить более широкий класс сред, допускающих большие упругие деформации, возьмем функцию $f(r)$, меняющую направление выпуклости, например изображенную на фиг. 1. Подобный вид зависимости $f(r)$ с точкой перегиба наблюдается в опытах, например, на материалах типа резин. Для них свойственно почти полное отсутствие объемных деформаций [9, 10]. Точка перегиба на графике $f(r)$ обозначена $r = r^-$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если луч, проведенный из начала координат через точку, соответствующую состоянию перед разрывом, пересекает график функции $f(r)$ дважды, то точку ближнюю к началу координат будем называть A , дальнюю — B . Эти точки (та или другая) будут в дальнейшем приниматься в качестве начального состояния при изучении разрывов.

Все исследование можно иллюстрировать на фазовой плоскости сдвиговых деформаций $u_1 u_2$. Для начального состояния примем обозначения $u_\alpha^- = U_\alpha$, $r^- = R$, $f(R) = f_0$. Уравнения (1.1) для среды, заданной упругим потенциалом (1.3), имеют вид

$$f \frac{u_\alpha}{r} - f_0 \frac{U_\alpha}{R} + g(p_\alpha - p_\alpha^-) = \rho W^2 (u_\alpha - U_\alpha)$$

$$[\Psi] = -[F] + \frac{1}{2} \left(f \frac{u_\alpha}{r} + f_0 \frac{U_\alpha}{R} \right) [u_\alpha] - g \left([p] - \frac{1}{2} (p_\alpha - p_\alpha^-) [u_\alpha] \right) \quad (1.4)$$

$$p_\alpha \equiv \partial p / \partial u_\alpha, \quad R = (U_1^2 + U_2^2)^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2$$

2. Приведем сначала необходимые для дальнейшего свойства разрывов при волновой изотропии ($g = 0$), некоторые из которых известны [5–7], другие легко могут быть получены для рассматриваемых ниже случаев. Исключая W , из системы (1.4) при $g = 0$ можно получить уравнение ударной адиабаты, проходящей через начальную точку

$$\left(\frac{f}{r} - \frac{f_0}{R} \right) (U_1 u_2 - U_2 u_1) = 0 \quad (2.1)$$

Очевидно, на плоскости u_1, u_2 ударная адиабата состоит из прямой $U_1 u_2 - U_2 u_1 = 0$, проходящей через начало координат и начальную точку, и окружностей $f(r)/r = f_0/R$ (фиг. 2). Для принятого вида функции $f(r)$ таких окружностей может быть две. Они проходят через точки A и B (фиг. 1), одна из которых представляет начальное состояние. Такой вид ударной адиабаты позволяет разделить все разрывы на плоскополяри-

зованные, соответствующие скачкам из одной точки прямой в другую, и вращательные, соответствующие скачкам из одной точки окружности в другую точку той же окружности, и рассматривать их независимо [5–8]. Так например, если начальное состояние соответствует точке A , то скачок из него в какую-либо точку на окружности $r = r_B$ рассматривается как два разрыва, движущиеся с одинаковой скоростью: плоскополяризованный скачок из A в B и вращательный разрыв по окружности $r = r_B$.

Для скорости плоскополяризованных разрывов из (1.4) следует

$$\rho W^2 = (f - f_0) / (r - R) \quad (2.2)$$

Если этот скачок имеет очень малую интенсивность, то его скорость становится соответствующей характеристической скоростью $\rho W_r^2 = \rho c_r^2 = df/dr$. Скорость вращательного разрыва согласно (1.4) $\rho W_\theta^2 = f/r$ и совпадает с характеристической скоростью c_θ . Указанным скоростям можно дать геометрическое толкование в виде углов наклона хорды, соединяющей начальную и конечную точку на графике $f(r)$ фиг. 1 (W_r), касательной к этому графику (c_r), луча из начала координат в рассматриваемую точку ($W_\theta = c_\theta$).

