

УДК 532.5

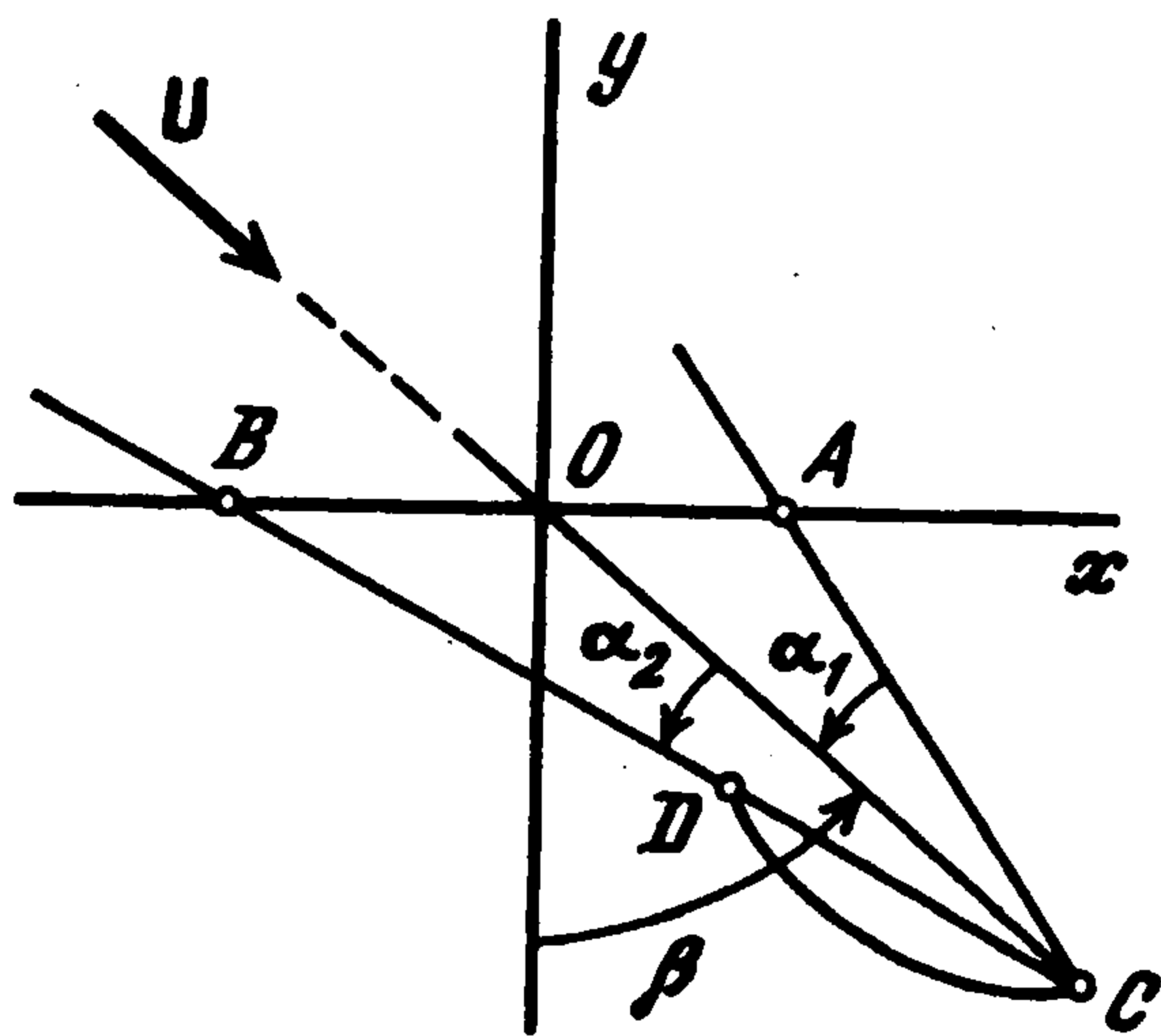
© 1993 г. • Б.С. Чекин

НАКЛОННЫЙ ВХОД ТОНКОГО КЛИНА В НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

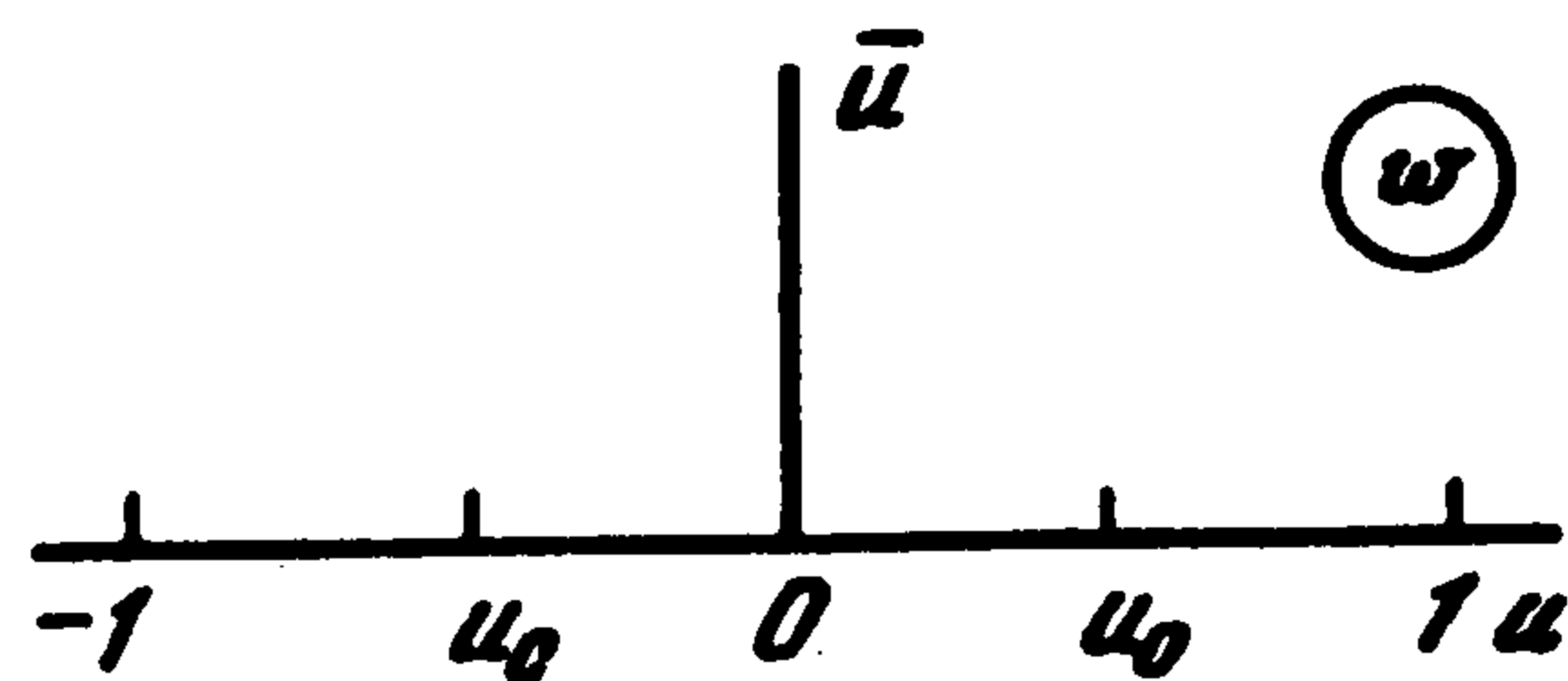
В линейной постановке исследуется автомодельная задача о наклонном входе тонкого клина в полупространство, заполненное идеальной несжимаемой жидкостью. Исследуются различные режимы движения жидкости, существование которых было показано ранее [1]. Получен критерий безотрывного движения, представляющий собой соотношение между тремя углами, определяющими раствор клина, направление скорости входа и угла атаки. Если это соотношение не выполнено, то возможен такой режим движения, когда к одной из граней клина примыкает полость. Если давление в полости меньше давления на поверхности жидкого полупространства, то существуют только два вышеназванных режима и обе грани всегда оказываются смоченными жидкостью, даже в случае, когда угол раствора равен нулю. Если давление в полости равно давлению на поверхности полупространства, то существует еще один режим движения – одна из граней клина не смачивается жидкостью. Получен критерий перехода от этого режима к режиму с полостью. На основании вычислений исследована зависимость размера полости и сил, действующих на грани клина, от параметров задачи.

1. Рассматривается автомодельная задача о входе жесткого тонкого клина с постоянной скоростью U в жидкое невесомое идеальное несжимаемое полупространство $Y \leq 0, -\infty < X < \infty$. Используется самое простое линейное приближение [2], которое позволяет провести исследование при любых, допустимых для тонкого клина, параметрах задачи. Было показано [1], что существуют три режима движения жидкости. Один из них – безотрывное движение. Два других – отрывные, происходит отрыв струи от ребра клина C (фиг. 1). Одна из граней клина может оказаться не смоченной жидкостью. Это соответствует входу пластинки в жидкость. Третий режим связан с образованием полости CD на одной из граней. Для определенности считается, что полость примыкает к левой грани CB . Три угла $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ определяют направление скорости U , ориентацию в пространстве и угол раствора $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ клина (фиг. 1). В случае режима с полостью появляется еще один параметр p_0 – разность давления на свободной границе полупространства и давления в полости. В зависимости от соотношения этих параметров реализуется один из трех режимов движения жидкости. Предполагается, что всегда $p_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0$. Не уменьшая общности задачи, можно считать, что давление в полости равно нулю.

Удобно ввести безразмерные автомодельные координаты $x = X/(Ut), y = Y/(Ut)$, давление $p = P/(\rho_0 U^2)$, массовую скорость $v = V/U$, где ρ_0 – плотность, t – время, а также комплексную координату $z = x + iy$ и комплексную скорость $V = v_x - iv_y$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Давление можно записать в виде

$$p = \operatorname{Re}P(z) \quad (1.1)$$

$$P(z) = zV(z) - \int_{-\infty}^z V(\tau)d\tau - \frac{1}{2}|V(z)|^2 + p_0$$

Под тонким клином имеется в виду не только малость угла раствора α , но и малость углов α_1, α_2 . Возмущение жидкости тогда будет мало, $v \ll 1$. Приближение, связанное с малостью α_1, α_2 , заключается в следующем. Граничные условия задачи сносят на ось x и на отрезок прямой OC , член $\frac{1}{2}|V(z)|^2$ в формуле (1.1) отбрасывается. На границе полупространства должно быть $p = p_0$. Из (1.1) следует, что это условие эквивалентно условию $v_x(x, 0) = 0$. Если обозначить через r радиус-вектор точек линии OC , то для давления на этой линии можно получить

$$p(r) = v_r r - \int_0^r v_r(r)dr + p_0 \quad (r = |r|, v_r = r^{-1}(v, r)) \quad (1.2)$$

На границе полости CD должно быть выполнено условие $p = 0$. Из этого условия и из (1.2) следует $v_r = v_0 = \text{const}$ на CD . На частях граней клина AC и BD должны быть выполнены условия непроницаемости.