Разность углов наклона секущей и касательной в каждой точке представлена функцией $d = f/r - f'$. Ее стремление к нулю в окрестности $r = 0$ соответствует переходу к линейной упругости. При $d \neq 0$ будем обозначать $c_1 = \min\{c_\theta, c_r\}$, $c_2 = \max\{c_\theta, c_r\}$ и соответствующие им волны будем называть медленными и быстрыми, $c_2 > c_1$. На графике $f(r)$ (фиг. 1), кроме $r = 0$, существует еще точка $r = r_* > r^-$ такая, что в ней $d(r_*) = 0$ и $c_\theta = c_r$. Левее от нее $d > 0$ и $c_2 = c_\theta$, т.е. быстрой является вращательная волна. Для состояний $r > r_*$ быстрой будет плоскополяризованная волна $c_2 = c_r$, так как $d < 0$.

Требование эволюционности ударных волн, выражающее корректность граничных условий на фронте разрыва, налагает ограничения на скорость скачка W . Условия эволюционности общего типа для разрывов в средах с двумя различными по модулю характеристическими скоростями требуют, чтобы была выполнена одна из двух систем неравенств

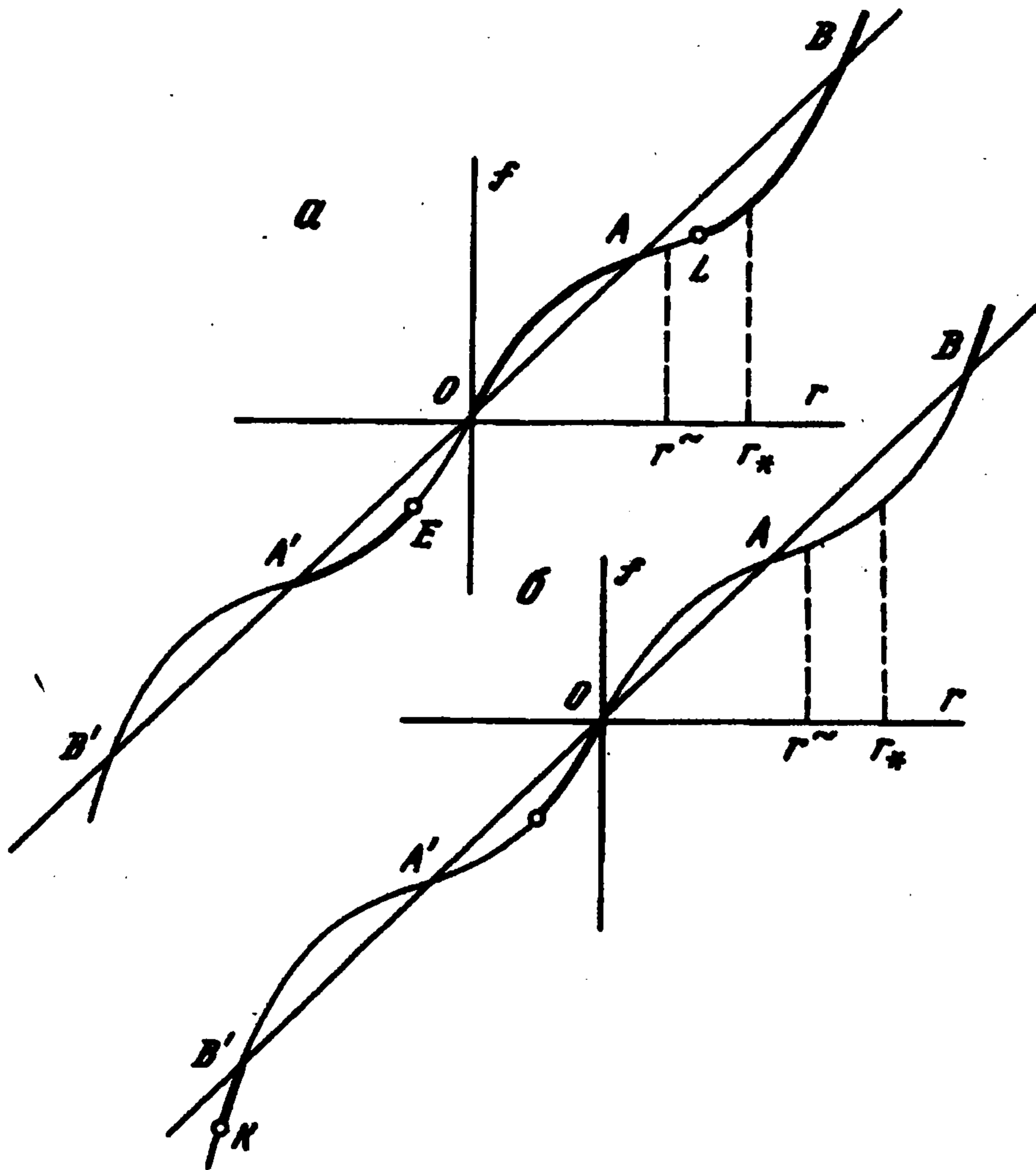
$$a) (c_2^-)^2 \leq W^2, \quad (c_1^+)^2 \leq W^2 \leq (c_2^+)^2, \quad б) (c_1^-)^2 \leq W^2 \leq (c_2^-)^2, \quad w^2 \leq (c_1^+)^2 \quad (2.3)$$