2. Область течения жидкости можно конформно отобразить в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}w > 0$, $w = u + i\bar{u}$. Это отображение имеет вид

$$z = z_c f(w) / f(u_c)$$

$$u_c = -2\delta, \quad \delta = \beta / \pi, \quad -\frac{1}{2} < \delta < \frac{1}{2}, \quad z_c = -ie^{i\pi\delta}$$

$$f(w) = (1-w)^{\frac{1}{2}+\delta} (1+w)^{\frac{1}{2}-\delta}, \quad \arg f(0) = 0$$

Разрезы функции $f(w)$ проведены в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}w < 0$. Точки плоскости A, C, D, B переходят в точки действительной оси $\operatorname{Im}w = 0$: $u = -1, u = u_c, u = u_0, u = 1$, соответственно (фиг. 2).

Размер полости определяется формулой

$$l(u_0) = |z(u_c) - z(u_0)| = 1 - f(u_0) / f(u_c)$$

$$u_c \leq u_0 \leq 1, \quad 0 \leq l \leq 1, \quad l(1) = 1, \quad l(u_c) = 0$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}w > 0$ функции $V(w)$, удовлетворяющей условиям

$$\operatorname{Re}V = 0, \quad |u| > 1; \quad \operatorname{Re}(z_c V) = v_0, \quad u_c < u < u_0 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Im}(z_c V) = \begin{cases} -\alpha_1, & -1 < u < u_c \\ \alpha_2, & u_0 < u < 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$F(u_0) \equiv v_0 - \int_{-1}^{u_c} \operatorname{Re}[V(u)z'(u)]du = -p_0 \quad (2.3)$$

Первое условие (2.1) означает постоянство давления на свободной границе $y = 0$, второе – условие постоянства давления на свободной границе полости. Условия (2.2) – условия непроницаемости граней клина. Условие (2.3) означает, что давление на границе полости равно нулю. Также необходимо требовать, чтобы функция $V(z)$ убывала при $z \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/z$, тогда $p(z) \rightarrow p_0$ при $z \rightarrow \infty$.

Функция $V(w)$, удовлетворяющая условиям (2.1), (2.2), ищется в виде

$$V(w) = \varphi(w) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(u)du}{u-w} \quad (2.4)$$

где $\varphi(w)$ – решение рассматриваемой задачи, но с однородными условиями, т.е. с условиями (2.1), (2.2), в которых $v_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Выбирая некоторую функцию $\varphi(w)$, можно подобрать функцию $g(u)$ так, чтобы условия (2.1), (2.2) были удовлетворены. Можно показать, что общее решение задачи представляется в виде суммы вполне определенного решения неоднородного уравнения (в (2.4) выбираем определенную функцию $\varphi(w) = \varphi_0(w)$) и общего решения однородного уравнения $\varphi(w)$. Последнее является линейной комбинацией с действительными коэффициентами функций

$$i(w-1)^{-\delta+m_1}(w+2)^{\delta+m_2}(w-u_c)^{n_c-1/2}(w-u_0)^{n_0-1/2}$$

Здесь m_1, m_2, n_c, n_0 – произвольные целые числа.

Для комплексной скорости можно получить

$$V(w) = \frac{\varphi_0(w)}{\pi} [\alpha_2 I(u_0, 1) - \alpha_1 I(-1, u_c) - v_0 I(u_c, u_0)] + \varphi(w)$$

$$I(x, y) = \int_x^y \frac{\xi(t)dt}{t-w}, \quad \xi(u) = \frac{1}{|\varphi_0(u)|} \quad (2.5)$$

$$\varphi_0(w) = i \left(\frac{w-1}{w+1} \right)^{-\delta} \left(\frac{w-u_0}{w-u_c} \right)^{1/2}, \quad \arg \varphi(u) = \pi/2 \quad \text{при } u > 1$$

Из требований $V(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$, ограниченности энергии, потока энергии жидкости и сил, действующих на грани клина, следует

$$m_1 = m_2 = n_c = n_0 = 0, \quad \varphi(w) = C\varphi_0(w)/(w-u_0)$$

где C – действительная постоянная.

Если выбрать окрестность точки D в виде полукруга радиуса R , то $\varphi(w) = O(R^{-1/2})$ при $R \rightarrow 0$. Можно показать, что поток энергии через полуокружность этого полукруга при $R \rightarrow 0$ имеет порядок единицы и не зависит от R . Поток энергии через другую часть границы полукруга, совпадающую с частями непроницаемой границы и границы полости, имеет порядок $R^{1/2}$ и обращается в нуль при $R \rightarrow 0$. Поэтому функция $\varphi(w)$ связана с источником энергии, расположенным в точке D . Если $C > 0$, то происходит поглощение энергии в точке D , скорость границы полости вблизи D не ограничена и направлена в сторону грани клина. Если же $C < 0$, то происходит выделение энергии и на грань клина вблизи D действует неограниченное отрицательное давление. Поэтому необходимо положить $C = 0$ и отбросить в (2.5) слагаемое $\varphi(w)$.