В случае a разрыв называется быстрым, в случае $б$ – медленным. Очевидно, плоскополяризованные и вращательные волны могут быть как быстрыми, так и медленными в зависимости от знака d .

Выше найдено, что скорость вращательного разрыва $W_\theta = f/r$ совпадает с характеристическими скоростями c_θ по обе стороны от разрыва. Поэтому, согласно (2.3), вращательный разрыв эволюционен. Кроме того, нетрудно проверить, что в этом разрыве не меняется энтропия, $[S] = 0$ и термодинамическое требование неубывания энтропии выполнено. Указанные свойства вращательного разрыва делают его неотличимым от волны Римана того же типа [2]. Для дальнейшего необходимо отметить, что оба ограничительных требования к вращательным разрывам выполнены в виде равенств, т.е. на грани допустимого.

Для плоскополяризованных волн нахождение участков эволюционности (2.3) нетрудно провести, воспользовавшись геометрической интерпретацией выражений для скорости разрыва и характеристических скоростей. Положение этих участков зависит от того, какая из точек A или B принята за начальное состояние.

На фиг. 3, $a, б$ выделены жирными линиями те части графика $f(r)$, которые соответствуют условиям (2.3): a в случае начального состояния в точке A и $б$ в точке B . На концах отрезков эволюционности скорость разрыва совпадает с одной из характеристических скоростей. По аналогии с теорией детонации такие точки будем называть



Фиг. 3

точками Жуге. На фиг. 3,а в точках Жуге $W_A = W_L = c_1^-$, $W_0 = W_{A'} = c_2^-$, $W_E = c_1^+$, на фиг. 3,б $W_B = W_K = c_2^-$, $W_0 = W_{B'} = c_1^-$, $W_E = c_1^+$. Точка L получена при пересечении графика $f(r)$ с касательной к нему в начальной точке. На фиг. 3,а изображен тот случай, когда $R = r_A < r^-$. Если $r_A > r^-$, то отрезок LA по-прежнему будет неэволюционным, но точка L находится левее точки A .