Постоянная v_0 может быть определена из условия достаточно быстрого убывания $V(w)$ при $w \rightarrow \infty$. Разложение в ряд правой части равенства (2.5) по степеням $1/w$ и приравнивание коэффициента при $1/w$ нулю дает следующее соотношение для v_0 :

$$v_0 = \left[\alpha_2 \int_{u_0}^1 \xi(t) dt - \alpha_1 \int_{-1}^{u_c} \xi(t) dt \right] / \int_{u_c}^{u_0} \xi(t) dt$$

Постоянная u_0 должна быть найдена из уравнения (2.3). Левая часть этого уравнения, т.е. функция $F(u_0)$, обладает свойством

$$F(1) \equiv 0 \quad (2.6)$$

Действительно, так как $V(w)$, $z(w)$ – аналитические в полуплоскости $\text{Im } w > 0$ функции и $V(w)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(u) z'(u) du = 0$$

Отсюда и из условий (2.1) следует (2.6).

3. Рассмотрим условия существования различных видов движения жидкости. Режим движения с полостью назовем режимом 1, режим, когда левая грань клина не смачивается жидкостью, – режимом 2.

Безотрывное движение, очевидно, соответствует случаю $u_0 = u_c$. Полагая в (2,5) $u_0 = u_c$ и требуя, чтобы комплексная скорость $V(w)$ убывала на бесконечности быстрее, чем $1/w$, получаем соотношение

$$\gamma = \alpha_2 / \alpha_1 = \gamma_1(\delta), \quad \gamma_1(\delta) = \int_{-1}^{u_c} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^\delta du / \int_{u_c}^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^\delta du \quad (3.1)$$

представляющее собой условие безотрывного движения жидкости. Таким образом, безотрывное движение может быть лишь при вполне определенном соотношении углов β , α_1 , α_2 .

Случай $u_0 = 1$ соответствует режиму 2. Учитывая соотношение (2.6), приходим к выводу, что $u_0 = 1$ при $p_0 > 0$ не является корнем уравнения (2.3), режим 2 невозможен, и обе грани клина, даже в случае пластинки когда $\alpha = 0$, оказываются при любых параметрах задачи смоченными жидкостью. Можно показать, что при $p_0 > 0$ уравнение (2.3) имеет корень $u_0 < 1$ при любых $\delta \in (-1/2, 1/2)$, $\gamma \in [-1, \gamma_1(\delta))$, т.е. существуют лишь два режима движения – безотрывное, если выполнено соотношение (3.1), или режим 1.

Если $p_0 = 0$, то $u_0 = 1$ – корень уравнения (2.3) и режим 2 возможен. В малой окрестности точки $u_0 = 1$, учитывая (2.6), уравнение (2.3) можно представить в виде:

$$C(\delta, \alpha_1, \alpha_2) G(\delta) \epsilon = O(\epsilon^\mu) \quad (3.2)$$

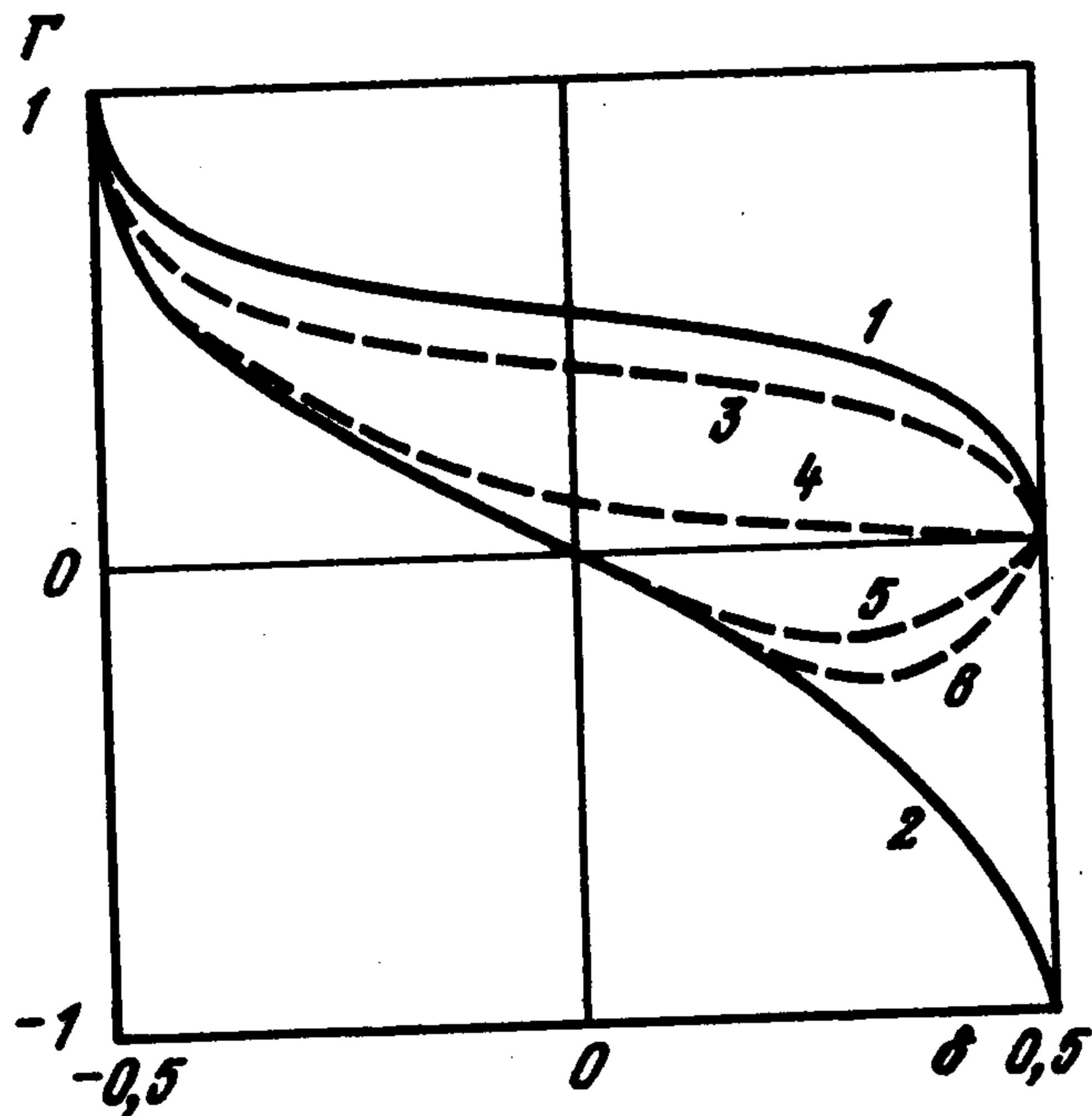
$$\mu > 1, \epsilon = (1 - u_0)^{1/2 + \delta}, \quad C(\delta, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 A(\delta) + \alpha_2 B(\delta)$$

$$A(\delta) = \int_{-1}^{-2\delta} q(u) du \int_0^\infty [(1+t^2)^\delta - t^{2\delta}] dt$$

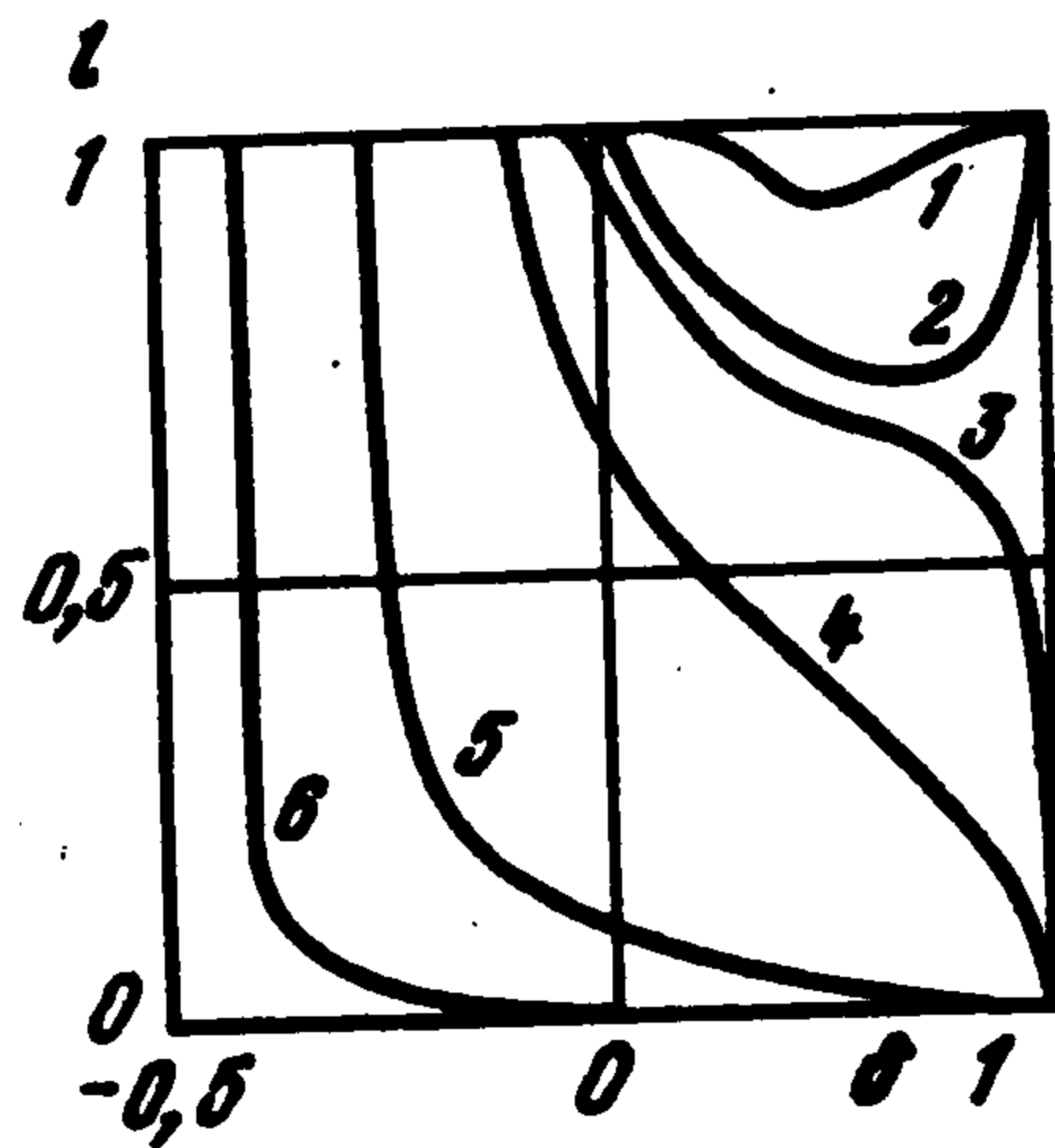
$$B(\delta) = \int_{-2\delta}^1 q(u) du \int_0^1 (1-t^2)^\delta dt, \quad q(u) = \sqrt{|u+2\delta|} (1-u)^{-1/2+\delta} (1+u)^{-\delta}$$