Кроме общих условий эволюционности (2.3) в случае волновой изотропии ($g = 0$) для плоскополяризованных разрывов должны быть поставлены дополнительные условия, заключающиеся в выполнении еще одной из двух систем неравенств [11]

$$в) (c_0^-)^2 \leq W^2, \quad (c_0^+)^2 \leq W^2, \quad г) W^2 \leq (c_0^-)^2, \quad W^2 \leq (c_0^+)^2 \quad (2.4)$$

Эти требования вытекают из того [8], что при $g = 0$ взаимодействие плоскополяризованного разрыва с вращательными малыми возмущениями происходит независимо от взаимодействия с остальными возмущениями и без изменения скорости разрыва. Неравенства (2.4) представляют условия однозначной разрешимости задачи о нахождении амплитуд уходящих от разрыва малых возмущений вращательного типа. Можно убедиться, что условия (2.4) запрещают только разрывы с изменением знака r . Это ведет к исключению из решения отрезков $A'E$, KB' , EO . Однако не будем этого фиксировать на фиг. 3 в связи с тем, что в дальнейшем, в общем случае, когда $g \neq 0$, дополнительные неравенства (2.4), обусловленные изотропией, а следовательно, и вызванные ими ограничения, будут отсутствовать.

Для исследования изменения энтропии на разрыве получим из (1.4) при $g = 0$ следующее соотношение:

$$[\psi(S)] = \frac{1}{2} (f + f_0)(r - R) - \int_R^r f(r) dr \quad (2.5)$$

Последний член в правой части представляет собой $[F(r)]$. Так как $d\psi/dS = \partial\Phi/\partial S = \rho T > 0$ (где T – температура), то знак $[\psi]$ совпадает со знаком $[S]$. Поэтому условие неубывания энтропии на разрыве требует положительности площади, заключенной между отрезком секущей, идущей из начальной точки в конечную, и графиком $f(r)$ на том же отрезке (фиг. 1). Этому удовлетворяют все участки, где в одно и то же время выполнены и условия (2.3) и (2.4).

3. Вырожденность, которую вносит изотропия среды, проявляется главным образом в существовании вращательных разрывов, в которых не происходит изменения энтропии, не меняется модуль деформации, скорость фронта одинакова для всех состояний за разрывом, совпадает с характеристическими скоростями по обе стороны от него. Все это приводит к тому, что и условия эволюционности и требование неубывания энтропии выполняются для вращательных разрывов в виде равенств, т.е. находятся на грани допустимого и любое малое отклонение разрыва от вращательного может сразу сделать его нереализующимся. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделяется разрывам, близким к вращательным, у которых из-за анизотропии следует ожидать существенных качественных изменений в составе решения.

Для плоскополяризованных волн все указанные характеристики являются функциями r , и добавление малых членов с анизотропией внесет в их значения лишь малую количественную поправку.

Рассматривая случай $g \neq 0$, прежде всего отметим, что, во-первых, теряет смысл разделение волн на плоскополяризованные и вращательные, а во-вторых, при $g \neq 0$ не должны выставляться дополнительные условия эволюционности (2.4), связанные с упомянутым разделением волн и с частным видом зависимостей при $g = 0$. Обсуждение этих вопросов для волн малой амплитуды было дано в [11] и оно относится в равной степени к волнам конечной амплитуды.

Поскольку рассматривается случай малых g , то можно ожидать что ударная адиабата скорости разрывов, малых возмущений и скачок энтропии мало изменятся по сравнению со случаем $g = 0$. Поэтому можно говорить о квазиплоскополяризованных или квазивращательных разрывах, имея в виду близость точки изображающей конечное состояние к соответствующей части ударной адиабаты при $g = 0$, однако, при $g \neq 0$ такое разделение теряет свой строгий смысл.

Рассмотрим сначала вид ударной адиабаты, уравнение которой получим из (1.4), исключением W

$$\left(\frac{f}{r} - \frac{f_0}{R}\right)(U_1u_2 - U_2u_1) = gH, \quad H = (p_2 - p_2^-)(u_1 - U_1) - (p_1 - p_1^-)(u_2 - U_2) \quad (3.1)$$

Считая величину g малой, можно вычислять значения правой части H в соответствующих точках ударной адиабаты при $g = 0$ и, таким образом, считать ее известной. Тогда для квазивращательной и квазиплоскополяризованных волн получим соответственно

$$\Delta r = g \frac{Hr}{(U_2u_1 - U_1u_2)d}, \quad d = \frac{f}{r} - f', \quad U_1u_2 - U_2u_1 = g \frac{H}{f/r - f_0/R} \quad (3.2)$$