Необходимым условием существования корня $u_0 < 1$ уравнения (3.2) является равенство $C(\delta, \alpha_1, \alpha_2) = 0$, из которого следует

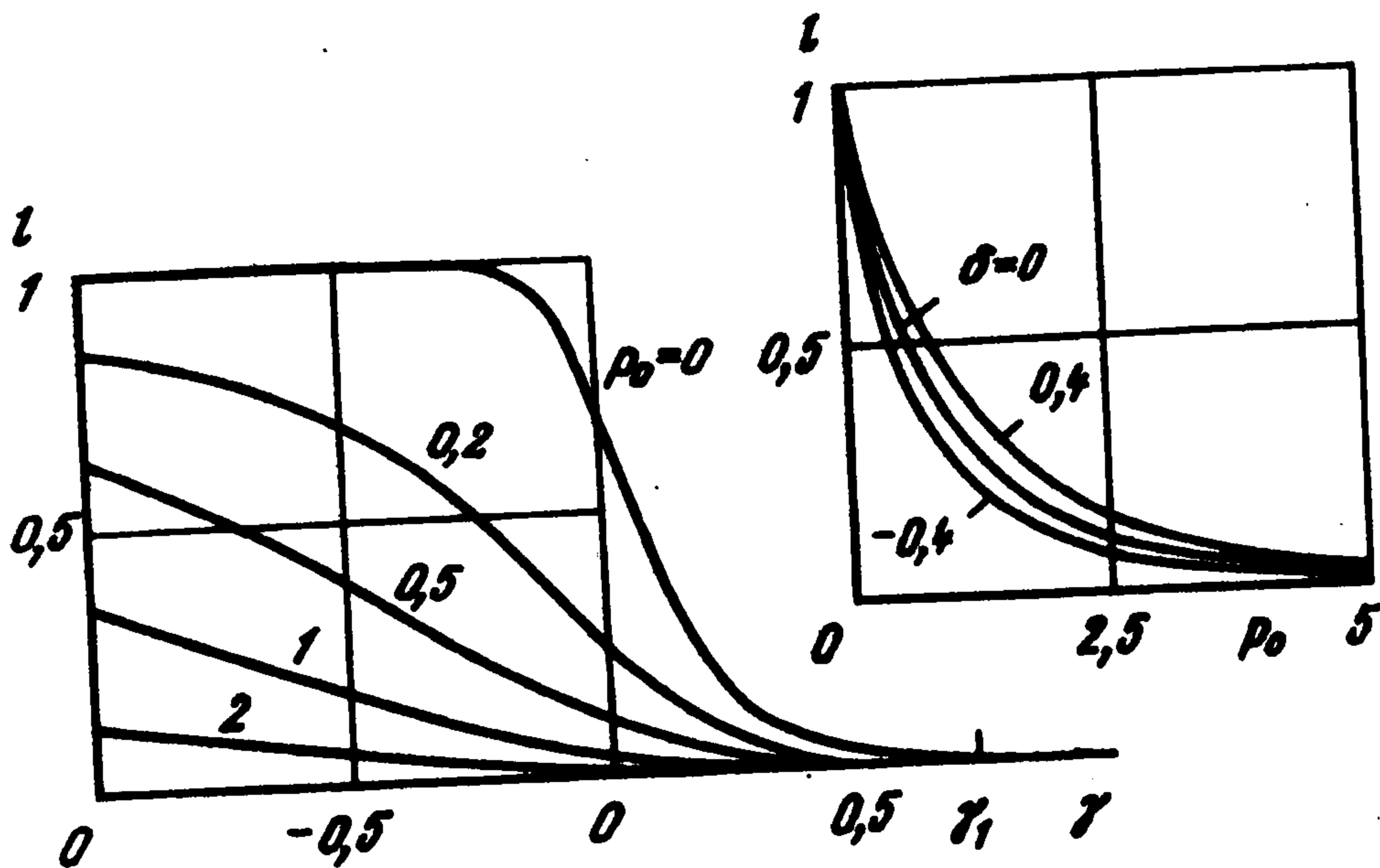
$$\gamma = \alpha_2 / \alpha_1 = \gamma_2(\delta) = -A(\delta) / B(\delta) \quad (3.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