Левые части этих равенств характеризуют отклонения точек кривой (3.1) от ударной адиабаты, соответствующей $g = 0$, т.е. от окружностей $r = r_A$ или $r = r_B$ и от прямой $U_1u_2 - U_2u_1 = 0$ (фиг. 2). Правые части вычисляются на ударной адиабате с $g = 0$. Если $H \neq 0$, то, как видно из (3.1), при приближении к точке пересечения окружности и прямой вычисленные отклонения стремятся к бесконечности, а сама ударная адиабата в окрестности этой точки ведет себя подобно гиперболе. Это заключение не относится к окрестности начальной точки, где $H = 0$ и где всегда имеется точка самопересечения ветвей ударной адиабаты.

Часть ударной адиабаты, близкая к окружности $r = R$, проходящей через начальную точку, представляет квазивращательные разрывы. Для них характерны малые величины скачков модуля деформаций $r-R \sim g$ и энтропии $S-S' \sim g$. Ветвь ударной адиабаты, которая близка ко второй окружности $r \neq R$, соответствует скачкам с изменением r и S на конечную величину. Такие разрывы уже не относятся к квазивращательным, хотя и имеют с ними много общего. Будем называть их квазиокружными.

При отыскании на ударной адиабате отрезков эволюционности квазиплоскополяризованных разрывов при $g \neq 0$ должны быть выполнены условия (2.3), где скорость скачка представлена выражением $\rho W^2 = (f-f_0)/(r-R) + g\xi$, где функция ξ ограничена при $g \rightarrow 0$. Главным в этой формуле является первое слагаемое, которое использовалось ранее (2.2) при проверке условий (2.3) при $g = 0$. Это позволяет не выписывать в явном виде функцию ξ . Присутствие второго члена в выражении для W лишь несколько смещает концы полученных при $g = 0$ эволюционных отрезков (точки Жуге). Их можно считать изображенными, как и прежде, на фиг. 3. Причем эволюционными будут и участки близкие к отрезкам $A'E$, KB' , EO , исключенным при $g = 0$ условиями (2.4).

При проверке термодинамического требования $[S] \geq 0$ для квазиплоскополяризованных разрывов малая поправка $-g$ из-за анизотропии в правиле площадей (2.5) в общем случае опять лишь слегка смещает положение концов отрезков, где $[S] \geq 0$, найденных при $g = 0$ геометрическим методом. При этом нет необходимости точно находить эти участки, достаточно проверить выполнение условия $[S] \geq 0$ на только что полученных эволюционных отрезках. Оказывается, что на всех, изображенных на фиг. 3, а, б участках кроме EO термодинамическое требование выполнено, причем условие эволюционности (2.3) оказалось более жестким, чем $[S] \geq 0$.

Об отрезке EO особый разговор. Выполнение на нем условия $[S] \geq 0$ определяется тем, как далеко от начала координат на графике $f(r)$ расположена начальная точка B . В зависимости от этого термодинамически пригодная область около начала координат может содержать точку O , может лежать полностью левее нее или исчезнуть вовсе, когда точка B уходит достаточно далеко вправо. При этом отрезок, где выполнены одновременно условия (2.3) и $[S] \geq 0$, стягивается к точке E , и следовательно, термодинамическое требование оказывается сильнее, чем (2.3).