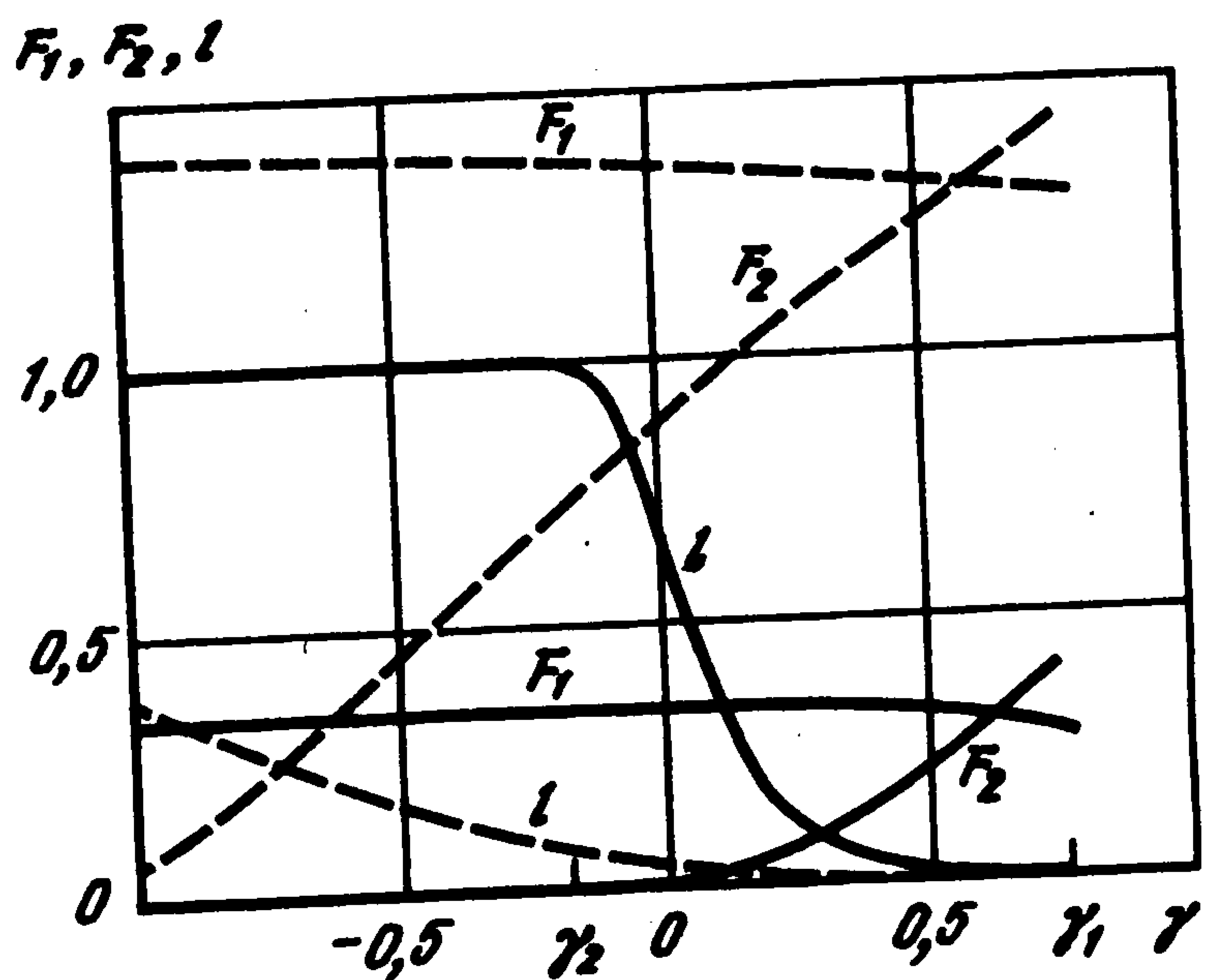
Фиг. 5

Соотношение (3.3), связывающее γ и δ , есть условие перехода от режима 1 к режиму 2.