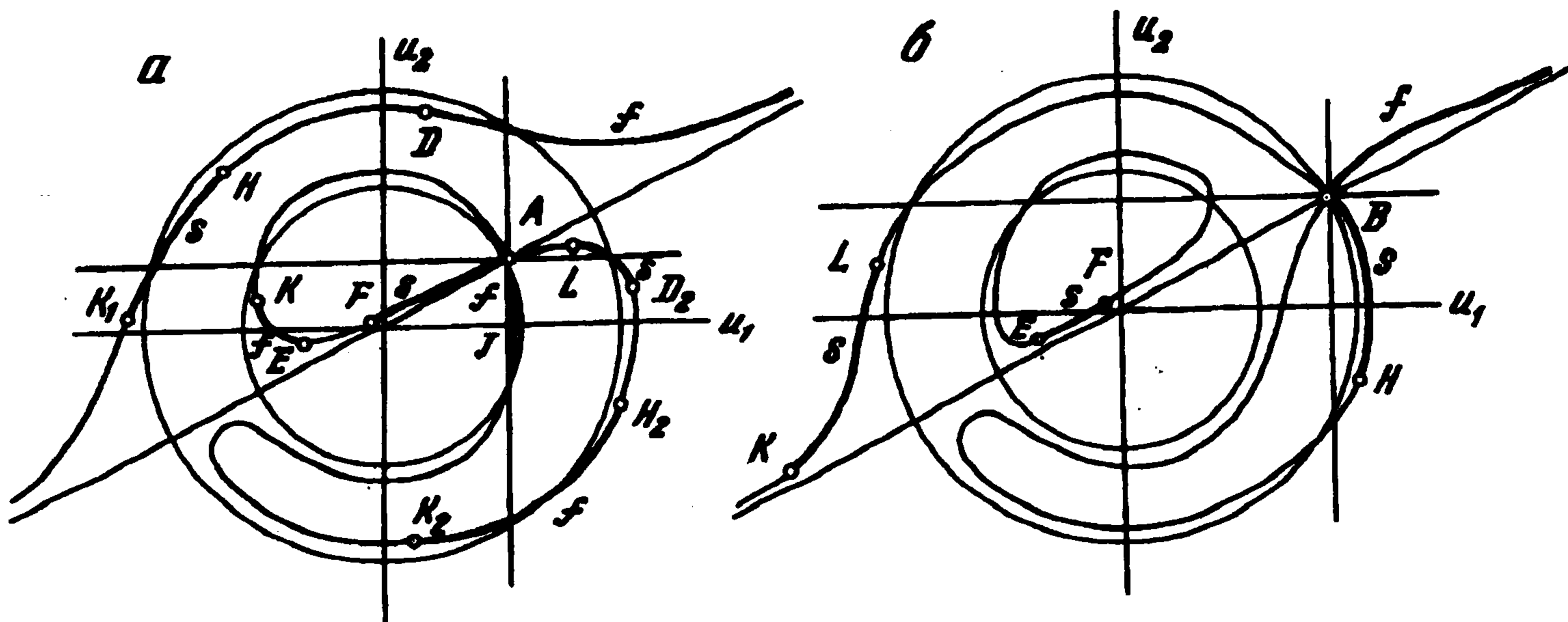
Для скачков в точки ударной адиабаты, близкие к окружностям, скорость W вычисляется по формуле, полученной из (1.4)

$$\rho W^2 = \frac{f}{r} + g \frac{(p_2 - p_2^-)U_1 - (p_1 - p_1^-)U_2}{U_1 u_2 - U_2 u_1} \quad (3.3)$$

Отличие W^2 от скорости характеристик f/r , а следовательно, и области выполнения условий (2.3) определяются исключительно вторым слагаемым, привнесенным анизотропией. Так же обстоит дело и со скачком энтропии $[S]$, отличие которого от нуля или константы для квазиокружных разрывов определяется только анизотропными членами. Для этого надо иметь заданную в явном виде функцию $p(u_\alpha)$.

4. Рассмотрим теперь среду с конкретным видом анизотропии. Пусть $p = 1/2(u_2^2 - u_1^2)$. Такой вид имеет функция p в области малых деформаций при анизотропии, созданной предварительной деформацией [3], а также для ортотропных, трансверсально изотропных и некоторых других материалов [4]. Уравнение ударной адиабаты (2.1) примет вид

$$\left(\frac{f}{r} - \frac{f_0}{R} \right) (U_1 u_2 - U_2 u_1) = g(u_1 - U_1)(u_2 - U_2). \quad (4.1)$$



Фиг. 4

Она изображена на фиг. 4,а, когда начальное состояние представлено точкой А, $R = r_A < r_*$, и на фиг. 4,б, когда $R = r_B > r_*$. Квазиплоскополяризованным волнам соответствуют участки, близкие к прямой $U_1 u_2 - U_2 u_1 = 0$, которая на $\pm\infty$ служит асимптотой. Различие в форме кривой зависит от вида функции $f(r)$ и положения начальной точки $r = R$. Отклонение от окружностей $r = r_A$ и $r = r_B$ определяется величиной Δr согласно (3.2), где для выбранной среды $H = (u_1 - U_1)(u_2 - U_2)$. Пересечение ударной адиабаты с указанными окружностями и перемена знака Δr происходит в точках с координатами $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$. При этом из-за противоположных знаков у функции $d = f/r - f'$ на окружностях $r = r_A$ и $r = r_B$ и отклонение Δr на этих окружностях в соответствующих точках имеет противоположное направление.

При вычислении скачка энтропии коэффициент при g в формуле (1.4) для выбранного вида функции $p(u_\alpha)$ оказался равным нулю, так что изменение энтропии в такой среде по-прежнему находится по правилу площадей (2.5). При $R = r_A < r_*$ (фиг. 4,а) $d(R) > 0$ и скачок энтропии неотрицателен внутри окружности $r = R$, т.е. в тех точках ударной адиабаты, для которых $|u_2| \leq U_2$. К ним добавляется вся область ударной адиабаты, близкая к окружности $r = r_B$, и уходящий в $+\infty$ участок вдоль асимптоты. Для начального состояния, заданного точкой В, $R = r_B > r_*$ (фиг. 4,б), $d(R) < 0$ и условию $[S] \geq 0$ удовлетворяют участки ударной адиабаты вне окружности $r = R = r_B$, т.е. $|u_2| \geq U_2$. К ним добавляются ветви, уходящие в $\pm\infty$ вдоль асимптоты, и некоторый участок в окрестности начала координат, существование которого оговорено выше и зависит от вида функции $f(r)$ и насколько далеко на графике f расположена начальная точка В.

Для проверки условий эволюционности (2.3) используем выражения для характеристических скоростей c_1, c_2 , найденные в [2], в полярных координатах r, θ плоскости u_1, u_2

$$\rho c_{1,2}^2 = d + f' \mp (d^2 + 2gd \cos 2\theta + g^2)^{1/2}$$

В силу малости g получим для скоростей квазивращательных малых возмущений c_θ : $\rho c_\theta^2 = f/r + g \cos \theta$, $\rho (c_\theta^-)^2 = f_0/R + g \cos \theta_0$. Угол θ_0 соответствует состоянию перед скачком. Скорость W разрыва того же типа находится из (3.3)

$$\rho W^2 = \frac{f}{r} + g \frac{U_1 u_2 + U_2 u_1 - 2U_1 U_2}{U_1 u_2 - U_2 u_1}$$

или в полярных координатах

$$\rho W^2 = \frac{f}{r} + g \frac{\sin(\theta + \theta_0) - (R/r)\sin 2\theta_0}{\sin(\theta - \theta_0)} = \frac{f_0}{R} - g \frac{\sin(\theta + \theta_0) - (r/R)\sin 2\theta}{\sin(\theta - \theta_0)}$$

Условия эволюционности (2.3) для областей ударной адиабаты, близких к окружностям, требуют выполнения неравенств

$$W^2 - c_\theta^2 = g \frac{\frac{3}{2}\sin(\theta + \theta_0) - \frac{1}{2}\sin(3\theta - \theta_0) - (R/r)\sin 2\theta_0}{\sin(\theta - \theta_0)} \leq 0$$

$$W^2 - (c_\theta^-)^2 = g \frac{(r/R)\sin 2\theta - \sin(\theta + \theta_0) - \cos 2\theta_0 \sin(\theta - \theta_0)}{\sin(\theta - \theta_0)} \geq 0 \quad (4.2)$$