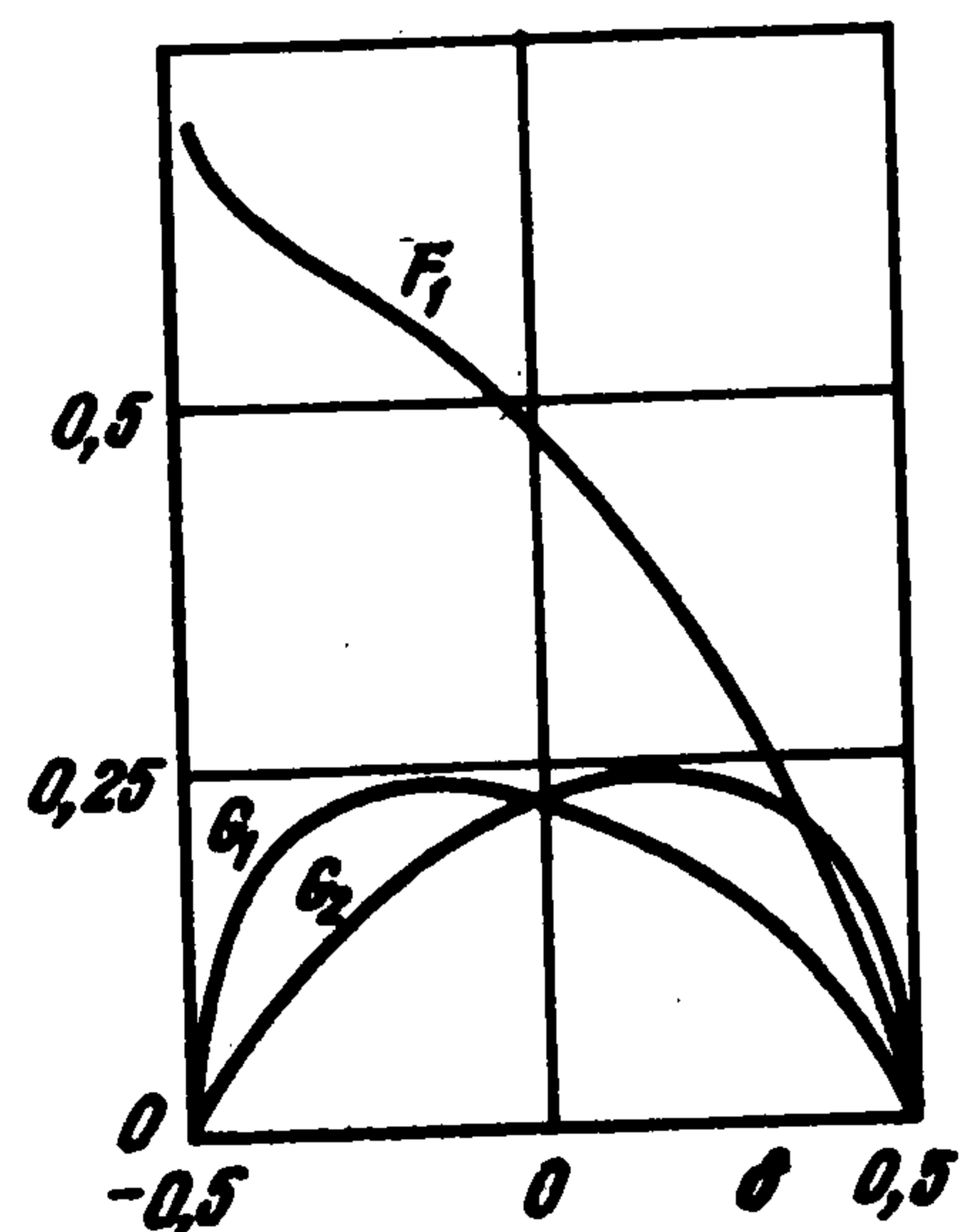
На фиг. 3 для случая $p_0 = 0$ в плоскости (δ, Γ) , где $\Gamma = \gamma/(1 + \gamma) = \alpha_2/\alpha$, изображены кривые 1, 2, вычисленные по формулам (3.1), (3.3) соответственно. Точки кривой 1 относятся к безотрывному движению жидкости, точки плоскости, расположенные между кривыми 1 и 2, соответствуют режиму 1, точки, лежащие ниже кривой 2 – режиму 2. Изображены также штриховые кривые 3–6, соединяющие точки плоскости $(-1/2, 1)$ и $(1/2, 0)$. Это – кривые $l(\delta, \Gamma) = l_0 = \text{const}$ при движении вдоль которых размер полости постоянен и равен l_0 . Кривые 3–6 соответствуют значениям $l_0 = 0,01; 0,5; 0,99; 0,999$.

Скорость v и давление p имеют особенности в точках А, С, В (фиг. 1). Обозначим через R расстояния от этих точек. При $R \rightarrow 0$ имеем: в случае безотрывного движения на кончике клина $v, p \sim \ln R$, в случае режимов 1 и 2 – $v, p \sim R^{-1/4}$. В точках А, В имеем $v \sim R^{\delta/(1/2-\delta)}$, $v \sim R^{-\delta/(1/2+\delta)}$ соответственно, и $p = 0$. В точке D скорость и давление непрерывны.

4. Введем новые безразмерные скорость v/α_1 , давление p/α_1 и сохраним прежние обозначения. Тогда рассматриваемая задача в случае режима 1 будет зависеть от трех параметров δ, γ, p_0 , а в остальных случаях – только от одного параметра δ .



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 4 представлены результаты вычисления $l(\delta)$ для $p_0 = 0$ и значений $\gamma = -0,1; -0,01; 0,01; 0,1; 0,4$; 1 (кривые 1–6 соответственно). При $\gamma > 0$ функция $l(\delta)$ при возрастании δ монотонно убывает, а затем, возрастая, снова достигает значения 1. Для любого $\gamma > 0$ всегда найдется такое значение δ , при котором движение жидкости безотрывно, для любых $\gamma < 0$ и δ происходит отрыв струи от ребра клина.

На фиг. 5 показаны зависимости размера полости l , образующейся на левой стороне пластинки, от давления p_0 , параметров δ и γ .

Кривые в левой части фиг. 5 построены для значений $\delta = 0,25$.

На фиг. 6 изображены зависимости $l(\gamma)$, силы $F_1(\gamma)$, действующей на правую грань клина, силы $F_2(\gamma)$, действующей на левую грань, от γ при $\delta = 0,2$. Сплошные линии соответствуют давлению $p_0 = 0$, штриховые – $p_0 = 1$. При $\gamma = \gamma_1$ движение безотрывно. Если $-1 \leq \gamma \leq \gamma_2$, $p_0 = 0$, то левая грань не смочена жидкостью.

На фиг. 7 представлены силы $F_1(\delta)$, действующая на правую сторону пластинки, левая сторона которой не смочена жидкостью ($p_0 = 0$) и силы $G_1(\delta)$, $G_2(\delta)$ в случае безотрывного движения. Эти силы G_1 , G_2 отличаются от сил F_1 , F_2 тем, что они нормированы не на α_1 , как было отмечено ранее, а на $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекин Б.С. Вход клина в несжимаемую жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 396–404.
2. Седов Л.И. Удар плавающего клина // Тр. ЦАГИ. 1935. № 152. С. 27–31.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1992