Коэффициенты при малом g в этих формулах достаточно вычислять в точках соответствующих окружностей, т.е. принимать $r = R$ для квазивращательных волн ($r = R$ — окружность, проходящая через начальную точку, где бы она не находилась), а для других почти круговых ветвей ударной адиабаты $r = r_B > R$ на фиг. 4,а и $r = r_A < R$ на фиг. 4,б. Помним при этом, что $c_\theta = c_2$ при $d > 0$ и $c_\theta = c_1$ при $d < 0$, что позволит различить, какие из разрывов быстрые, какие медленные.

Графическое решение равенств (4.2) дает точки Жуге, служащие границами эволюционных участков и обозначенные на фиг. 4 буквами $F, K, K_1, K_2, D_1, D_2(W = c_2^-), L(W = c_1^-), E, H, H_2(W = c_1^+), J(W = c_2^+)$. Исследование знаков выражений (4.2) выделяет на ударной адиабате эволюционные отрезки. Все они одновременно удовлетворяют требованию $[S] \geq 0$.

Для квазиплоскополяризованных волн аналогичные участки найдены выше в разд. 3 для любой функции $p(u_\alpha)$. Таким образом, определены все области ударной адиабаты, где одновременно выполнены условия (2.3) и $[S] \geq 0$. Они выделены на фиг. 4 жирными линиями. Буквами f и s отмечены соответственно быстрые и медленные разрывы.

Добавим, что все исследование можно использовать и для других функций $f(r)$, например, с противоположным чередованием выпуклости и вогнутости графика. В последнем случае, если поменять местами оси u_1 и u_2 , то вид ударной адиабаты останется прежним и положение точек Жуге на ней тоже. Участки, где выполнены требования эволюционности и неубывания энтропии, меняются, но находятся с использованием тех же выражений для c_α, W и $[S]$. Наличие дополнительных точек перегиба на графике f добавит новые части ударной адиабаты близкие к окружностям того же типа, что $r = r_A$ или $r = r_B$.

Полученные результаты можно, в частности применить к случаю когда $[u_i]$ малы. Они полностью совпадают с полученными ранее для ударных волн слабой интенсивности [3].

Заметим, что предположенная в (1.3) аддитивность зависимости упругого потенциала от энтропии фактически не влияет на полученные выше результаты, относящиеся к вращательным волнам. Предположение (1.3) означает, что изменение энтропии не влияет на напряжения в среде. Если рассматривается квазивращательная волна, в которой $r \approx R$, то при достаточно малом g это предположение можно считать справедливым вследствие малости $[S]$. Если рассматривается скачок в точку близкую к окружности, не проходящей через начальное состояние, например, из точки A в точку, близкую к окружности $r = r_B$, то $S = S_B + \Delta S$, где ΔS мало при малом g . Тогда в конечном состоянии можно принять равенство (1.3), считая, что $F = F(r^2, S)$, $\psi = \rho T_B \Delta S$, $F^- = F(R^2, S_A)$ и аналогичные равенства для $\partial F/\partial r$.

Автор благодарит А.Г. Куликовского за внимание и обсуждение результатов.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17341).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Волны Римана в упругой среде при малой анизотропии // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 90–101.
3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831–840.
4. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 110–115.
5. Ленский Э.В. Об ударной адиабате плоского продольно-сдвигового разрыва // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1981. № 1. С. 94–96.
6. Ленский Э.В. Плоские волны сжатия-сдвига в нелинейно-упругой несжимаемой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 90–98.
7. Нануга А. Shear waves // Publs. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci. 1975. № 87. 61 p.
8. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
9. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.
10. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел ч. 2. М.: Наука, 1984. 431 с.
11. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные плоские волны в изотропном упругом теле при наличии начальных деформаций // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 85–91.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1993